UNIVERZA V MARIBORU
FAKULTETA ZA KEMIJO IN KEMIJSKO TEHNOLOGIJO

Petra Žigert Pleteršek, Matevž Črepnjak

Visokošolski učbenik z rešenimi nalogami

MATEMATIKA I

Maribor 2013

Naslov publikacije: *Visokošolski učbenik z rešenimi nalogami Matematika I*

Avtorja: *izr. prof. dr. Petra Žigert Pleteršek*
Matevž Črepnjak

Strokovna recenzenta: *red. prof. ddr. Janez Žerovnik*
doc. dr. Aleksandra Tepeh

Vrsta publikacije: *visokošolski učbenik, e-izdaja*

URL: *http://atom.uni-mb.si/edu/egradiva/ucbenik_matematika1.pdf*

51(075.8)(076.2)
ŽIGERT Pleteršek, Petra
Matematika I [Elektronski vir] : visokošolski učbenik z rešenimi nalogami / Petra Žigert Pleteršek, Matevž Črepnjak. - El. učbenik. -
Maribor : Fakulteta za kemijo in kemijsko tehnologijo, 2013

ISBN 978-961-248-391-3
1. Črepnjak, Matevž
COBISS.SI-ID 74520065

Kazalo

Predgovor

Učbenik pred vami je nastajal kar nekaj časa, in letnica izdaje na prvi strani se je tekom priprave več kot enkrat spremenila. Nastal je na osnovi predavanj in vaj iz matematike, ki jih poslušajo študenti na začetku študija na Fakulteti za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Mariboru, zato lahko po njem posežejo predvsem študenti tehniških usmeritev.

Kadarkoli želiš matematiko predstaviti bodočim inženirjem, si v razcepu med poenostavljanjem matematičnih dejstev in njihovo korektnostjo. Trudila sva se voziti po vmesni poti; biti eksaktna in obenem razumljiva. Predstavljena tematika je resda že pokrita v večjem številu podobnih slovenskih ali tujejezičnih učbenikov, a želela sva združiti v celoto teorijo z velikim številom rešenih nalog, karerih poteki rešitev so natančno pojasnjeni.

Iskreno se zahvaljujeva obema recenzentoma, ddr. Janezu Žerovniku in dr. Aleksandri Tepeh, za zelo skrben pregled teksta in vse pripombe, ki so pripomogle h kvaliteti samega učbenika. Prav tako se zahvaljujeva najinim študentom, ki so kot pod drobnogledom našli napake, ki so avtorjema ušle.

Petra Žigert Pleteršek in Matevž Črepnjak

Uvodno poglavje

V uvodu se bomo spoznali z osnovnimi simboli logike, ki jih bomo vseskozi potrebovali pri zapisovanju matematičnih pojmov. Seznanili se bomo z množicami in preslikavami. Poleg tega bomo spoznali nekatere algebrske strukture, ki jih bomo kasneje potrebovali pri vpeljavi realnih in kompleksnih števil.

1.1 Logika in množice

Logika

Zelo poenostavljeno bi lahko povedali, da je logika veda, ki proučuje načela pravilnega mišljenja.

Osredotočili se bomo na izjave in njihovo povezovanje s tako imenovanimi izjavnimi povezavami oziroma logičnimi operatorji. *Izjava* je trditev, ki ima le eno lastnost, in sicer je bodisi resnična bodisi neresnična:

Sedim na predavanjih in zunaj sije sonce.

Izjava, ki je sestavljena iz ene same trditve, je *enostavna izjava*, v nasprotnem govorimo o *sestavljeni izjavi*. Enostavne izjave, ki jih običajno označujemo z malimi tiskanimi črkami $p, q, r, \ldots$, z *izjavnimi povezavami* povežemo v sestavljene izjave, ki jih označujemo z velikimi tiskanimi črkami z začetka abecede $A, B, \ldots$. Če je izjava p resnična, pravimo, da ima *logično vrednost* 1, in pišemo $p \equiv 1$, sicer je neresnična in ima logično vrednost 0 in pišemo $p \equiv 0$.

Zgled 1. *Preverimo logično vrednost enostavnih izjav p in q:*

$p \ldots$ 8 je sodo število,

$q \ldots$ 8 je praštevilo.

Izjava p je resnična in ima logično vrednost 1 ($p \equiv 1$), izjava q je neresnična in ima logično vrednost 0 ($q \equiv 0$).

Navedimo najpogostejše izjavne povezave, ki povezujejo dve enostavni izjavi v sestavljeno izjavo. Poleg teh bomo omenili še eno posebno izjavno povezavo, in sicer je to negacija, ki deluje samo na eni izjavi.

(i) *Negacija* $\neg$

$\neg p \ldots$ ne p oz. ni res, da p

Izjava $\neg p$ je resnična natanko tedaj, ko je p neresnična izjava, kar lahko prikažemo s *pravilnostno tabelo*:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Zgled 2. *Negirajmo izjavo p iz Zgleda 1 in določimo njeno logično vrednost.*

$A = \neg p \ldots$ 8 ni sodo število ($A \equiv 0$.)

(ii) *Disjunkcija* $\vee$

$p \vee q \ldots p$ ali q

Sestavljena izjava $p \vee q$ je resnična, ko je resnična vsaj ena od izjav p ali q. Tudi v tem, in prav tako v vseh nadaljnih primerih izjavnih povezav, lahko uporabimo pravilnostno tabelo:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Zgled 3. *Poiščimo disjunkcijo izjav iz Zgleda 1 in določimo njeno logično vrednost.*

$A = p \vee q \ldots$ 8 je sodo število ali praštevilo ($A \equiv 1$.)

(iii) *Konjunkcija* $\wedge$

$p \wedge q \ldots p$ in q

Sestavljena izjava $p \wedge q$ je resnična natanko tedaj, ko sta resnični obe izjavi p in q:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Zgled 4. *Poiščimo konjukcijo izjav iz Zgleda 1 in določimo njeno logično vrednost.*

$A = p \wedge q \ldots$ 8 je sodo število in hkrati praštevilo ($A \equiv 0$.)

(iv) *Implikacija* $\Rightarrow$

$p \Rightarrow q \ldots$ iz p sledi q (če p, potem q)

Sestavljena izjava $p \Rightarrow q$ je neresnična natanko tedaj, ko je p resnična in q neresnična izjava. V vseh ostalih primerih je ta izjava resnična:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Zgled 5. *Poiščimo obe implikaciji izjav iz Zgleda 1 in določimo njuni logični vrednosti.*

$A = q \Rightarrow p \ldots$ če je 8 praštevilo, potem je 8 sodo število ($A \equiv 1$.)
$B = p \Rightarrow q \ldots$ če je 8 sodo število, potem je praštevilo ($B \equiv 0$.)

(iv) *Ekvivalenca* $\Leftrightarrow$

$p \Leftrightarrow q \ldots p$ je ekvivalentno q (p natanko tedaj ko q)

Sestavljena izjava $p \Leftrightarrow q$ je resnična natanko tedaj, ko sta p in q obe resnični ali pa obe neresnični:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Zgled 6. *Poiščimo ekvivalenco izjav iz Zgleda 1 in določimo njeno logično vrednost.*

$A = p \Leftrightarrow q \ldots$ 8 je sodo število natanko tedaj, ko je 8 praštevilo ($A \equiv 0$.)

Vrstni red delovanja izjavnih povezav določimo z oklepaji in upoštevanjem prioritete izjavnih povezav, ki je sledeča (od najmočnejše do najšibkejše):

$$\begin{array}{c} \neg \\ \wedge \\ \vee \\ \Rightarrow \\ \Leftrightarrow \end{array}$$

Na primer, v sestavljeni izjavi $(\neg p) \vee q$ je oklepaj odvečen in jo lahko pišemo kot $\neg p \vee q$.

Pravimo, da sta izjavi A in B *enakovredni*, $A \approx B$, ko imata enako logično vrednost za vsak nabor enostavnih izjav, ki vstopajo vanju.

Omenimo, da so disjunkcija, konjunkcija in ekvivalenca komutativne in asociativne izjavne povezave, medtem ko implikacija teh lastnosti nima:

$$\begin{array}{cc} \text{komutativnost} & \text{asociativnost} \\ p \vee q \approx q \vee p, & (p \vee q) \vee r \approx p \vee (q \vee r), \\ p \wedge q \approx q \wedge p, & (p \wedge q) \wedge r \approx p \wedge (q \wedge r), \\ p \Leftrightarrow q \approx q \Leftrightarrow p, & (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \approx p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)\,. \end{array}$$

Zgled 7. *Podajmo primer enakovrednih sestavljenih izjav.*

S pravilnostno tabelo se lahko prepričamo, da sta naslednji sestavljeni izjavi enakovredni:

$$p \Leftrightarrow q \approx (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\,.$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

Naštejmo še nekatere pomembnejše enakovredne izjave, ki jih lahko hitro preverimo s pravilnostno tabelo:

$$\begin{aligned}
p \Rightarrow q &\approx \neg p \vee q \\
p \Leftrightarrow q &\approx \neg p \Leftrightarrow \neg q \\
\neg(p \wedge q) &\approx \neg p \vee \neg q \quad \ldots \quad \text{De Morganov zakon} \\
\neg(p \vee q) &\approx \neg p \wedge \neg q \quad \ldots \quad \text{De Morganov zakon} \\
p \vee (q \wedge r) &\approx (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \ldots \quad \text{distributivnost} \\
p \wedge (q \vee r) &\approx (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \ldots \quad \text{distributivnost}
\end{aligned}$$

Zgled 8. *Preverimo enakovrednost naslednjih izjav.*

1. $p \Rightarrow q \approx \neg q \Rightarrow \neg p$:

Enakovrednost lahko preverimo s pravilnostno tabelo:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Lahko pa tudi z uporabo enakovrednih izjav, ki smo jih zgoraj navedli:

$$\begin{array}{cccc}
p & \Rightarrow & q & \approx \\
\neg p & \vee & q & \approx \\
q & \vee & \neg p & \approx \\
\neg q & \Rightarrow & \neg p\,.
\end{array}$$

2. $\neg(p \Rightarrow q) \approx p \wedge \neg q$:

Na podoben način s pomočjo pravilnostne tabele lahko bralec sam preveri drugi primer, mi pa bomo uporabili enakovredne izjave:

$$\begin{array}{cccc} \neg\,(\,p & \Rightarrow & q\,) & \approx \\ \neg\,(\,\neg p & \vee & q\,) & \approx \\ \neg\,(\,\neg p\,) & \wedge & \neg\,q & \approx \\ p & \wedge & \neg\,q\,. & \end{array}$$

Zgled 9. *Zanikajmo izjavo:*

Če sem študent, se lahko rekreiram v UŠC-ju.

Zanikana izjava je:
"Sem študent in se ne rekreiram v UŠC-ju."

Pri tem je enostavna izjava

$$p \ldots \text{sem študent}$$

in druga enostavna izjava je

$$q \ldots \text{rekreiram se v UŠC-ju}\,.$$

Sestavljena izjava je

$$p \Rightarrow q\,,$$

katere negacija je

$$p \wedge \neg q\,.$$

Pri zapisovanju izjav se pojavljata dva kvantifikatorja:

univerzalni kvantifikator: $\forall \ldots$ beremo "za vsak" in

eksistenčni kvantifikator: $\exists \ldots$ beremo "obstaja".

Če ima nek x lastnost P, pišemo $P(x)$. Izjavi, da ima vsak x lastnost P oz. da obstaja x z lastnostjo P, zanikamo kot:

$$\neg\forall x : P(x) \approx \exists x : \neg P(x)\,,$$

$$\neg\exists x : P(x) \approx \forall x : \neg P(x)\,.$$

Zgled 10. *Zanikajmo izjavi:*

1. *Vsak košarkaš je visok nad 1,90 m.*

   Zanikana izjava je:

   "Obstaja košarkaš, ki ni višji od 1,90 m."

   Pri tem je lastnost

   $$P(x)\ldots \text{ košarkaš } x \text{ je višji od } 1.90 \text{ m}$$

   in izjava je $\forall x : P(x)$, njena negacija pa je $\exists x : \neg P(x)$.

2. *Nekatere ženske rade gledajo nogomet.*

   Na podoben način kot v prvem primeru pridemo do zanikane izjave:

   "Nobena ženska ne gleda rada nogometa."

Množice

Teorija množic je temeljno področje matematike, a zaradi njene zahtevnosti se bomo seznanili samo z nekaterimi osnovnimi pojmi te teorije. Pogledali si bomo zapisovanje in podajanje množic ter računske operacije z njimi.

Pojem množica bomo uvedli le na osnovi modela, ki nam je blizu iz vsakdana. *Množica* je skupina nekih elementov, govorimo lahko recimo o množici vseh učencev dane šole, množici števk itd. To množico imenujemo *univerzalna množica* ali *univerzum.* in običajno je označena z U. Poljubne množice običajno označujemo z veliki tiskanimi črkami $A, B, \ldots, M, \ldots$, nekatere znane množice pa imajo posebne oznake, na primer $\mathbb{Z}$ je množica celih števil ali $\mathbb{R}$ je množica realnih števil, o kateri bomo povedali več v nadaljevanju.

Množico smatramo za podano, če lahko za vsako reč presodimo, ali je ali ni iz dane množice. Reči v množici so *elementi* te množice. Izjavo, da je a element množice M, zapišemo takole:

$$a \in M\,.$$

V nasprotnem primeru, če nek element b ne pripada množici M, to zapišemo

$$b \notin M\,.$$

Množice najpogosteje podajamo na enega od naslednjih dveh načinov.

i) V zavitih oklepajih naštejemo vse elemente množice:

$$M = \{-1, 0, 1\}\,.$$

ii) V zavitem oklepaju zapišemo skupno lastnost $P(x)$ elementov množice:

$$M = \{x|P(x)\}\,,$$

na primer

$$M = \{x|x^2 - x = 0\} = \{0, 1\}\,.$$

Včasih uporabimo kombinacijo obeh načinov, ko elemente naštejemo, vendar ne moremo našteti vseh elementov. V tem primeru uporabimo zapis

$$M = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}\,,$$

kjer pikice pomenijo "in tako naprej", tako da moramo iz naštetih elementov izluščiti karakteristično lastnost množice.

Zgled 11. *Poiščimo elemente množic A in B.*

1. *Naj množica A vsebuje vse tiste x, za katere velja, da je x praštevilo.*

   $$A = \{x|x \text{ je praštevilo}\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, \ldots\}\,.$$

2. *Naj imajo elementi množice B lastnost $P(x)$, ki pove, da je x večkratnik števila 3 v množici naravnih števil $\mathbb{N}$.*

   $$B = \{x|P(x)\} = \{x|\, x = 3\,k \wedge k \in \mathbb{N}\} = \{3\,k|\, k \in \mathbb{N}\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}\,.$$

Množica M je *prazna*, ko ne vsebuje nobenega elementa. Prazno množico zapišemo $\emptyset$ ali tudi $\{\,\}$.

Intuitivno lahko rečemo, da je množica *končna*, če lahko zapišemo vse njene elemente. *Moč končne množice M*, $|M|$, je število njenih elementov.

Množica A je *podmnožica* množice B, $A \subseteq B$, če je vsak element množice A obenem tudi element množice B. Množici A in B sta *enaki*, $A = B$, ko je $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$. Neenakost množic A in B zapišemo $A \neq B$. A je *prava podmnožica* množice B, $A \subset B$, če je $A \subseteq B$ in je $A \neq B$.

Pri obravnavi množic se vedno omejimo na neko *univerzalno množico*, ki jo označimo z U.

Potenčna množica množice A, $\mathcal{P}(A)$, je množica vseh podmnožic množice A.

Zgled 12. *Poiščimo odnos med množicama A in B.*

1. *Naj bo A množica celih števil in B množica sodih števil.*

   Tedaj je $B \subset A$.

2. $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \wedge x < 0\}$, $B = \emptyset\,.$

Tedaj je $A = B$.

Zgled 13. *Poiščimo potenčno množico množice* $A = \{1, a, b\}$.

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{a\}, \{b\}, \{1, a\}, \{1, b\}, \{a, b\}, A\}$$

Poglejmo najpogostejše operacije z množicami:

(i) *Presek* množic A in B, $A \cap B$, je množica vseh tistih elementov, ki so hkrati v A in v B:
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}\,.$$
Če je $A \cap B = \emptyset$ pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*.

(ii) *Unija* množic A in B, $A \cup B$, je množica vseh tistih elementov, ki so vsaj v eni od množic A ali B:
$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}\,.$$

(iii) *Razlika* množic A in B, $A - B$, je množica vseh tistih elementov, ki so v A in niso v B:
$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}\,.$$

(iv) *Kartezični produkt množic A in B*, $A \times B$, je množica vseh urejenih parov (a, b), kjer je $a \in A$ in $b \in B$:
$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}\,.$$

Zgled 14. *Naj bo* $A = \{a, b, c, d, 1, 2, 3\}$ *in* $B = \{1, c, e\}$.

1. *Poiščimo presek množic A in B.*

   $A \cap B = \{1, c\}\,.$

2. *Poiščimo unijo množic A in B.*

   $A \cup B = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3\}\,.$

3. *Poiščimo razliko množic A in B.*

   $A - B = \{a, b, d, 2, 3\}\,.$

Komplement množice A (glede na univerzalno množico U), A^C, je razlika množic U in A:

$$A^C = U - A = \{x \in U | x \notin A\}\,.$$

V komplementu množice A so torej elementi, ki so v U in niso v A.

Operacije z množicami imajo različne lastnosti, med katerimi sta pomembnejši *komutativnost* in *asociativnost*. Preprosto je preveriti, da imata operaciji unije in preseka obe lastnosti:

$$A \cap B = B \cap A \qquad \text{in} \qquad A \cup B = B \cup A \qquad \ldots \quad \text{komutativnost}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{in} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \ldots \quad \text{asociativnost}\,.$$

Razlika množic nima teh dveh lastnosti. Poglejmo še nekaj lastnosti operacij z množicami:

$$\begin{array}{ll}
A \subseteq A \cup B\,, & B \subseteq A \cup B\,, \\
A \cap B \subseteq A\,, & A \cap B \subseteq B\,, \\
A \cap A = A\,, & A \cup A = A\,, \\
A \cap \emptyset = \emptyset\,, & A \cup \emptyset = A\,, \\
(A \cap B)^C = A^C \cup B^C\,, & (A \cup B)^C = A^C \cap B^C\,, \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,, & A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.
\end{array}$$

Za zgled izpeljimo eno od distributivnosti:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \vee x \in A \wedge x \in C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

Zgled 15. *Poiščimo oba kartezična produkta množic* $A = \{1, 2, 3\}$ *in* $B = \{a, b\}$.

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\} \\ B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \end{aligned}$$

Ker $A \times B \neq B \times A$, vidimo, da kartezični produkt ni komutativna operacija.

Omenimo, da je treba biti pozoren na vrstni red elementov pri zapisu urejenega para, medtem ko je pri množici vrstni red lahko poljuben:

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \{b, a\} \quad \ldots \quad \text{množica}, \\ (a, b) &\neq (b, a) \quad \ldots \quad \text{urejeni par}. \end{aligned}$$

Zapis $\{a, a\}$ ni korekten, saj je isti element množice naveden dvakrat in moramo v tem primeru pisati $\{a\}$, medtem ko je zapis (a, a) korekten, saj predstavlja urejeni par.

Kartezični produkt lahko posplošimo na več faktorjev:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i, \; i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Elementi kartezičnega produkta $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ so *urejene n-terice.* Tako je $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ n-razsežen realni prostor, o katerem na tem mestu ne bomo podrobneje govorili.

1.2 Preslikave

Zanimale nas bodo poljubne preslikave in njihove osnovne lastnosti.

Definicija 1.1. Preslikava *je določena s parom množic in predpisom, ki vsakemu elementu iz prve množice priredi natanko en element iz druge množice.*

Običajen zapis za preslikavo f iz množice A v množico B je $f : A \to B$. Pri tem je f predpis, množico A imenujemo *domena* in množico B *kodomena* preslikave. Če preslikava $f : A \to B$ elementu a iz domene A priredi element b iz kodomene B, to zapišemo kot

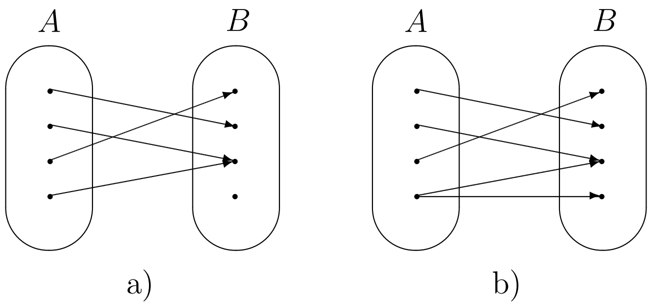
$$f(a) = b$$

ali tudi

$$f : a \mapsto b$$

(znak $\mapsto$ beremo "priredi"). Elementi domene so *originali* in elementi kodomene so njihove *slike*.

Če sta množici A in B končni in ne preveliki, lahko preslikavo opišemo z diagramom, kot to vidimo na Sliki 1.1. Na Sliki 1.1 imamo pod a) primer preslikave, medtem ko pod b) nimamo opravka s preslikavo, saj se en original ne more preslikati v dve različni sliki.



Slika 1.1: a) Je preslikava, b) ni preslikava.

Za preslikavo uporabljamo tudi termine funkcija, upodobitev, transformacija, ... Izbira ustreznega termina je odvisna od vrste domene in kodomene. V naslednjem poglavju bomo govorili o preslikavah, v katerih bosta domena in kodomena podmnožici realnih števil, in v tem primeru se uporablja izraz realna funkcija.

Zgled 16. *Ugotovimo, ali so s spodnjimi predpisi definirane preslikave.*

1. *Naj bo* $A = \{1, 2, 3, 4\}$*,* $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ *in* $f : A \to B$ *podana z*

$$f(1) = b, f(2) = e, f(3) = b, f(4) = a\,.$$

   Je preslikava, saj vsakemu elementu iz A priredi natanko en element iz B.

2. *Naj bo* A *množica vseh ljudi na svetu,* B *pa množica vseh držav na svetu in* $f : A \to B$ *definirana tako, da je* $f(a)$ *država, katere državljan je oseba* a*.*

   Ni preslikava, ker lahko ima nekdo dvojno državljanstvo.

3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = 3n^2$.

   Je preslikava.

4. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f((n, m)) = 2n + m$.

   Je preslikava.

5. $f : A \to A$, $f(a) = a$.

   Je preslikava za poljubno neprazno množico A, in sicer takšno preslikavo imenujemo *identiteta* ali *identična preslikava* na množici A in jo označujemo $I_A = f$.

V primeru končne domene preslikave f je lahko le-ta namesto s predpisom podana s tabelo originalov in njihovih slik, kot je to razvidno iz Zgleda 17. Za preslikave z neskončno domeno ta način podajanja ni primeren.

Zgled 17. *Podajanje funkcij s tabelo:*

1. *Preslikava f je podana s tabelo:*

originali a	*Slovaška*	*Slovenija*	*Sev. Irska*	*Češka*	*Poljska*	*San Marino*
slike $f(a)$	*19*	*14*	*14*	*12*	*11*	*0*

2. *Preslikava g je podana s tabelo:*

originali a	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
slike $g(a)$	*4*	*-3*	$\frac{1}{3}$	*2*	*4*	*-2*	*2*

Naj bosta $f, g : A \to B$. Preslikavi f in g sta *enaki*, $f = g$, če je $f(a) = g(a)$ za vsak $a \in A$.

Zgled 18. *Preverimo, ali sta preslikavi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ enaki.*

1. $f(x) = (x-1)^3$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$:

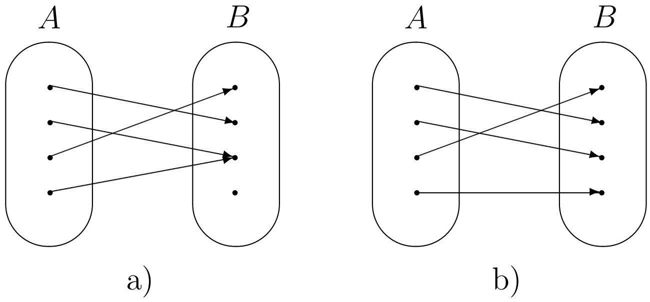
   Ker je $f(x) = g(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, sta f in g enaki preslikavi.

2. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = x$:

   Ker je $f(-5) = 5$ in $g(-5) = -5$, sta preslikavi f in g različni.

Definicija 1.2. *Preslikava $f : A \to B$ je* surjektivna*, če je vsak element iz B slika kakega elementa iz A:*

$$\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b\,.$$



Slika 1.2: a) Ni surjektivna preslikava, b) je surjektivna preslikava.

Na Sliki 1.2 imamo pod a) primer preslikave, ki ni surjektivna, medtem ko je preslikava pod b) surjektivna.

Zaloga vrednosti preslikave $f : A \to B$, Z_f, je množica vseh tistih elementov iz B, ki so slika kakega elementa iz A:

$$Z_f = \{b \in B | \exists a \in A : f(a) = b\} = \{f(a) | a \in A\}\,.$$

Preslikava $f : A \to B$ je surjektivna natanko tedaj, ko je $Z_f = B$.

Zgled 19. *Za preslikave iz Zgleda 16 preverimo njihovo surjektivnost.*

1. Ni surjektivna.
2. Ni niti preslikava.
3. Ni surjektivna, ker $Z_f = \{3, 12, 27, \ldots\} \neq \mathbb{N}$.
4. Ni surjektivna, ker $1, 2 \notin Z_f$.
5. Je surjektivna, ker je $Z_f = A$.

Definicija 1.3. *Preslikava $f : A \to B$ je* injektivna*, če se poljubna različna elementa iz A preslikata v različna elementa iz B:*

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)\,.$$

Ekvivalenten zapis bi bil

$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2\,.$$

Nasprotno torej preslikave, ki niso injektivne, dobimo z negacijo zgornje trditve

$$\exists a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \wedge f(a_1) = f(a_2)\,.$$

Na Sliki 1.2 imamo pod b) primer injektivne preslikave, medtem ko preslikava pod a) ni injektivna.

Zgled 20. *Za predpise iz Zgleda 16 preverimo njihovo injektivnost.*

1. Ni injektivna, ker je $f(1) = f(3)$.
2. Ni niti preslikava.
3. Je injektivna.
4. Ni injektivna, ker je na primer $f((1,3)) = f((2,1))$.
5. Je injektivna.

Definicija 1.4. *Preslikava* $f : A \to B$ *je* bijektivna, *ko je injektivna in surjektivna, kar formalno zapišemo*

$$\forall b \in B, \exists!\, a \in A : f(a) = b\,.$$

Opomba. Simbol $\exists\,!$ beremo "obstaja natanko en".

Na Sliki 1.2 b) vidimo primer bijektivne preslikave.

Zgled 21. *Za preslikave iz Zgleda 16 preverimo njihovo bijektivnost.*

Od vseh prej omenjenih je le identiteta bijektivna preslikava.

Zgled 22. *Preverimo bijektivnost preslikav.*

1. *Naj bo* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ *in* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$.

   Tako definirana preslikava f je bijektivna, saj za vsak $y = x^2$ obstaja natanko eno pozitivno število x, ki se preslika v y.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.

   Tako definirana preslikava f ni niti injektivna ($f(2) = f(-2)$) niti surjektivna (na primer -4 ni slika nobenega elementa), zato ni bijektivna.

Z uporabo bijektivne preslikave lahko definiramo enako močne množice.

Definicija 1.5. *Končni množici sta enako močni, ko med njima obstaja bijektivna preslikava.*

To definicijo lahko posplošimo tudi na neskončne množice. Za ilustracijo si poglejmo Zgled 23.

Zgled 23. *Pokažimo, da sta množica naravnih števil* $\mathbb{N}$ *in množica sodih števil enako močni.*

Podajmo preslikavo f, ki slika iz množice $\mathbb{N}$ v množico sodih števil s predpisom

$$f(n) = 2n\,.$$

Ker je tako definirana preslikava f bijekcija, sta množici enako močni. Pravimo, da imata števno neskončno moč.

Definicija 1.6. Graf preslikave $f : A \to B$, Γ_f, *je množica vseh urejenih parov* $(a, f(a))$*:*

$$\Gamma_f = \{(a, f(a))|a \in A\} \subseteq A \times B\,.$$

Zgled 24. *Naj bo* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ *in* $f : A \to B$ *definirana kot*

$$f(1) = b, f(2) = a, f(3) = c\,.$$

Poiščimo graf preslikave f*.*

Graf preslikave f je

$$\Gamma_f = \{(1, b), (2, a), (3, c)\}\,.$$

Zgled 25. *Poiščimo graf preslikave* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$*.*

$\Gamma_f = \{(x, x^2)|\, x \in \mathbb{R}\}\,.$

Definicija 1.7. Kompozitum preslikav $f : A \to B$ *in* $g : B \to C$ *je preslikava* $g \circ f : A \to C$*, definirana s predpisom*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\,.$$

Računski operaciji pravimo komponiranje.

Zgled 26. *Poiščimo kompozitum preslikav.*

1. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = e^{2x}$ in $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s $g(x) = x^3 + 2x$.*

   Tedaj lahko izračunamo oba kompozituma:

$$g \circ f = (g \circ f)(x) = g(e^{2x}) = (e^{2x})^3 + 2e^{2x} = e^{6x} + 2e^{2x}$$

$$f \circ g = (f \circ g)(x) = f(x^3 + 2x) = e^{2(x^3+2x)} = e^{2x^3+4x}\,.$$

2. *$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f((n,m)) = n + m$ in $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(n) = n^2$.*

   V tem primeru je definiran le kompozitum $g \circ f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$(g \circ f)((n,m)) = g(n+m) = (n+m)^2\,.$$

Opazimo, da komponiranje ni komutativna operacija:

$$f \circ g \neq g \circ f\,.$$

Po drugi strani pokažimo, da je komponiranje asociativna operacija. Naj bodo dane preslikave $f : A \to B$, $g : B \to C$ in $h : C \to D$. Tedaj je

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))) \quad \text{in} \\ (f \circ (g \circ h))(x) &= f(g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))\,. \end{aligned}$$

Zgled 27. *Pokažimo asociativnost komponiranja, če sta preslikavi f in g podani kot v 1. točki Zgleda 26, in je $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $h(x) = 3x$.*
Vemo že, da je $(f \circ g)(x) = e^{2x^3+4x} := y(x)$, zato je

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (y \circ h)(x) = y(h(x)) = y(3x) = e^{2(3x)^3+12x} = e^{54x^3+12x}\,.$$

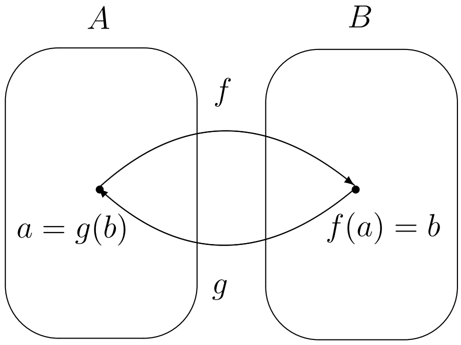
Za drugo stran izračunajmo najprej

$$z(x) := (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(3x) = (3x)^3 + 2(3x) = 27x^3 + 6x\,.$$

Tedaj je

$$(f \circ (g \circ h)(x) = (f \circ z)(x) = f(z(x)) = e^{2(27x^3+6x)} = e^{54x^3+12x}\,.$$

Spomnimo se, da je I_A identična preslikava na množici A. Z njeno pomočjo lahko definiramo obratno preslikavo.



Slika 1.3: Obratni preslikavi f in g.

Trditev 1.8. *Naj bo $f : A \to B$ bijektivna preslikava. Potem obstaja natanko ena bijektivna preslikava $g : B \to A$ taka, da je*

$$g \circ f = I_A \quad \textit{in} \quad f \circ g = I_B\,.$$

Dokaz.

Definirajmo g kot:

$$\forall b \in B \text{ naj bo } g(b) \text{ tisti } a \in A, \text{ za katerega je } f(a) = b\,,$$

kot je to razvidno s Slike 1.3. Tako definirana preslikava g je bijektivna, saj iz bijektivnosti preslikave f sledi, da za vsak $a \in A$ obstaja natanko en tak $b = f(a) \in B$, da je $g(b) = a$.

Pokažimo še drugi del trditve:

$$\forall a \in A : (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a \Rightarrow g \circ f = I_A\,.$$

Podobno velja

$$\forall b \in B : (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b \Rightarrow f \circ g = I_B\,.$$

∎

Preslikavo g običajno označujemo f^{-1} in ji pravimo *inverzna preslikava* ali *obratna preslikava* preslikave f.

Zgled 28. *Če obstajata, poiščimo obratni preslikavi za preslikavi iz Zgleda 17.*

1. *Preslikava f je podana s tabelo:*

originali a	-3	-2	-1	0	1	2	3
slike $f(a)$	4	-3	$\frac{1}{3}$	2	1	-2	5

Če vzamemo za kodomeno preslikave f množico $B = \{4, -3, \frac{1}{3}, 2, 1, -2, 5\}$, je preslikava f bijektivna. Tedaj obstaja njej obratna preslikava f^{-1} in sicer je podana s tabelo:

originali b	4	-3	$\frac{1}{3}$	2	1	-2	5
slike $f^{-1}(b)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

2. *Preslikava g je podana s tabelo:*

originali a	*Slovaška*	*Slovenija*	*Sev. Irska*	*Češka*	*Poljska*	*San Marino*
slike $g(a)$	19	14	14	12	11	0

Ker imata Slovenija in Sev. Irska enako funkcijsko vrednost 14, preslikava g ni bijektivna in ne obstaja njej obratna preslikava.

Zgled 29. *Naj bo $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ in $f : A \to B$ podana s predpisom*

$$f(1) = b, f(2) = a, f(3) = c\,.$$

Če obstaja, poiščimo f^{-1}.

Preslikava f je bijektivna in zato obstaja $f^{-1} : B \to A$, ki je podana kot

$$f^{-1}(a) = 2, f^{-1}(b) = 1, f^{-1}(c) = 3\,.$$

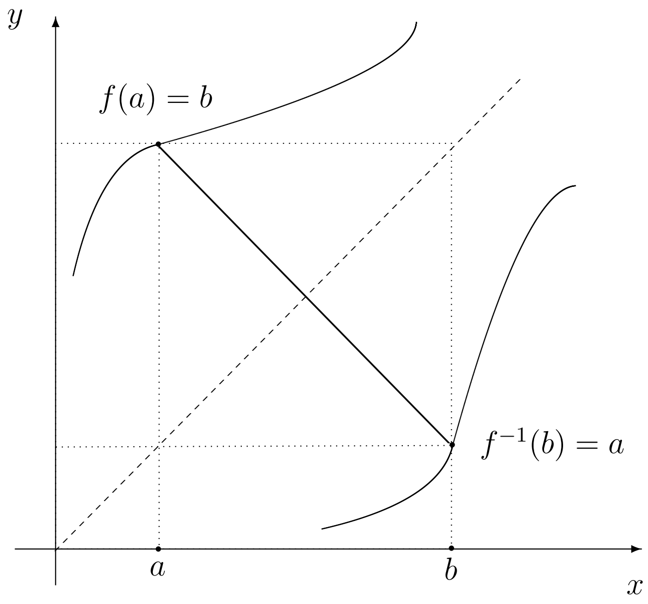
Na Sliki 1.4 vidimo odnos med grafom preslikave f in grafom obratne preslikave f^{-1}.

1.3 Nekatere algebrske strukture

Grupa

Definicija 1.9. Binarna operacija $*$ *je preslikava, ki deluje iz množice $A \times A$ v množico A:*

$$* : A \times A \to A\,.$$



Slika 1.4: Obratni preslikavi f in f^{-1}.

To pomeni, da poljubnemu urejenemu paru (x, y) iz kartezičnega produkta $A \times A$ priredimo element $z = x * y$, ki pripada množici A:

$$(x, y) \in A \times A \mapsto z = x * y \in A\,.$$

Množico A z binarno operacijo $*$ označimo $(A, *)$.

Zgled 30. *Ali sta seštevanje sodih števil in seštevanje lihih števil binarni operaciji?*

Seštevanje sodih števil je binarna operacija, saj je vsota dveh sodih števil spet sodo število, medtem ko v primeru lihih števil to ne velja.

Definicija 1.10. *Množica $(A, *)$ je* grupa*, če velja:*

(i) $a * (b * c) = (a * b) * c,\ \forall a, b, c \in A \ldots$ *asociativnost,*

(ii) $\exists e \in A, \forall a \in A : a * e = e * a = a \ldots$ *obstoj enote,*

(iii) $\forall a \in A, \exists a' \in A : a * a' = a' * a = e \ldots$ *obstoj nasprotnega elementa.*

Če velja samo lastnost (i), je $(A, *)$ polgrupa*.*

Zgled 31. *Ali so cela števila z operacijo seštevanja grupa?*

Cela števila z operacijo seštevanja tvorijo grupo $(\mathbb{Z}, +)$. Enota je 0, nasprotni element od a pa je $-a$.

Zgled 32. *Naj bo $A = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} = \mathbb{Z}_n$ množica ostankov pri deljenju z n. Preverimo, ali je množica $\mathbb{Z}_n$ grupa za operacijo seštevanja po modulu n.*

V tabeli so prikazani rezultati seštevanja po modulu 5 na množici $\mathbb{Z}_5$:

$+_{\text{mod}\,5}$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Opazimo, da je operacija binarna, enota je število 0, nasprotni element od $a \in \mathbb{Z}_5 - 0$ je $5 - a$, element 0 pa je sam sebi nasproten. Te ugotovitve lahko posplošimo na poljuben n. Poleg tega je izpolnjena tudi asociativnost, zato je $(\mathbb{Z}_n, +_{\text{mod}\,n})$ grupa.

Zgled 33. *Preverimo, ali je $(\mathbb{Z}_n, \cdot_{mod\,n})$ z operacijo množenja po modulu n grupa.*

Poglejmo tabelo množenja po modulu za $n = 5$:

$\cdot_{\text{mod}\,5}$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Opazimo, da $(\mathbb{Z}_5, \cdot_{\text{mod}\,5})$ ni grupa, saj imamo težave z elementom 0 in enako velja tudi za poljuben n.

Običajno pri operaciji množenja namesto o nasprotnem elementu govorimo o obratnem elementu.

Če v grupi velja tudi komutativnost $(a * b = b * a)$, jo imenujemo *Abelova grupa.*

Zgled 34. *Ali sta grupi iz Zgledov 31 in 32 Abelovi grupi?*

Obe omenjeni grupi sta Abelovi grupi.

Definicija 1.11. *$(H, *)$ je* podgrupa *grupe $(G, *)$, če je H podmnožica od G in je $(H, *)$ tudi grupa.*

Zgled 35. *Ali so soda števila z operacijo seštevanja podgrupa celih števil z enako definirano operacijo?*

Da.

Natančneje bomo spoznali eno izmed pomebnejših grup, in sicer je to simetrična grupa.

Definicija 1.12. Permutacija *končne množice X je bijektivna preslikava, ki slika nazaj v množico X.*

Običajno gledamo permutacije na množici $X = \mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ in jih označujemo s π. Poglejmo si primer permutacije na množici $\mathbb{N}_4$:

$$\pi(1) = 3,\ \pi(2) = 2,\ \pi(3) = 4,\ \pi(4) = 1\,.$$

V praksi je uporaben krajši zapis uporabe permutacij, ki je neposredno razviden iz primera:

$$\pi(1) = 3,\ \pi(2) = 2,\ \pi(3) = 4,\ \pi(4) = 1 \mapsto \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Množico vseh permutacij na množici $\mathbb{N}_n$ označimo z S_n.

Zgled 36. *Poiščimo elemente množice S_3.*

$$\begin{aligned} S_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\ &\qquad \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Na permutacijah je naravno definirana računska operacija komponiranja. Na primeru si poglejmo kompozitum permutacij.

Zgled 37. *Poiščimo kompozitum permutacij π_1 in π_2 iz S_5.*

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad in \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
\pi_1(\pi_2(1)) &= \pi_1(1) = 3, \\
\pi_1(\pi_2(2)) &= \pi_1(3) = 4, \\
\pi_1(\pi_2(3)) &= \pi_1(5) = 5, \\
\pi_1(\pi_2(4)) &= \pi_1(4) = 1, \\
\pi_1(\pi_2(5)) &= \pi_1(2) = 2 .
\end{aligned}
$$

$$\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Za operacijo komponiranja je množica S_n grupa, ki jo imenujemo *simetrična grupa*. Operacija je očitno binarna in že vemo, da je asociativna. Nadalje je enota identiteta

$$I_{\mathbb{N}_n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} .$$

Ker so permutacije po svoji definiciji bijektivne preslikave, zanje obstajajo obratne preslikave.

Zgled 38. *Poiščimo pare obratnih permutacij v S_3.*

V simetrični grupi S_3 iz Zgleda 36 so prve štiri permutacije same sebi obratne, medtem ko zadnji dve tvorita par obratnih permutacij.

Trditev 1.13. *Moč simetrične grupe S_n, $|S_n|$, je enaka*

$$n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 .$$

Dokaz. Gledamo bijektivne preslikave iz $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. Za prvi element imamo na razpolago poljubnega izmed n elementov množice $\mathbb{N}_n$. Za drugi element imamo eno možnost manj, ker je vsaka permutacija injektivna preslikava, torej $n-1$. Za tretji element imamo še eno možnost manj, torej $n-2$ in tako naprej. Torej imamo skupno

$$n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 .$$

različnih bijekcij na množici $\mathbb{N}_n$. ∎

Produkt prvih n naravnih števil označimo $n!$ in beremo *n-fakulteta* ali *n-faktorsko*

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 .$$

Iz trditve in zgornje definicije neposredno sledi posledica.

Posledica 1.14.
$$|S_n| = n!\,.$$

Zgled 39. *Na koliko načinov lahko petim otrokom razdelimo malico, če imamo na razpolago po eno jabolko, hruško, breskev, marelico in kivi ter mora dobiti vsak otrok natanko en sadež?*

Sadje lahko razdelimo na

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

načinov.

Obseg in kolobar

Obseg je algebrska struktura z dvema binarnima operacijama, in sicer sta to operaciji seštevanja $\oplus$ in množenja $\odot$.

Definicija 1.15. $(A, \oplus, \odot)$ *je* obseg*, če velja:*

(i) $(A, \oplus)$ *je Abelova grupa z enoto* 0*,*

(ii) $(A - \{0\}, \odot)$ *je Abelova grupa za enoto* 1*,*

(iii) $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c \dots$ *distributivnost.*

Če omilimo pogoj (ii) in za množenje zahtevamo samo asociativnost, govorimo o *kolobarju*. Če imamo obenem enoto za množenje, je to *kolobar z enoto* in če je množenje tudi komutativno, govorimo o *komutativnem kolobarju*.

Zgled 40. *Ali sta naslednji množici obsega ali morda samo kolobarja:*

(i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$*,*

(iii) $(\mathbb{Z}_n, +_{mod\, n}, \cdot_{mod\, n})$*?*

(i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ni obseg, ker $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ ni grupa. Je pa množenje celih števil asocativna in komutativna operacija ter ima enoto 1, zato je to komutativen kolobar z enoto.

(iii) $(\mathbb{Z}_n, +_{\mathrm{mod}\, n}, \cdot_{\mathrm{mod}\, n})$ je obseg, saj smo prvi dve točki definicije preverili že v Zgledu 33, tretja točka, tj. distributivnost, je prav tako izpolnjena.

Dva najpomembnejša obsega, to sta obseg realnih in kompleksnih števil, bomo natančneje spoznali v naslednjih dveh razdelkih.

1.4 Realna števila

Nekatere številske množice so nam že dobro znane in jih bomo samo na kratko omenili, o določenih pa bomo povedali nekaj več. Naštejmo jih:

(i) V množici *naravnih števil* $\mathbb{N}$ so števila $\{1, 2, 3, \dots\}$. Če naravnim številom dodamo število 0, dobimo množico $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$. Seštevanje in množenje naravnih števil sta binarni operaciji.

(ii) Množico *celih števil* $\mathbb{Z}$ sestavljajo naravna števila, število 0 in nasprotne vrednosti naravnih števil $-1, -2, -3, \dots$ Kot že vemo, je $(\mathbb{Z}, +)$ grupa.

(iii) *Racionalna števila* so števila, ki jih lahko zapišemo v obliki ulomka $\frac{a}{b}$, kjer sta a in b iz $\mathbb{Z}$, ter $b \neq 0$:
$$\frac{1}{2}, \frac{4}{8}, -\frac{35}{99}, \dots$$
Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta enaka, ko je $ad = bc$. Množico racionalnih števil označimo $\mathbb{Q}$. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je obseg.

(iv) V množici racionalnih števil nima vsaka omejena množica natančne spodnje in natančne zgornje meje (o omejenosti in natančnih mejah bomo govorili v razdelku o realnih številih). Če dodamo vsa manjkajoča števila, dobimo množico *realnih števil* $\mathbb{R}$. *Iracionalna števila* so realna števila, ki se ne dajo zapisati v obliki ulomka:
$$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$$
Realna števila so tako pomembna, da jim bomo namenili cel naslednji razdelek.

Med naštetimi množicami velja zveza:
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}\,.$$

Matematična indukcija

Matematična indukcija je način dokazovanja, ko želimo neko lastnost P dokazati za vsa naravna števila n, in sicer to naredimo v dveh korakih:

- dokažemo, da P velja za začetni n, ki je običajno $n = 1$,

- predpostavimo, da lastnost P velja za $1, 2, \dots, n$, in od tod izpeljemo, da lastnost P velja tudi za $n + 1$.

Zgled 41. *1. Dokažimo, da za vsako naravno število n velja* $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Pokazati moramo

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Za $n=1$ dobimo

$$1=\frac{1(1+1)}{2}.$$

Pokažimo indukcijski korak:

$$\begin{aligned}\underbrace{(1+2+\ldots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

2. Pokažimo, da za vsako naravno število n velja $n<2^n$.

Za $n=1$ očitno velja $1<2^1$. Nadalje moramo pokazati

$$n<2^n \Rightarrow n+1<2^{n+1}.$$

$$n+1 \leq n+n \underbrace{<}_{ind.predp.} 2^n+2^n=2\cdot 2^n=2^{n+1}.$$

3. Poišči in dokaži formulo za število diagonal v konveksnem večkotniku.

Z nekaj premisleka ugotovimo, da je število diagonal D_n v konveksnem n-kotniku $D_n=\frac{n(n-3)}{2}$. Z indukcijo dokažimo formulo. Bazo indukcije dobimo za $n=3$. V tem primeru ni diagonal in tudi $D_3=\frac{3(3-3)}{2}=0$. Za indukcijski korak premislimo, da je vsaka diagonala v n-kotniku tudi diagonala v $(n+1)$-kotniku. Nadalje dobimo novih $n-2$ diagonal iz na novo dodanega oglišča. Poleg tega ena stranica n-kotnika postane diagonala v $n+1$ kotniku. Zato velja

$$D_{n+1}=\underbrace{D_n}_{\frac{n(n-3)}{2}}+(n-2)+1=\frac{n(n-3)}{2}+n-1=\frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Obseg realnih števil

Definicija 1.16. *Na množici* $\mathbb{R}$ *definiramo dve binarni operaciji, ki delujeta iz* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

(i) seštevanje $(a, b) \mapsto a + b$*,*

(ii) množenje $(a, b) \mapsto a \cdot b$*.*

Izrek 1.17. *Množica* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *je obseg.*

Dokaz.

(i) $(\mathbb{R}, +)$ je Abelova grupa z enoto 0, nasprotni element od a je število $-a$.

(ii) $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa z enoto 1, kjer je nasprotni element od a enak $\frac{1}{a}$ in ga imenujemo obratni element.

(iii) Prav tako velja distributivnost množenja glede na seštevanje realnih števil:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\,.$$

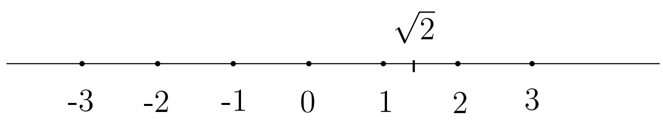
∎

Odštevanje in deljenje nista novi računski operaciji, temveč velja:

$$\begin{aligned} a - b \quad &:= \quad a + (-b) \quad \ldots \quad \text{odštevanje}\,, \\ a : b \quad &:= \quad a \cdot \tfrac{1}{b} \qquad\quad \ldots \quad \text{deljenje}\,. \end{aligned}$$

Znaka za množenje običajno ne pišemo, namesto $a : b$ pa pišemo $\frac{a}{b}$.

Realna števila lahko identificiramo s točkami na premici, ki ji rečemo *realna os*. Na premici izberemo točko, ki ji rečemo izhodišče in je slika števila 0, in točko, ki je slika števila 1. Potem vsakemu realnemu številu ustreza natanko določena točka na premici in obratno, vsaki točki lahko priredimo natanko določeno realno število. Zato običajno identificiramo izraza realno število in točka na realni osi.



Slika 1.5: Realna os.

Množica realnih števil desno od števila 0 je množica *pozitivnih števil*, levo pa množica *negativnih števil*. Med poljubnima dvema številoma na realni osi je neskončno mnogo tako racionalnih kot tudi iracionalnih števil. Zato pravimo, da sta obe množici gosti v $\mathbb{R}$.

Če je $a - b$ nenegativno število, rečemo, da je število a večje od števila b ali število b je manjše od števila a, kar zapišemo $a \geq b$ ali $b \leq a$. Če je $a - b$ pozitivno število, rečemo, da je število a strogo večje od števila b ali število b je strogo manjše od števila a, kar zapišemo $a > b$ ali $b < a$.

Za poljubna realna števila a, b in c veljajo naslednje trditve.

(i) Velja natanko ena od treh možnosti:

$$a < b \quad \text{ali} \quad a = b \quad \text{ali} \quad a > b\,,$$

(ii) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$, (enako velja za $\leq$),

(iii) $a \geq b \wedge b \geq a \Rightarrow a = b$.

Zaradi zgoraj naštetih lastnosti lahko realna števila med seboj primerjamo in uredimo po velikosti. Natančneje to pomeni, da je množica realnih števil linearno urejena množica.

Naštejmo nekaj pomembnejših podmnožic množice $\mathbb{R}$:

(i) odprti interval:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

(ii) zaprti interval:
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

(iii) polodprti interval:
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

(iv) neskončni intervali:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} \quad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\} \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Omejenost množic

Pomemben pojem v zvezi z realnimi podmnožicami je njihova omejenost o kateri lahko govorimo, ker je množica realnih števil linearno urejena množica.

Definicija 1.18. *Naj bo A poljubna podmnožica v $\mathbb{R}$. Množica A je* navzgor omejena*, če obstaja tako realno število M, da je*

$$x \leq M,\ \forall x \in A\,.$$

Število M je zgornja meja *množice A. Množica A je* navzdol omejena*, če obstaja tako realno število m, da je*

$$m \leq x,\ \forall x \in A\,.$$

Število m je spodnja meja *množice A. Množica je* omejena*, ko je navzdol in navzgor omejena.*

Množica lahko ima več spodnjih in/ali zgornjih mej.

Zgled 42. *Naj bo $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Preučimo omejenost množice A.*

Potem je zgornja meja M vsako število večje od 1

$$1 \leq M\,,$$

spodnja meja m pa vsako število manjše od 0

$$m \leq 0\,.$$

Zanimata nas natančni meji.

Definicija 1.19. *Najmanjšo zgornjo mejo M' (navzgor) omejene množice A je* natančna zgornja meja *in jo imenujemo supremum množice A:*

$$M' = \sup A\,.$$

To pomeni, da za M' velja:

(i) M' je zgornja meja množice A ($x \leq M', \forall x \in A$),

(ii) če je M^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $M' \leq M^*$.

Definicija 1.20. *Največjo spodnjo mejo m' (navzdol) omejene množice A je* natančna spodnja meja *in jo imenujemo infimum množice A:*

$$m' = \inf A\,.$$

To pomeni, da za m' velja:

(i) m' je spodnja meja množice A ($m' \leq x, \forall x \in A$),

(ii) če je m^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $m^* \leq m'$.

Opomba: O eksistenci supremuma in infimuma govori *Dedekindov aksiom*. Le-ta pravi, da ima vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica realnih števil natančno spodnjo mejo (ekvivalentno lahko trdimo, da ima vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica realnih števil natančno zgornjo mejo). Ta aksiom razloči med realnimi in racionalnimi števili, kar je prikazano v Zgledu 43.

Zgled 43. *Dana je množica* $A = \{x | x^2 > 2 \wedge x > 0\}$. *Ali obstaja infimum množice* A*?*

V množici racionalnih števil nima natančne spodnje meje, v množici realnih števil pa je natančna spodnja meja (iracionalno) število $\sqrt{2}$.

Zgled 44. *Dana je množica* $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. *Poiščimo njen supremum in infimum.*

Supremum je $M' = 1$ in infimum je $m' = 0$.

Definicija 1.21. *Če supremum* M' *množice* A *obenem pripada množici* A*, ga imenujemo* maksimum *množice* A

$$M' = \max A\,.$$

Če infimum m' *množice* A *obenem pripada množici* A*, ga imenujemo* minimum *množice* A

$$m' = \min A\,.$$

Zgled 45. *Ali ima množica* $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ *maksimum in minimum?*

Supremum $M' = 1$ je tudi maksimum, ker $1 \in A$, infimum $m' = 0$ pa ni minimum, ker $0 \notin A$.

Absolutna vrednost in napake

V nadaljevanju si poglejmo absolutno vrednost realnega števila in uporabo pri računanju z napakami.

Definicija 1.22. Absolutna vrednost *realnega števila* x*,* $|x|$*, je definirana kot*

$$|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0\,, \\ -x & ; \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Zgled 46. 1. *Poiščimo elemente množice* $A = \{x \in \mathbb{R} | |x - 2| < 3\}$.

$$A = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 5\} = (-1, 5)\,.$$

2. *Zapišimo predpis funkcije f brez znakov absolutne vrednosti, če je $f(x) = |4x - 2|$.*

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & ; \quad x \geq \frac{1}{2}\,, \\ \\ -4x + 2 & ; \quad x < \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

3. *Zapišimo predpis funkcije g brez znakov absolutne vrednosti, če je $g(x) = |x^2 - 2x|$.*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & ; \quad x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)\,, \\ \\ -x^2 + 2x & ; \quad 0 < x < 2\,. \end{cases}$$

Naštejmo nekaj lastnosti absolutne vrednosti:

(i) $|ab| = |a||b|\,,$

(ii) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (trikotniška neenakost),

(iii) $||a| - |b|| \leq |a - b|$,

(vi) razdalja med točkama a in b je nenegativno število $|a - b| = |b - a|$.

V zvezi z uporabo absolutne vrednosti si poglejmo obravnavo napak, ki nastanejo pri merjenjih. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ prava vrednost. Zaradi napake instrumenta a nadomestimo z izmerjeno vrednostjo $\widetilde{a} \in \mathbb{R}$, ki je dejansko običajno iz množice $\mathbb{Q}$. Pri tem naredimo *napako* Δ:

$$\Delta = a - \widetilde{a}$$

oziroma *absolutno napako* $|\Delta|$:

$$|\Delta| = |a - \widetilde{a}|\,.$$

Želimo, da je $|\Delta|$ manjša od nekega majhnega pozitivnega števila δ:

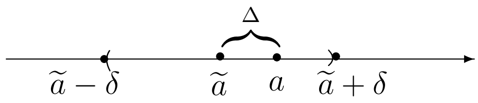
$$|\Delta| < \delta$$

in zato

$$\begin{array}{rcccl} & & |a - \widetilde{a}| & < & \delta \\ \\ -\delta & < & a - \widetilde{a} & < & \delta \\ \\ \widetilde{a} - \delta & < & a & < & \widetilde{a} + \delta\,. \end{array}$$

Pravimo, da smo a aproksimirali z $\widetilde{a}$ z natančnostjo δ, in pišemo

$$a = \widetilde{a} \pm \delta\,.$$



Slika 1.6: Absolutna napaka.

Trditev 1.23. *Naj bosta a in b merjeni količini s katerima katerih računamo c, in naj bodo δ_a, δ_b, δ_c ustrezne napake ($a = \widetilde{a} \pm \delta_a$, $b = \widetilde{b} \pm \delta_b$, $c = \widetilde{c} \pm \delta_c$). Tedaj velja:*

(i) $c = a + b \Rightarrow \delta_c = \delta_a + \delta_b$,

(ii) $c = a - b \Rightarrow \delta_c = \delta_a + \delta_b$,

(iii) $c = ab \Rightarrow \delta_c = |\widetilde{a}|\delta_b + |\widetilde{b}|\delta_a + \delta_a\delta_b$,

(iv) $c = \frac{a}{b} \Rightarrow \delta_c = \dfrac{|\widetilde{a}|\delta_b + |\widetilde{b}|\delta_a}{||\widetilde{b}| - \delta_b||\widetilde{b}|}$.

Dokaz.

(i) Izpeljava točke (i) je analogna izpeljavi za (ii), zato bomo izpeljali samo slednjo.

(ii)

$$\begin{aligned} |\Delta_c| &= |c - \widetilde{c}| = |(a-b) - (\widetilde{a} - \widetilde{b})| = |(a - \widetilde{a}) + (\widetilde{b} - b)| \\ &\leq |a - \widetilde{a}| + |\widetilde{b} - b| = |\Delta_a| + |\Delta_b| \leq \delta_a + \delta_b \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} |\Delta_c| &= |c - \widetilde{c}| = |ab - \widetilde{a}\widetilde{b}| = |ab - \widetilde{a}\widetilde{b} + \widetilde{a}b - \widetilde{a}b| \\ &= |b(a - \widetilde{a}) + \widetilde{a}(b - \widetilde{b})| \leq |b(a - \widetilde{a})| + |\widetilde{a}(b - \widetilde{b})| \\ &< |b|\delta_a + |\widetilde{a}|\delta_b\,. \end{aligned}$$

Ocenimo napako za $|b|$:

$$|b| = |b - \widetilde{b} + \widetilde{b}| \leq |b - \widetilde{b}| + |\widetilde{b}| < \delta_b + |\widetilde{b}|\,.$$

Torej je

$$\begin{aligned} |\Delta_c| &< |b|\delta_a + |\widetilde{a}|\delta_b < (\delta_b + |\widetilde{b}|)\delta_a + |\widetilde{a}|\delta_b \\ &= |\widetilde{a}|\delta_b + |\widetilde{b}|\delta_a + \delta_a\delta_b\,. \end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}
|\Delta_c| &= |c-\widetilde{c}| = |\tfrac{a}{b} - \tfrac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}}| = |ab^{-1} - \widetilde{a}(\widetilde{b})^{-1}| \\
&= |ab^{-1} - \widetilde{a}(\widetilde{b})^{-1} + \widetilde{a}b^{-1} - \widetilde{a}b^{-1}| \\
&= |b^{-1}(a-\widetilde{a}) + \widetilde{a}(b^{-1} - (\widetilde{b})^{-1})| \\
&\leq \left|\frac{a-\widetilde{a}}{b}\right| + \left|\widetilde{a}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\widetilde{b}}\right)\right| \\
&= \frac{|a-\widetilde{a}|}{|b|} + \frac{|\widetilde{a}||\widetilde{b}-b|}{|b||\widetilde{b}|} \\
&< \frac{\delta_a}{|b|} + \frac{|\widetilde{a}|\delta_b}{|b||\widetilde{b}|} \\
&= \frac{\delta_a|\widetilde{b}| + \delta_b|\widetilde{a}|}{|b||\widetilde{b}|}\,.
\end{aligned}$$

Premislimo, da velja ocena

$$|b| \geq ||\widetilde{b}| - \delta_b|\,,$$

iz katere sledi

$$\frac{1}{|b|} \leq \frac{1}{||\widetilde{b}| - \delta_b|}\,.$$

Tako je

$$|\Delta_c| < \frac{\delta_a|\widetilde{b}| + \delta_b|\widetilde{a}|}{|b||\widetilde{b}|} \leq \frac{\delta_a|\widetilde{b}| + \delta_b|\widetilde{a}|}{||\widetilde{b}| - \delta_b||\widetilde{b}|}\,.$$

∎

Zgled 47. *Poišči* $c = \frac{x+y}{z^2}$, *če je*

$$\begin{aligned}
x &= -1,45 \pm 0,02 \\
y &= 2,25 \pm 0,07 \\
z &= 1,19 \pm 0,14\,.
\end{aligned}$$

Računaj na 4 decimalna mesta natančno.

Izračunajmo najprej

$$c = \frac{x+y}{z^2} = \frac{-1,45 + 2,25}{1,19^2} = 0,5650\,.$$

Po korakih izračunamo napako:

$$\begin{aligned}\delta_{x+y} &= 0,02+0,07=0,09\\ \delta_{z^2} &= 2|1,19|^2 0,14+0,14^2=0,3528\\ \delta_{\frac{x+y}{z^2}} &= 0,2721\,.\end{aligned}$$

Tako je $c = 0,5650 \pm 0,2721$.

Potenciranje in korenjenje

Ker potenciranje in korenjenje realnih števil včasih povzroča težave, ponovimo osnovne pojme v zvezi s tema računskima operacijama.

Produkt realnega števila a s samim seboj (n-krat) zapišemo s potenco

$$\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n} = a^n,\ n\in\mathbb{N}\,.$$

Število a imenujemo osnova, n eksponent, a^n pa je potenca.

Za računanje s potencami veljajo naslednja pravila:

(1) $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n\,,$

(2) $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n,\ b\neq 0\,,$

(3) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}\,,$

(4) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ a\neq 0\,, n>m\,,$

(5) $(a^n)^m = a^{n\cdot m}\,.$

Dokažemo jih z matematično indukcijo (razen (4), za $n \leq m$). Pokažimo na primeru (2):

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b\neq 0\,,$$

$$n=1: \qquad \frac{a^1}{b^1} = \left(\frac{a}{b}\right)^1$$

$$n\to n+1: \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)}_{n}\left(\frac{a}{b}\right) =$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^n}{b^n}\frac{a}{b} = \frac{a^n\cdot a}{b^n\cdot b} = \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}}$$

Če postavimo

$$a^0 = 1 \quad \text{in} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

velja (4) za poljubna n in m.

Če rečemo, da je potenca vsak izraz, ki zadošča zvezam od (1) do (5), potemtakem je lahko v potenci eksponent katerokoli celo število. Dejansko veljajo vsa pravila tudi v primeru, ko je eksponent realno število, a tega ne bomo dokazovali. V potenci naj bosta torej osnova poljubno pozitivno, eksponent pa poljubno realno število.

Definicija 1.24. *Naj bo* $a \geq 0$. Koren

$$\sqrt[n]{a}$$

je tisto število b*, za katerega velja*

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a\,.$$

Število a *se imenuje* radikand *in* n *je* korenski eksponent.

Uporabljamo naslednji zapis:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\,.$$

Tedaj je

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m\,.$$

Pravila za korenjenje izpeljemo iz pravil za računanje s potencami in so naslednja:

(1') $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

(2') $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Pokažemo podobno kot ($1'$).

(3') $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} &= (\sqrt[n]{a})^{\frac{m}{m}} \cdot (\sqrt[m]{a})^{\frac{n}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{m}{m}} \cdot (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{n}{n}} \\ &= a^{\frac{m}{n \cdot m}} \cdot a^{\frac{n}{n \cdot m}} = a^{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}\end{aligned}$$

(4') $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$
Pokažemo podobno kot ($3'$).

(5') $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (\sqrt[n]{a})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

1.5 Kompleksna števila

Obseg kompleksnih števil

Ker nekatere enačbe nimajo rešitve v množici realnih števil, kot na primer

$$x^2 + 4 = 0\,,$$

se pojavi potreba po vpeljavi nove številske množice.

Definicija 1.25. *Na množici* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *definiramo dve binarni operaciji, ki delujeta iz* $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*:*

(i) seštevanje $((a, b), (c, d)) \mapsto (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

(ii) množenje $((a, b), (c, d)) \mapsto (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Izrek 1.26. *Množica* $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ *je obseg.*

Dokaz.

(i) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ je Abelova grupa z enoto $(0, 0)$, nasprotni element od (a, b) je $(-a, -b)$, kar ni težko preveriti.

(ii) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}, \cdot)$ je Abelova grupa. Pokažimo, da je enota za množenje $(1, 0)$:

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (x, y) &= (a, b) \\ (ax - by, ay + by) &= (a, b)\,. \end{aligned}$$

Rešitev dobljenega sistema enačb je $x = 1$ in $y = 0$. Poiščimo še obratni element:

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot (x, y) &= (1, 0) \\ (ax - by, ay + by) &= (1, 0)\,. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $x = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ in $y = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

(iii) Preverimo distributivnost:

$$(a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)\,.$$

Leva stran enakosti:

$$\begin{aligned} &(a, b) \cdot (c + e, d + f) = \\ &(a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) = \\ &(ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be)\,. \end{aligned}$$

Desna stran enakosti:

$$\begin{aligned}&(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)=\\&(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)=\\&(ac-bd+ae-bf,a\ d+bc+af+be)\,.\end{aligned}$$

∎

Množica $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ je številski obseg, ki ga imenujemo *obseg kompleksnih števil*, in ga označujemo s $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{C}\,.$$

Odštevanje in deljenje v množici kompleksnih števil nista novi računski operaciji, temveč velja podobno kot v $\mathbb{R}$:

$$(a,b)-(c,d):=(a,b)+(-c,-d)\qquad\ldots\ \text{odštevanje}\,,$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=(a,b)\cdot(\frac{c}{c^2+d^2},-\frac{d}{c^2+d^2})\quad\ldots\ \text{deljenje}\,.$$

Kompleksno število $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ ima *realni del* a in *imaginarni del* b, kar zapišemo

$$\mathcal{R}e(z)=a,\ \mathcal{I}m(z)=b\,.$$

Poglejmo seštevanje in množenje kompleksnih števil z imaginarnim delom 0:

$$\begin{aligned}(a,0)+(b,0)&=(a+b,0+0)=(a+b,0)\,,\\(a,0)\cdot(b,0)&=(a\,b-0\cdot0,a\,0+b\,0)=(a\,b,0)\,.\end{aligned}$$

Opazimo, da sta v obeh primerih rezultata kompleksni števili z imaginarnim delom enakim 0, realna dela pa se obnašata kot realni števili, zato lahko privzamemo:

$$(a,0):=a\,,$$

oziroma vsa realna števila so tudi kompleksna števila.

Naj bo $i:=(0,1)$ kompleksno število, ki ga imenujemo *imaginarna enota*. Tedaj je

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1\,.$$

Izračunajmo še

$$b\,i=(b,0)\cdot(0,1)=(0,b)\,.$$

Zato lahko (a, b) zapišemo kot

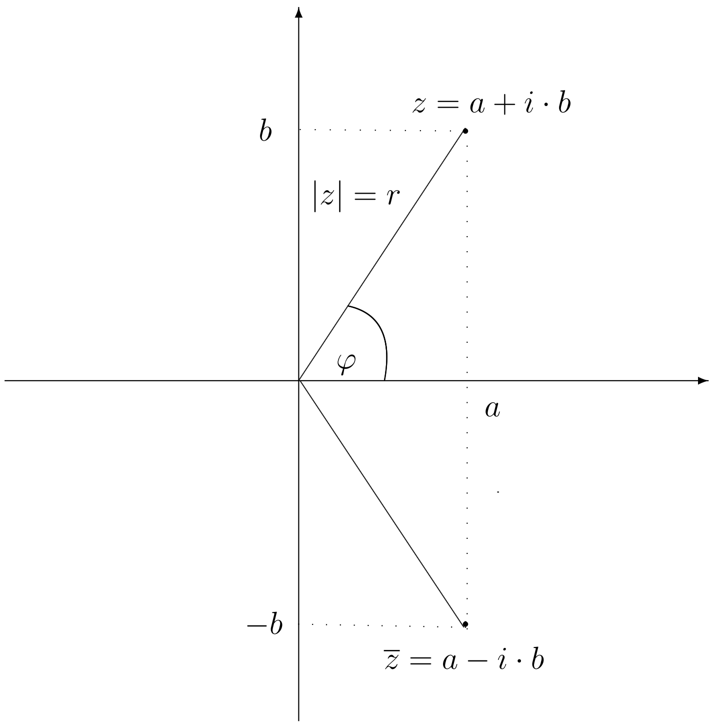
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b\,i\,.$$

Namesto urejenega para (a, b) je bolj običajen zapis kompleksnega števila kot vsota realnega dela in produkta imaginarnega dela z imaginarno enoto:

$$(a, b) = a + i\,b\,,$$

ki ga bomo uporabljali v nadaljevanju.

Kompleksno število $z = a + ib = (a, b)$ lahko predstavimo v kompleksni ravnini, kjer realni del nanašamo na horizontalno os (absciso), imaginarni pa na vertikalno os (ordinato), kot to vidimo na Sliki 1.7.



Slika 1.7: Kompleksna ravnina.

Konjugirano število števila z je kompleksno število

$$\overline{z} = a - ib\,.$$

Izračunajmo njun produkt:
$$z\overline{z} = a^2 + b^2\,.$$

Absolutna vrednost števila $z = a + ib$, $|z|$, je nenegativno realno število
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Izračunajmo še
$$z + \overline{z} = 2a \quad \text{in} \quad z - \overline{z} = 2ib\,,$$
kar pomeni, da je
$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{in} \quad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}\,.$$

Konjugirano kompleksno število nam pomaga pri deljenju kompleksnih števil. V ta namen najprej poglejmo, kako hitro izračunamo obratno vrednost kompleksnega števila z:
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}\,.$$
Kvocient dveh kompleksnih števil w in z je tako:
$$\frac{w}{z} = w\frac{1}{z} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Zgled 48. *Poiščimo kvocient kompleksnih števil $w = 2 - 3i$ in $z = 1 + 4i$.*
$$\frac{w}{z} = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \frac{-10 - 11i}{1 - (4i)^2} = -\frac{10}{17} - \frac{11}{17}i\,.$$

Polarni zapis

Poglejmo si še *polarni zapis* kompleksnega števila. V tem primeru kompleksno število $z = a + i\,b$ opišemo s kotom φ in polmerom r. Kot φ je kot med pozitivnim delom abscise in poltrakom, na katerem leži točka (a, b), polmer r je oddaljenost točke (a, b) od koordinatnega izhodišča. Kot φ imenujemo *argument* števila z in pišemo
$$\varphi = Arg(z)\,.$$
Vsi koti $\varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, so prav tako argumenti števila z in pišemo
$$\varphi + 2k\pi = arg(z),\ k \in \mathbb{Z} - \{0\}\,.$$

Opazimo, da velja
$$r = |z| \quad \text{in} \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,.$$

Polmer in argument natanko določata kompleksno število:

$$z = a + i\,b = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

Polarni zapis za konjugirano število od z pa je oblike

$$\overline{z} = a - ib = r\cos\varphi - ir\sin\varphi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,.$$

V razdelku o realnih funkcijah bomo spoznali pojem sode in lihe funkcije. Videli bomo, da velja $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ in $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$. Tako je

$$\overline{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\,.$$

Zato velja, če je $Arg(z) = \varphi$, tedaj je $Arg(\overline{z}) = -\varphi$.

Računanje v množici kompleksnih številih s pomočjo polarnega zapisa je ugodno za množenje in deljenje kompleksnih števil.

(i) *Množenje*

Trditev 1.27. *Naj bo* $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ *in* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. *Tedaj je*

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

Opomba. Pri dokazu smo uporabili adicijska izreka, ki jih lahko najdemo v [2], več o njih pa bomo izvedeli v razdelku o trigonometričnih funkcijah.

∎

Trditev lahko posplošimo na produkt več kompleksnih števil.

Izrek 1.28. *(Moivreova formula)*

Naj bo $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Tedaj je*

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n))\,.$$

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n. Za $n = 2$ smo pokazali v Trditvi 1.27, indukcijski korak je sledeč:

$$
\begin{aligned}
&(z_1 \cdots z_{n-1})z_n = \\
&= r_1 \cdots r_{n-1}(\cos\underbrace{(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1})}_{\alpha} + i\sin\underbrace{(\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-1})}_{\alpha})r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) \\
&= r_1 r_2 \cdots r_n(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) \\
&= r_1 r_2 \cdots r_n(\cos\alpha\cos\varphi_n - \sin\alpha\sin\varphi_n + i(\sin\alpha\cos\varphi_n + \cos\alpha\sin\varphi_n)) \\
&= r_1 r_2 \cdots r_n(\cos(\alpha + \varphi_n) + i\sin(\alpha + \varphi_n)) \\
&= r_1 r_2 \cdots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)) \,.
\end{aligned}
$$

∎

(ii) *Potenciranje*

Potenciranje sledi neposredno iz Moivreove formule, v kateri upoštevamo, da so vsi faktorji med seboj enaki.

Posledica 1.29. *Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Tedaj je*

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right),\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Zgled 49. *Naj bo $z = 1 + i$. Izračunajmo z^{50}.*

Izračunati moramo polmer r in argument φ:

$$r = \sqrt{2},\ \tan\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}\ (\text{I. kvadrant})\,.$$

$$
\begin{aligned}
z^{50} &= (\sqrt{2})^{50}(\cos(50\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(50\tfrac{\pi}{4})) \\
&= 2^{25}(\cos(\tfrac{\pi}{2} + 12\pi) + i\sin(\tfrac{\pi}{2} + 12\pi)) \\
&= 2^{25}(0 + i) \\
&= i\,2^{25}\,.
\end{aligned}
$$

(iii) *Deljenje*

Trditev 1.30. *Obratna vrednost kompleksnega števila $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ je enaka*

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi)\,.$$

Dokaz. Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Tedaj je obratna vrednost kompleksnega števila z:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r}\,.$$

∎

Trditev 1.31. *Naj bosta $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ kompleksni števili. Tedaj je njun kvocient enak*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\,.$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= z_1\, z_2^{-1} = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\frac{1}{r_2}(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)) \\
&= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2))\,.
\end{aligned}$$

∎

(iv) *Korenjenje*

Zanima nas $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Spomnimo se, da je to ekvivalentno reševanju enačbe

$$u^n = z\,.$$

Naj bo podano kompleksno število z v polarnem zapisu:

$$z = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),\ r \in \mathbb{R}_0^+,\ \varphi_0 \in [0, 2\pi)\,.$$

Nadalje, naj bo

$$u = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

in izračunajmo

$$\begin{aligned}
u^n &= \left(\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)^n \\
&= r_0\left(\cos\left(\varphi_0 + 2k\pi\right) + i\sin\left(\varphi_0 + 2k\pi\right)\right) \\
&= r_0\left(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0\right) \\
&= z\,.
\end{aligned}$$

Rešitve enačbe $\sqrt[n]{z} = u$, kjer je $z = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, so torej oblike

$$u_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right),\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

V bistvu je dovolj, da k preteče vrednosti od 0 do $n-1$ (ali 1 do n), kar sledi iz lastnosti funkcij sinus in kosinus, ki ju bomo obravnavali v naslednjem poglavju.

Zgled 50. *Poiščimo rešitve enačbe $u^3 = 1$.*

Število 1 zapišemo v polarnem zapisu $1 = 1(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi))$ in ga ustrezno korenimo

$$\begin{aligned} u^3 = 1 \ \Leftrightarrow\ u &= \sqrt[3]{1} \\ &= \sqrt[3]{(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)} \\ &= \sqrt[3]{1}((\cos(\tfrac{2k\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2k\pi}{3}))\,,\ k = 0, 1, 2\,. \end{aligned}$$

Rešitve so

$$u_1 = 1,\ u_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ u_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Opomba. Opazimo, da so rešitve enačbe $z^n = a$ oglišča pravilnega n-kotnika.

1.6 Naloge z rešitvami

1.6.1 Logika in množice

1. Koliko elementov imajo naslednje množice:

   (a) $\emptyset$,

   (b) $\{a, e, j, k\}$,

   (c) $\{a, e, j, k, \emptyset\}$,

   (d) $\{\{1, 2\}, \{a, b\}, \{1, a\}\}$,

   (e) $\{1, 4, 7, \ldots, 5998\}$.

   Rešitev.

   (a) 0,

   (b) 4,

   (c) 5,

   (d) 3,

   (e) 2000.

2. Za naslednje izjave preveri resničnost:

   (a) $x \in \{\{x\}, \emptyset\}$,

   (b) $\{x\} \in \{\{x\}, \{\{x\}\}\}$,

   (c) $x \in \{\{x\}, \{\{x\}\}\}$,

   (d) $\emptyset = \{\emptyset\}$,

   (e) $\{x\} \subset \{\{x\}, x\}$,

   (f) $\{\{x\}, \emptyset\} \supseteq \{\{x\}\}$.

   Rešitev.

   (a) Izjava ni resnična, saj x ne nastopa kot element množice.

   (b) Izjava je resnična, saj $\{x\}$ nastopa kot element množice.

   (c) Izjava ni resnična, saj v množici nastopata elementa $\{x\}$ in $\{\{x\}\}$, ki pa nista enaka elementu x.

   (d) Izjava ni resnična, saj $\emptyset$ nima elementov, množica $\{\emptyset\}$ pa ima element $\emptyset$.

   (e) Izjava je resnična, saj je edini element leve množice x, ta pa je vsebovan tudi v desni množici.

   (f) Izjava je resnična, saj je edini element desne množice $\{x\}$, ta pa je vsebovan tudi v levi množici.

3. Dane so množice

$$\begin{aligned} A &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ B &= \{1,3,5,7,9,11,13,15\}, \\ C &= \{1,4,7,10,13,16,19,22\}. \end{aligned}$$

Poišči $A \cup B$, $C \cap B$, $A - B$, $B - (A \cap C)$.

Rešitev. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,13,15\}$, $C \cap B = \{1,7,13\}$, $A - B = \{2,4,6,8\}$, $B - (A \cap C) = \{3,5,9,11,13,15\}$.

4. Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, -5 < x \leq 5\}$$

in

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \leq x \wedge x < 3\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ in $A \times B$.

Rešitev. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = [-1,3)$, $A \cup B = [-1,3] \cup \{4,5\}$, $A \cap B = \{1,2\}$, $A \times B = \{(a,b) \mid a \in \{1,2,3,4,5\},\ b \in [-1,3)\}$.

5. Dani sta množici

$$A = \{3n \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 6\}$$

in

$$B = \{2n+3 \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge n < 8\}.$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

Rešitev. $A = \{3,6,9,12,15,18\}$, $B = \{5,7,9,11,13,15,17\}$, $A \cup B = \{3,5,6,7,9,11,12,13,15,17,18\}$, $A \cap B = \{9,15\}$, $A - B = \{3,6,12,18\}$.

6. Dane so množice

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, -3 \leq x \leq 4\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 1 < 4\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 4x + 4 < 0\}, \\ D &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + 4x + 4 = 0\}. \end{aligned}$$

Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup (B \cap C)$, $B - A$, $C - B$, $A \times D$ ter preveri $D \subseteq B$.

Rešitev. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = (-\infty,5)$, $C = \emptyset$, $D = \{-2\}$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \cup (B \cap C) = A$, $B - A = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup (4,5)$, $C - B = \emptyset$, $A \times D = \{(1,-2),(2,-2),(3,-2),(4,-2)\}$. *Število* -2 *je element intervala* $(\infty,5)$.

7. Določi kartezični produkt množic A in B, kjer sta

   (a) $A = \{a, b\}$ in $B = \{1, 2, 3\}$,

   (b) $A = [1, 2)$ in $B = [-1, 3)$,

   (c) $A = \mathbb{N}$ in $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x < 3\}$.

   Pomagaj si s sliko.

   Rešitev. Upoštevamo definicijo kartezičnega produkta in dobimo

   (a) $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$,

   (b) $A \times B = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}, 1 \leq a < 2, -1 \leq b < 3\}$ *(slika),*

   (c) $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{R}, -2 \leq b < 3\}$ *(slika).*

8. Dani sta množici

$$A = (-3, 2] \quad \text{in} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2x - 3 < 5\}.$$

   Z naštevanjem elementov ali z intervali zapiši množice $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $A \times B$.

   Rešitev. $B = (-\infty, 4)$, $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A - B = \emptyset$, $B - A = (-\infty, -3] \cup (2, 4)$, $A \times B = \{(a, b) \,|\, a, b \in \mathbb{R}, -3 < a \leq 2, b < 4\}$.

9. Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2x^2 + 3x + 5 \geq 0\}$$

   in

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 = 0\}.$$

   Ali je $B \subseteq A$?

   Rešitev. Pri obeh množicah je potrebno rešiti kvadratno enačbo. Ničle kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$, *kjer sta* $a, b \in \mathbb{R}$, *dobimo dobimo po formuli* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. *V našem primeru dobimo* $x_1 = \frac{5}{2}$ *in* $x_2 = -1$. *Tako se za množico* A *omejimo, da iščemo tiste* $x \in \mathbb{R}$, *za katera velja* $-2(x + 1)\left(x - \frac{5}{2}\right) \geq 0$. *Slednje velja za* $x \in \left[-1, \frac{5}{2}\right]$. *Za množico* B, *rešujemo enačbo* $x^2 = 1$. *Rešitvi te enačbe sta* $x_1 = 1$ *in* $x_2 = -1$. *Na podlagi teh dveh rezultatov je* $B \subseteq A$.

10. Poišči potenčno množico naslednjih množic

    (a) $A = \{0, 1\}$,

    (b) $B = \{1, 2, a\}$,

    (c) $C = \{1, 2, \{a, b\}\}$.

Rešitev. Potenčna množica poljubne množice X je množica vseh podmnožic množice X. Običajno jo označujemo s $\mathcal{P}(X)$.

(a) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, A\}$,

(b) $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,a\}, \{2,a\}, B\}$,

(c) $\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{a,b\}\}, \{1,2\}, \{1,\{a,b\}\}, \{2,\{a,b\}\}, C\}$.

11. Dani sta množici $A = \{1,2,3\}$ in $B = \{2,3,4\}$. Poišči $A^C, (A \cup B)^C$ in $(A \cap B)^C$, če je univerzalna množica

    (a) $\mathcal{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

    (b) $\mathcal{V} = \mathbb{N}$,

    (c) $\mathcal{W} = \mathbb{R}$.

Rešitev. Upoštevamo definicijo komplementa glede na različne univerzalne množice.

(a) $A^C = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $(A \cup B)^C = \{5,6,7,8,9,10\}$, $(A \cap B)^C = \{1,4,5,6,7,8,9,10\}$.

(b) $A^C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 4\}$, $(A \cup B)^C = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 5\}$, $(A \cap B)^C = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq 4\}$.

(c) $A^C = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$, $(A \cup B)^C = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup (3,4) \cup (4,\infty)$, $(A \cap B)^C = (-\infty,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$.

1.6.2 Preslikave

1. Kateri od naslednjih predpisov je preslikava:

    (a) $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $f = \{(1,4),(2,4),(3,1),(4,2)\}$,

    (b) $g : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $g = \{(1,4),(2,1),(2,3),(3,2),(4,4)\}$,

    (c) $h : \{1,2,3,4,5,6\} \to \{1,2,3,4\}$, $h = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$,

    (d) $k : \{1,2,3,4\} \to \mathbb{N}$, $k = \{(1,5),(2,6),(3,1),(3,4),(4,4),(4,6)\}$.

Rešitev.

(a) f je preslikava.

(b) g ni preslikava, saj številu 2 priredi dva elementa (1 in 3).

(c) h je preslikava.

(d) k ni preslikava, saj številu 3 priredi dva elementa (1 in 4) in številu 4 priredi dva elementa (4 in 6).

2. Kateri od naslednjih predpisov je injektivna oziroma surjektivna preslikava:

(a) $f : \{1,2,3,4\} \to \{-2,-1,1,2\}$, $f = \{(1,1),(2,-1),(3,2),(4,-2)\}$,

(b) $g : \{1,2,3,4\} \to \{-2,-1,1,2\}$, $g = \{(1,-1),(2,-2),(3,-1),(4,2)\}$,

(c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$, $h(x) = |x|$,

(d) $k : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $k(n) = \frac{1}{n}$,

(e) $o : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $o(x) = \sqrt[3]{x^2}$,

(f) $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}_0$, $p(x) = [x]$ (p predstavlja celi del od x; npr. $[\pi] = 3$ in $[-e] = -3$),

(g) $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = \sqrt[3]{x^5}$,

(h) $s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $s(x) = e^{x^2-1}$.

Rešitev.

(a) f je injektivna in surjektivna (preveri vse elemente).

(b) g ni injektivna (v -1 se slikata 1 in 3) in ni surjektivna (v 1 se nič ne slika).

(c) h ni injektivna (v 1 se slikata 1 in -1), je pa surjektivna (vzamemo kar pozitiven x: $x = |x|$).

(d) k je injektivna ($\frac{1}{n} \neq \frac{1}{m}$, če $m \neq n$) in ni surjektivna (npr. v 0 se nič ne slika).

(e) o ni injektivna (npr. $o(1) = 1 = o(-1)$) in ni surjektivna (npr. v -1 se nič ne slika).

(f) p ni injektivna (npr. $[\frac{3}{2}] = [1] = 1$), je pa surjektivna (za $n \in \mathbb{N}$ je $[n] = n$, za 0 pa $[\frac{1}{2}] = 0$).

(g) r je injektivna ($\sqrt[3]{x_1^5} \neq \sqrt[3]{x_2^5}$, če $x_1 \neq x_2$) in je surjektivna (če je $r(x) = y$, $x = \sqrt[5]{y^3}$).

(h) s je injektivna (($e^{x_1^2-1} \neq e^{x_2^2-1}$, če $x_1 \neq x_2$)) in ni surjektivna (npr. v e^{-2} se nič ne slika).

3. Kateri od naslednjih predpisov je bijektivna preslikava:

(a) $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$, $f = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$,

(b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 3n^3$,

(c) $h : \mathbb{R}^+ \to (1,\infty)$, $h(x) = \sqrt{x+1}$,

(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $k(x) = 4x^4$.

Rešitev.

(a) Je bijektivna (preveri, da je injektivna in surjektivna).

(b) Ni bijektivna, ker ni surjektivna (npr. 1 nima originala).

(c) Je bijektivna (injektivnost: $\sqrt{x_1+1} \neq \sqrt{x_2+1}$, če je $x_1 \neq x_2$; surjektivnost: če je $h(x) = y$, $x = y^2 - 1$).

(d) Ni bijektivna, ker ni injektivna (npr. $k(-1) = 4 = k(1)$).

4. Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je podana s predpisom:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; \quad n \text{ je sod} \\ 3n+1 & ; \quad n \text{ je lih.} \end{cases}$$

Ali je preslikava f injektivna oziroma surjektivna?

Rešitev. Preslikava f ni injektivna (glej kam se slikata števili 1 in 8), je pa surjektivna, saj že za vsako število m obstaja $2m$, ki se preslika v m s prvim predpisom.

5. Naj $\mathbb{Z}_7$ predstavlja množico ostankov pri deljenju s številom 7 in $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Če je mogoče, konstruiraj preslikavo iz $\mathbb{Z}_7 \to A$, ki je:

(a) injektivna,

(b) surjektivna,

(c) bijektivna.

Rešitev.

(a) Da, npr. $f = \{(0, a), (1, b), (2, c), (3, d), (4, e), (5, f), (6, g)\}$.

(b) Ne, ker je $|A| = 8$ in $|\mathbb{Z}_7| = 7$.

(c) Ne, glej (b).

6. Izračunaj obratne preslikave, če obstajajo

(a) $f : \{2, 3, 4, 6\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \{(2, 1), (3, 1), (4, 2), (6, 3)\}$,

(b) $g : \{2, 3, 4, 6\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $g = \{(2, 1), (3, 4), (4, 2), (6, 3)\}$,

(c) $h : \{2, 3, 4, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $h = \{(2, 1), (3, 4), (4, 2), (6, 5)\}$,

(d) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{x}{2} - 1$,

(e) $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $o(x) = x^2 - 6x + 8$,

(f) $p : (-\infty, 3] \to [-1, \infty)$, $p(x) = x^2 - 6x + 8$,

(g) $r : [3, \infty) \to [-1, \infty)$, $r(x) = x^2 - 6x + 8$,

(h) $s : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $s(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Rešitev.

(a) f^{-1} ne obstaja, ker ni injektivna.

(b) $g^{-1} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 3)\}$.

(c) *h^{-1} ne obstaja, ker ni surjektivna.*

(d) $k^{-1}(x) = 2x + 2$.

(e) *o^{-1} ne obstaja, ker ni niti injektivna niti surjetkivna.*

(f) *Izpeljimo p^{-1} na naslednji način*

$$\begin{aligned} y^2 - 6y + 8 &= x \\ (y-3)^2 - 9 &= x - 8 \\ (y-3)^2 &= x + 1 \\ y - 3 &= \pm\sqrt{x+1} \\ y &= 3 \pm \sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

Upoštevamo, da $p : (-\infty, 3] \to [-1, \infty)$ in dobimo $p^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x+1}$.

(g) *r^{-1} izpeljemo podobno kot p^{-1}. Upoštevati je le potrebno, da $r : [3, \infty) \to [-1, \infty)$ in zato dobimo $r^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x+1}$.*

(h) *Izpeljimo s^{-1} na naslednji način*

$$\begin{aligned} \frac{y+1}{y-1} &= x \\ y + 1 &= x(y-1) \\ y - xy &= -x - 1 \\ y &= \frac{-x-1}{1-x} \\ y &= \frac{x+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Dobimo, da je $s^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

7. Dana je funkcija $f : X \to Y$, $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Določi takšni množici $X, Y \subset \mathbb{R}$, da bo f bijekcija in nato izračunaj f^{-1}.

Rešitev. Izračunajmo najprej f^{-1}

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{y-2} &= x \\ y - 1 &= x(y-2) \\ y - xy &= 1 - 2x \\ y &= \frac{2x-1}{x-1}. \end{aligned}$$

S pomočjo tega dobimo $X = \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $Y = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ in $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

8. Dani sta množici $X = [1, \infty)$ in $Y = (0, 2]$. Ali obstaja bijektivna preslikava f, ki slika X v Y?

Rešitev. Da, obstaja. Preveri, da je to $f(x) = \frac{2}{x}$.

9. Izračunaj kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$, če je

   (a) $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d,e\}$, $f = \{(1,c),(2,d),(3,a),(4,e),(5,b)\}$, $g : \{a,b,c,d,e\} \to \{1,2,3,4,5\}$ $g = \{(a,1),(b,3),(c,2),(d,5),(e,4)\}$,

   (b) $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d,e\}$, $f = \{(1,d),(2,a),(3,c),(4,b)\}$, $g : \{a,b,c,d,e\} \to \{1,2,3,4\}$ $g = \{(a,1),(b,2),(c,3),(d,4)\}$,

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$,

   (d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-1$, $g : \mathbb{R} \to [1,\infty)$, $g(x) = x^2+1$.

   Ali obstajajo inverzi kompozitumov?

   Rešitev.

   (a) $f \circ g : \{a,b,c,d,e\} \to \{a,b,c,d,e\}$, $f \circ g = \{(a,c),(b,a),(c,d),(d,b),(e,e)\}$, $g \circ f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$, $g \circ f = \{(1,2),(2,5),(3,1),(4,4),(5,3)\}$, *inverza obstajata* $(f \circ g)^{-1} = \{(a,b),(b,d),(c,a),(d,c),(e,e)\}$, $(g \circ f)^{-1} = \{(1,3),(2,1),(3,5),(4,4),(5,2)\}$.

   (b) $f \circ g : \{a,b,c,d,e\} \to \{a,b,c,d,e\}$, $f \circ g = \{(a,d),(b,a),(c,c),(d,b)\}$, $g \circ f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$, $g \circ f = \{(1,4),(2,1),(3,3),(4,2)\}$, $(f \circ g)^{-1}$ *ne obstaja,* $(g \circ f)^{-1}$ *pa obstaja,* $(g \circ f)^{-1} = \{(4,1),(1,2),(3,3),(2,4)\}$.

   (c) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^3+1$, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = (x+1)^3$, $(f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$.

   (d) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = 2(x^2+1)-1$, $g \circ f : \mathbb{R} \to [1,\infty)$, $(g \circ f)(x) = (2x-1)^2+1$, *inverza kompozitumov ne obstajata.*

10. Ali sta si preslikavi f, $f : [0,\infty) \to [-1,\infty)$, $f(x) = x^2-1$, in g, $g : [-1,\infty) \to [0,\infty)$, $g(x) = \sqrt{x+1}$, inverzni?

    Rešitev. Da, saj

    $$f \circ g : [-1,\infty) \to [-1,\infty),\ (f \circ g)(x) = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x,$$

    in

    $$g \circ f : [0,\infty) \to [0,\infty),\ (g \circ f)(x) = \sqrt{(x^2-1)+1} = |x| = x.$$

1.6.3 Nekatere algebrske strukture

1. Naj bo

   $$G = \left\{ \frac{2}{1+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

   Ali je množenje notranja operacija na množici G?

Rešitev. Naj bosta $\frac{2}{1+n}, \frac{2}{1+m} \in G$ *poljubna. Potem je*

$$\frac{2}{1+n} \cdot \frac{2}{1+m} = \frac{4}{1+m+n+mn}$$

in ker v števcu nastopa 4 *in ne* 2, *množenje ni notranja operacija na* G.

2. Ali je množica naravnih števil grupa za običajno seštevanje števil? Kaj pa za množenje?

   Rešitev. Množica naravnih števil nima enote za seštevanje ($0 \notin \mathbb{N}$)*, pri množenju pa nimamo inverznih elementov (za vsak* $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \notin \mathbb{N}$).

3. Ali je

$$G = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

   Abelova grupa za običajno operacijo množenja? Utemelji!

   Rešitev. Preverimo naslednjih pet lastnosti iz definicije:

   (a) Množenje je komutativna operacija v G.
   Velja, ker je seštevanje komutativna operacija na $\mathbb{Z}$.

   (b) Množenje je notranja operacija v G.
   Naj bosta $\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n} \in G$ *poljubna. Potem je*

$$\frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m+n}} \in G,$$

   saj je $m+n \in \mathbb{Z}$.

   (c) Množenje je asociativna operacija v G.
   Naj bodo $\frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^r} \in G$ *poljubni. Potem*

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^n}\right) \cdot \frac{1}{2^r} &= \frac{1}{2^{m+n}} \cdot \frac{1}{2^r} \\ &= \frac{1}{2^{(m+n)+r}}. \end{aligned}$$

   Ker je seštevanje asociativna operacija v množici celih števil, zato velja

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{(m+n)+r}} &= \frac{1}{2^{m+(n+r)}} \\ &= \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^{(n+r)}} \\ &= \frac{1}{2^m} \cdot \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^r}\right). \end{aligned}$$

   Dokazali smo, da je množenje asociativna operacija v G.

(d) *Obstoj enote v G.*
Naj bo $\frac{1}{2^n} \in G$ poljuben. Poiščimo tak $e \in G$ za katerega velja

$$\frac{1}{2^n} \cdot e = \frac{1}{2^n}.$$

Opomnimo, da je množenje v G komutativna operacija in zadostuje iskanje samo desne enote. Ker je $e \in G$, lahko zapišemo $e = \frac{1}{2^{e'}}$, kjer je e' odvisen od e. Tako rešujemo enačbo

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{e'}} = \frac{1}{2^n}.$$

Posledično rešujemo

$$n + e' = n$$

nad množico celih števil. Tako dobimo, da je $e' = 0$ in zato je $e = \frac{1}{2^0} = 1$.

(e) *Obstoj inverznega elementa v G.*
Naj bo $\frac{1}{2^n} \in G$ poljuben. Poiščimo tak $x \in G$, da je $\frac{1}{2^n} \cdot x = 1$ (na podlagi (d)). Podobno kot v (d) lahko pretvorimo na reševanje

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2^{x'}} = \frac{1}{2^0},$$

kjer je x' odvisen od x. Tako rešujemo $n + x' = 0$ in iz tega sledi, da je $x' = -n$. Zato je inverz od $\frac{1}{2^n}$ enak $\frac{1}{2^{-n}}$.

S tem smo dokazali, da je $(G, \cdot)$ Abelova grupa.

4. Ali je $G = \{1, 3, 5, 7\}$ grupa za množenje po modulu 8?

Rešitev. Preden preverimo vse lastnosti definicije grupe, povejmo, da je množenje po modulu 8 komutativna operacija na G (množenje realnih števil).

(a) *Množenje po modulu 8 je notranja operacija v G.*
Preverimo to v Tabeli 1.1.

$\cdot$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Tabela 1.1: $\cdot$ je notranja operacija v G

(b) *Množenje je asociativna operacija v G.*
Ta lastnost velja, ker je množenje po modulu 8 notranja operacija (razmisli in preveri na posameznih elementih; glej Tabelo 1.1).

(c) *Obstoj enote v G.*
Naj bo $g \in G$ poljuben. Preverimo ali obstaja $e \in G$, da velja $g \cdot e = g$. Ker je komutativna operacija, zadostuje, da preverimo samo $g \cdot e = g$. Iz tabele je razvidno, da je $e = 1$ (glej prvo vrstico in prvi stolpec v Tabeli 1.1).

(d) *Obstoj inverznega elementa v G.*
Obstoj inverznega elementa preberemo v Tabeli 1.1. Vidimo, da je inverz za operacijo množenja v G enak samemu sebi.

Torej je $(G, \cdot)$ celo Abelova grupa.

5. Naj bo
$$G = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} \,|\, m,\, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Ali je $(G, \cdot)$ grupa, kjer $\cdot$ predstavlja običajno množenje števil?

Rešitev. Vsak lahko sam preveri, da je v našem primeru množenje komutativna operacija (množenje racionalnih števil).

(a) *Množenje je notranja operacija v G.*
Naj bosta $\dfrac{1+2m}{1+2n}, \dfrac{1+2r}{1+2s} \in G$ poljubna. Potem je
$$\frac{1+2m}{1+2n} \cdot \frac{1+2r}{1+2s} = \frac{1+2m+2r+4mr}{1+2n+2s+4ns} = \frac{1+2(m+r+2mr)}{1+2(n+s+2ns)} \in G,$$
saj je $m+r+2mr, n+s+2ns \in \mathbb{Z}$.

(b) *Množenje je asociativna operacija v G.*
Naj bodo $\frac{1+2m}{1+2n}, \frac{1+2r}{1+2s}, \frac{1+2t}{1+2u} \in G$ poljubni. Preverimo, da je množenje v G res asociativno.
$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1+2m}{1+2n} \cdot \frac{1+2r}{1+2s}\right) \cdot \frac{1+2t}{1+2u} = \\
= \;& \frac{1+2m+2r+4mr}{1+2n+2s+4ns} \cdot \frac{1+2t}{1+2u} = \\
= \;& \frac{1+2m+2r+4mr+2t+4mt+4rt+8mrt}{1+2n+2s+4ns+2u+4nu+4su+8nsu} = \\
= \;& \frac{1+2m}{1+2n} \cdot \frac{1+2r+2t+4rt}{1+2s+2u+4su} = \\
= \;& \frac{1+2m}{1+2n} \cdot \left(\frac{1+2r}{1+2s} \cdot \frac{1+2t}{1+2u}\right).
\end{aligned}$$

(c) *Obstoj enote v G.*
Pri racionalnih številih je enota za množenje 1 in zato preverimo, da je tudi v tem primeru. Naj bo $\frac{1+2m}{1+2n} \in G$ poljuben. Poiščimo tak element $\frac{1+2e_1}{1+2e_2} \in G$, da bo veljalo
$$\frac{1+2m}{1+2n} \cdot \frac{1+2e_1}{1+2e_2} = \frac{1+2m}{1+2n}.$$

Opomnimo, da je zaradi komutativnosti je dovolj ta razmislek. Če nadaljujemo z računanjem, dobimo enačbo

$$\frac{1+2m+2e_1+4me_1}{1+2n+2e_2+4ne_2} = \frac{1+2m}{1+2n}$$

oziroma rešujemo sistem

$$\begin{aligned} 1+2m+2e_1+4me_1 &= 1+2m \\ 1+2n+2e_2+4ne_2 &= 1+2n. \end{aligned}$$

Če poenostavimo slednji enačbi, je potrebno rešiti

$$\begin{aligned} 2e_1(1+2m) &= 0 \\ 2e_2(1+2n) &= 0. \end{aligned}$$

Dobili smo produkt, kjer sta m in n poljubni celi števili, zato je nujno $e_1 = 0$ in $e_2 = 0$. Tako je enota enaka $1 = \frac{1+2\cdot 0}{1+2\cdot 0}$.

(d) *Obstoj inverznega elementa v G.*
Naj bo $\frac{1+2m}{1+2n} \in G$ poljuben. Preverimo ali obstaja tak element $\frac{1+2m_1}{1+2n_1} \in G$, da bo

$$\frac{1+2m}{1+2n} \cdot \frac{1+2m_1}{1+2n_1} = 1.$$

Ko izrazimo $\frac{1+2m_1}{1+2n_1}$, vidimo, da je $m_1 = n$ in $n_1 = m$.

Torej je $(G, \cdot)$ Abelova grupa z operacijo množenja.

6. Naj bo

$$G = \{(a,b) \,|\, a,\ b\ \in \mathbb{Q},\ a \neq 0\}.$$

Na G vpeljemo operacijo $*$, ki ima predpis

$$(a,\ b) \circ (c,\ d) = (ac,\ ad + b).$$

Ali je $(G, *)$ grupa? Ali je Abelova grupa?

Rešitev. Najprej preverimo, da $*$ ni komutativna operacija. Naj bosta (a,b), $(c,d) \in G$. Če bi bila $*$ komutativna operacija, potem bi veljalo

$$(a,b) * (c,d) = (ac, ad+b) = (ca, cb+d) = (c,d) * (a,b),$$

ampak to v splošnem ne velja, saj je lahko $ad + b \neq cb + d$ (glej na primeru $(a,b) = (1,-1)$ in $(c,d) = (2,-2)$).

(a) *$*$ je notranja operacija v G.*
Naj bosta $(a,b),(c,d) \in G$ poljubna. Potem je $(a,b)*(c,d) = (ac, ad+b)$ ter $(ac, ad+b) \in G$, saj $a, c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0, c \neq 0$ in je zato tudi $ac \neq 0$. Seveda je $ad + b \in \mathbb{Q}$ (saj so $a, b, d \in \mathbb{Q}$).

(b) $*$ *je asociativna operacija v* G.
Naj bodo $(a,b),(c,d),(e,f)\in G$ *poljubni. Dokažimo*

$$((a,b)*(c,d))*(e,f)=(a,b)*((c,d)*(e,f))\,.$$

Torej

$$\begin{aligned}((a,b)*(c,d))*(e,f)&=(ac,\,ad+b)*(e,f)\\&=((ac)e,\,(ac)f+ad+b)\\&=(a(ce),\,a(cf+d)+b)\\&=(a,\,b)*(ce,\,cf+d)\\&=(a,\,b)*((c,\,d)*(e,\,f))\,.\end{aligned}$$

(c) *Obstoj enote v* G.
Naj bo $(a,b)\in G$ *poljuben. Želimo preveriti ali obstaja tak* $(e_1,e_2)\in G$, *da bo*

$$(a,\,b)*(e_1,\,e_2)=(a,\,b).$$

Upoštevamo $*$ *in prevedemo na sistem*

$$\begin{aligned}ae_1&=a\\ae_2+b&=b.\end{aligned}$$

Vidimo, da je $e_1=1$ *in* $e_2=0$ *ter tako dobimo, da je enota v* G *enaka* $(1,0)$.
Preverimo, da enota tudi komutira.

$$(a,\,b)*(1,\,0)=(a,\,b)=(1,\,0)*(a,\,b).$$

(d) *Obstoj inverznega elementa v* G.
Naj bo $(a,b)\in G$ *poljuben. Želimo preveriti ali obstaja tak* $(a',\,b')\in G$, *da bo*

$$(a,\,b)*(a',\,b')=(1,0).$$

Upoštevajmo $*$ *in dobimo*

$$\begin{aligned}aa'&=1\\ab'+b&=0.\end{aligned}$$

Ker je $a\neq 0$ *dobimo, da je* $a'=\frac{1}{a}$ *in* $b'=-\frac{b}{a}$ *in posledično je* $\left(\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\right)$ *inverz od* (a,b). *Seveda je element* G, *saj veljajo vsi pogoji* $\frac{1}{a},-\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}$ *in* $\frac{1}{a}\neq 0$.
Ni težko preveriti, da velja

$$(a,\,b)*\left(\frac{1}{a},\,-\frac{b}{a}\right)=\left(\frac{1}{a},\,-\frac{b}{a}\right)=(a,\,b)=(1,\,0).$$

$(G,*)$ *je grupa, ni pa Abelova grupa.*

Permutacije

7. Koliko elementov vsebujeta simetrični grupi S_4 in S_7?

Rešitev. S_4 vsebuje 24 elementov, S_7 pa 5040. Za vajo zapiši vse elemente S_4.

8. Zapiši naslednje permutacije kot produkte disjunktnih ciklov in jim poišči inverze:

(a) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

(b) $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Rešitev. Ciklični zapis temelji na dejstvu, da se permutacije izvajajo v določenem zaporedju. V tem načinu zapisa se pokaže kateri elementi so menjali položaje, če se permutacije izvajajo po vrsti. To imenujemo tudi razbijanje permutacije v zmnožek disjunktnih ciklov permutacij.

(a) $\pi_1 = (1\ 2)\ (3) = (1\ 2)$, $\pi_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\pi_2 = (1\ 3\ 2)$, $\pi_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\pi_3 = (1\ 4)\ (2\ 3)$, $\pi_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) $\pi_4 = (1\ 4\ 8\ 9)\ (2\ 3)\ (5\ 7)\ (6) = (1\ 4\ 8\ 9)\ (2\ 3)\ (5\ 7)$,
$\pi_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

9. Izračunaj oba kompozituma:

(a) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

Rešitev.

(a) $\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

(b) $\pi_1 \circ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi_2 \circ \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

10. Reši enačbi:

(a) $\pi \circ \pi_1 = \pi_2$, če je

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \ \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

(b) $\pi_1 \circ \pi \circ \pi_2 = \pi_3$, če je

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rešitev. Enačbe bomo rešili s pomočjo inverzov.

(a) Sledi, da je $\pi = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. *Zato je*

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Sledi, da je $\pi = \pi_1^{-1} \circ \pi_3 \circ \pi_2^{-1}$. *Zato je*

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.6.4 Realna števila

Matematična indukcija

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$3 \,|\, (5^n + 2^{n+1}).$$

Rešitev. Baza indukcije je trivialno izpolnjena, saj je $3|(5+4)$*. S pomočjo indukcijske predpostavke* $3 \mid (5^n + 2^{n+1})$*, kjer* $n \in \mathbb{N}$*, dokažimo, da* $3 \mid (5^{n+1} + 2^{(n+1)+1})$*. Zapišimo* $5^{n+1} + 2^{(n+1)+1}$ *nekoliko drugače:*

$$\begin{aligned} 5^{n+1} + 2^{(n+1)+1} &= 5 \cdot 5^n + 2 \cdot 2^{n+1} \\ &= 5 \cdot 5^n + (5-3) \cdot 2^{n+1} \\ &= 5 \cdot 5^n + 5 \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1} \\ &= 5 \cdot (5^n + 2^{n+1}) - 3 \cdot 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Opomnimo, da je produkt dveh števil deljiv s 3*, če je vsaj eno od števil deljivo s* 3*. Po indukcijski predpostavki je število* $5 \cdot (5^n + 2^{n+1})$ *je deljivo s* 3 *(*$3 \mid (5^n + 2^{n+1})$*). Za lažje razumevanje simbolično zapišimo* $3 \cdot K = 5^n + 2^{n+1}$*, kjer je* K *ustezno celo število. Tako dobimo*

$$5 \cdot (5^n + 2^{n+1}) - 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot 5 \cdot K - 3 \cdot 2^{n+1} = 3 \cdot (5 \cdot K - 2^{n+1})$$

in to število deljivo s 3 *(imamo prudukt dveh števil in eno od teh je deljivo s* 3*).*

2. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Rešitev. Baza indukcije je trivialno izpolnjena, saj $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$*. Sedaj s pomočjo indukcijske predpostavke* $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$*, kjer* $n \in \mathbb{N}$*, dokažimo, da velja*

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Dokažimo na naslednji način:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} + \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \\ = \; & \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \\ = \; & \frac{n \cdot (2n+3) + 1}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \\ = \; & \frac{(2n+1) \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+3)} = \\ = \; & \frac{n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

in s tem smo dokazali trditev.

3. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

Rešitev. Baza indukcije je izpolnjena, saj $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$. *Sedaj s pomočjo indukcijske predpostavke* $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *dokažimo, da je* $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$. *Dokažimo na naslednji način:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &\geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{\sqrt{n^2+n} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&\geq \frac{\sqrt{n^2} + 1}{\sqrt{n+1}} \\
&= \sqrt{n+1}.
\end{aligned}$$

4. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$n < 2^n.$$

Rešitev. Baza indukcije je izpolnjena, saj je $1 < 2$. *Sedaj s pomočjo indukcijske predpostavke* $n < 2^n$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *dokažimo, da velja* $n + 1 < 2^{n+1}$. *Po indukcijski predpostavki dokazujemo, da je*

$$n + 1 < 2^n + 1.$$

Ker je $1 < 2^n$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$, *dobimo*

$$2^n + 1 < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

in trditev je s tem dokazana.

5. Z matematično indukcijo dokaži, da je vsota kubov treh zaporednih naravnih števil deljiva z 9.

Rešitev. Najprej preverimo bazo indukcije. Vidimo, da je $1^3 + 2^3 + 3^3$ *deljiva z 9. Predpostavimo, da je število* $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *deljivo z 9 in označimo* $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9 \cdot K$, *kjer je* $K \in \mathbb{N}$. *Dokažimo, da je tudi vsota* $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ *deljiva z 9.*

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27 \\
&= \left(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3\right) + 9 \cdot (3 + 3n + n^2) \\
&= 9 \cdot K + 9 \cdot (3 + 3n + n^2) \\
&= 9 \cdot (K + 3 + 3n + n^2)
\end{aligned}$$

in ta produkt je deljiv z 9.

6. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je vsota prvih n lihih naravnih števil enaka n^2.

   Rešitev. Baza indukcije je izpolnjena, saj je vsota prvega lihega števila 1. Predpostavimo, da je $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da je vsota prvih* $n + 1$ *lihih števil enaka* $(n + 1)^2$. *Dobimo*

   $$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

   in trditev je s tem dokazana.

7. Naj bo $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1$. Z matematično indukcijo dokaži, da velja Bernoullijeva neenakost

   $$1 + nx \leq (1 + x)^n,$$

   kjer je $n \in \mathbb{N}$.

   Rešitev. Baza indukcije trivialno velja. Predpostavimo, da je $1 + nx \leq (1 + x)^n$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da velja* $1 + (n + 1)x \leq (1 + x)^{n+1}$.

   Če upoštevamo indukcijsko predpostavko, dobimo

   $$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \\ &\geq (1 + x)(1 + nx).\end{aligned}$$

   Predpostavili smo tudi, da je $x \geq -1$ *in zato je* $x + 1 \geq 0$. *Tako dobimo*

   $$\begin{aligned}(1 + x)(1 + nx) &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x.\end{aligned}$$

   S tem je trditev dokazana.

8. Naj bo G komutativna grupa z operacijo $\circ$. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za poljubno naravno številno n in za poljubna $x, y \in G$ velja

   $$(x \circ y)^n = x^n \circ y^n.$$

   Vsak korak utemelji!

   Rešitev. Baza indukcije je trivialno izpolnjena. Predpostavimo, da je $(x \circ y)^n = x^n \circ y^n$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da je* $(x \circ y)^{n+1} = x^{n+1} \circ y^{n+1}$. *Po indukcijski predpostavki velja*

   $$(x \circ y)^{n+1} = (x \circ y)^n \circ (x \circ y) = (x^n \circ y^n) \circ (x \circ y).$$

   Ker je G *komutativna grupa, zato velja naslednje*

   $$\begin{aligned}(x^n \circ y^n) \circ (x \circ y) &= x^n \circ (y^n \circ x) \circ y \\ &= x^n \circ (x \circ y^n) \circ y \\ &= (x^n \circ x) \circ (y^n \circ y) \\ &= x^{n+1} \circ y^{n+1}\end{aligned}$$

   in trditev je s tem dokazana.

Številski obsegi

9. Poišči minimum, infimum, maksimum in supremum v $\mathbb{R}$, če obstajajo, za naslednje množice:

   (a) $A = \mathbb{N}$,

   (b) $B = \mathbb{N} \cap (-5, 5]$,

   (c) $C = \{1 + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$,

   (d) $D = \{1 + \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

   Rešitev.

   (a) $\min A = 1$*,* $\inf A = 1$*,* $\max A$ *ne obstaja,* $\sup A$ *ne obstaja.*

   (b) $\min B = 1$*,* $\inf B = 1$*,* $\max B = 5$*,* $\sup B = 5$*.*

   (c) $\min C$ *ne obstaja,* $\inf C = 1$*,* $\max C = 2$*,* $\sup C = 2$*.*

   (d) $\min D = 0$*,* $\inf D = 0$*,* $\max D = \frac{3}{2}$*,* $\sup D = \frac{3}{2}$*.*

10. Poišči minimum, infimum, maksimum in supremum v univerzalni množici $\mathcal{U} = (0, 1) \cup (2, 3]$, če obstajajo za naslednji množici:

    (a) $A = (0, 1)$,

    (b) $B = (2, 3)$.

    Rešitev.

    (a) $\min A$ *ne obstaja,* $\inf A$ *ne obstaja,* $\max A$ *ne obstaja,* $\sup A$ *ne obstaja.*

    (b) $\min B$ *ne obstaja,* $\inf B$ *ne obstaja ,* $\max B$ *ne obstaja,* $\sup B = 3$*.*

Realna števila in absolutna vrednost

11. Reši naslednjo neenačbo
$$2x - 1 < \frac{x}{2} + 5.$$

    Rešitev. Neenačbo preoblikujemo v obliko

$$\begin{aligned} 2x - \frac{x}{2} &< 5 + 1 \\ x &< 4 \end{aligned}$$

    in zato je rešitev $x \in (-\infty, 4)$*.*

12. Reši naslednjo neenačbo

$$x^2 + 5x + 3 > -1.$$

Rešitev. Neenačbo preoblikujemo v obliko

$$x^2 + 5x + 4 > 0.$$

S pomočjo formule $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *dobimo* $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$ *in zato je rešitev* $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$.

13. Reši naslednji neenačbi

(a) $\dfrac{x-1}{x+2} \leq 1$,

(b) $\dfrac{x^2-1}{x-3} > 0$.

Rešitev.

(a) Na neenačbo bomo gledali posebej za $x \in (-\infty, -2)$ *oziroma* $x \in (-2, \infty)$, *ker se v odvisnosti od teh intervalov spreminja neenačaj (spomni se pravil za obravnavo neenačb).*

- *Za* $x \in (-\infty, -2)$ *poenostavimo enačbo in dobimo*

$$\begin{aligned} x - 1 &\geq x + 2 \\ 0 &\geq 3. \end{aligned}$$

Torej ne obstaja tak $x \in (-\infty, -2)$, *za katerega velja neenakost.*

- *Za* $x \in (-2, \infty)$ *poenostavimo enačbo in dobimo*

$$\begin{aligned} x - 1 &\leq x + 2 \\ 0 &\leq 3. \end{aligned}$$

Torej, za vsak $x \in (-2, \infty)$ *velja neenakost.*

Rešitev neenačbe je $x \in (-2, \infty)$.

(b) Podobno kot v (a) gledamo za $x \in (-\infty, 3)$ *oziroma* $x \in (3, \infty)$.

- *Za* $x \in (-\infty, 3)$ *poenostavimo enačbo in dobimo*

$$x^2 - 1 < 0.$$

Iz te neenačbe dobimo $x \in (-1, 1)$. *Ko gledamo presek* $(-\infty, 3) \cap (-1, 1)$, *dobimo* $x \in (-1, 1)$.

- *Za* $x \in (3, \infty)$ *poenostavimo enačbo in dobimo*

$$x^2 - 1 > 0.$$

Iz te neenačbe dobimo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. *Ko gledamo presek* $((-\infty, -1) \cup (1, \infty)) \cap (3, \infty)$, *dobimo* $x \in (3, \infty)$.

Rešitev neenačbe je $x \in (-1, 1) \cup (3, \infty)$. *Nalogo lahko rešimo tudi grafično, saj lahko iz natančnega grafa funkcije preberemo rešitev.*

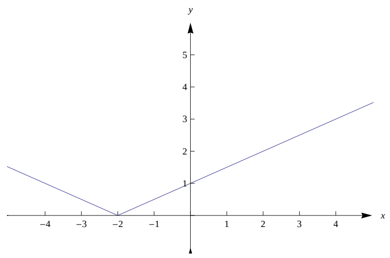
14. Izrazi predpise funkcij brez znakov absolutne vrednosti in skiciraj njihove grafe:

 (a) $f_1(x) = |\frac{x}{2} + 1|$,
 (b) $f_2(x) = |-\frac{x}{2} + 1|$,
 (c) $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$,
 (d) $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$.

 Rešitev.

 (a) Vidimo, da je $\frac{x}{2} + 1 \geq 0$, ko je $x \geq -2$. Tako dobimo

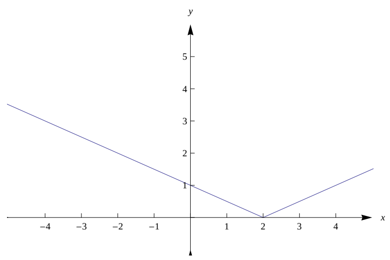
$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & ; \quad x \geq -2 \\ -\frac{x}{2} - 1 & ; \quad x < -2. \end{cases}$$



Slika 1.8: Graf $f_1(x) = |\frac{x}{2} + 1|$.

 (b) Vidimo, da je $-\frac{x}{2} + 1 \geq 0$, ko je $x \leq 2$. Tako dobimo

$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 1 & ; \quad x \leq 2 \\ \frac{x}{2} - 1 & ; \quad x > 2. \end{cases}$$



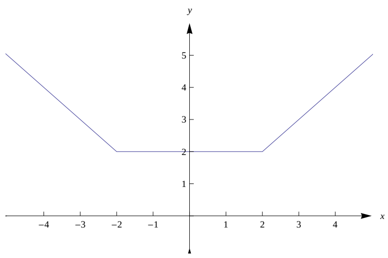
Slika 1.9: Graf $f_2(x) = |-\frac{x}{2} + 1|$.

 (c) Obravnavo razdelimo na naslednje tri možnosti

- *za* $x < -2$ *je* $g(x) = -\frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{2} + 1 = -x$,
- *za* $-2 \leq x < 2$ *je* $g(x) = \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2} + 1 = 2$,
- *za* $2 \leq x$ *je* $g(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{2} - 1 = x$.

Tako dobimo

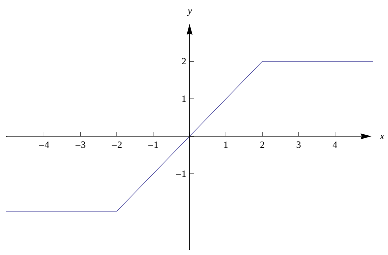
$$g(x) = \begin{cases} -x & ; \quad x < -2 \\ 2 & ; \quad -2 \leq x < 2 \\ x & ; \quad 2 \leq x. \end{cases}$$



Slika 1.10: Graf $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$

(d) Rešujemo podobno kot v primeru (c) in dobimo

$$h(x) = \begin{cases} -2 & ; \quad x < -2 \\ x & ; \quad -2 \leq x < 2 \\ 2 & ; \quad 2 \leq x. \end{cases}$$



Slika 1.11: Graf $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$

15. Reši naslednji enačbi grafično in računsko

    (a) $2x + |x - 1| = 5$,

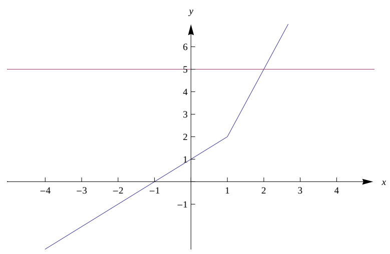
    (b) $|x| = |x - 1| + 1$.

    Rešitev. Če želimo poiskati rešitve enakosti, bo potrebno najprej zapisati enačbo brez absolutnih vrednosti in jo šele nato rešiti.

(a) *Če upoštevamo absolutno vrednost* $|x-1|$, *razdelimo celotno realno os na intervala* $x \in (-\infty, 1)$ *in* $x \in [1, \infty)$.

- *Za* $x \in (-\infty, 1)$ *dobimo*
$$2x - x + 1 = 5$$
in iz tega sledi, da je $x = 4$, *ampak ker* $4 \notin (-\infty, 1)$, *zato nimamo rešitev na intevalu* $(-\infty, 1)$.
- *Za* $x \in [1, \infty)$ *dobimo*
$$2x + x - 1 = 5$$
in iz tega sledi, da je $x = 2$, *ki je rešitev enačbe, saj je na intervalu* $[1, \infty)$.

Rešitev enačbe je $x = 2$.

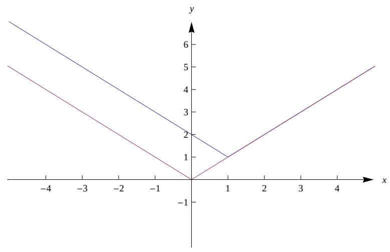


Slika 1.12: Grafična rešitev $2x + |x-1| = 5$.

(b) *Razdelimo celotno realno os na ustrezne podintervale. Za lažje razumevanje zapišimo naslednjo tabelo*

	$x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x$
$\lvert x\rvert$	$-x$	x	x
$\lvert x-1\rvert$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$

- *Za* $x < 0$ *dobimo*
$$-x = -x + 1 + 1,$$
kar je protislovje in zato na intervalu $(-\infty, 0)$ *nimamo rešitev.*
- *Za* $0 \leq x < 1$ *dobimo*
$$x = -x + 1 + 1$$
kar je tudi protislovje $(1 \notin [0, 1))$ *in zato tudi na intervalu* $[0, 1)$ *nimamo rešitev.*
- *Za* $1 \leq x$ *dobimo*
$$x = x - 1 + 1$$
in ta enakost velja ne glede na izbran x. *Rešitev je tako celoten interval* $[1, \infty)$.



Slika 1.13: Grafična rešitev $|x| = |x-1| + 1$.

Iz tega sledi, da je rešitev interval $[1, \infty)$.

16. Reši neenačbe

    (a) $|2x+4| < 6$,

    (b) $|x+1| + |x-1| \leq |x|$,

    (c) $|x^2 + 3x + 2| < x + 5$,

    (d) $|x^2 - 1| + 1 \leq |x+2|$.

    Rešitev.

    (a) Če upoštevamo absolutno vrednost za $|2x+4|$ *razdelimo celotno realno os* $x \in (-\infty, -2)$ *in* $x \in [-2, \infty)$.

    - *Za* $x \in (-\infty, -2)$ *dobimo*

    $$\begin{aligned} -2x - 4 &< 6 \\ x &> -5. \end{aligned}$$

    Iz tega sledi, da je na intervalu $(-\infty, -2)$ *rešitev podinterval* $(-5, -2)$.

    - *Za* $x \in [-2, \infty)$ *dobimo*

    $$\begin{aligned} 2x + 4 &< 6 \\ x &< 1. \end{aligned}$$

    Iz tega sledi, da je na intervalu $[-2, \infty)$ *rešitev podinterval* $[-2, 1)$.

    Neenakost velja za $x \in (-5, 1)$.

    (b) Upoštevajmo absolutne vrednosti in zapišimo naslednjo tabelo

	$x < -1$	$-1 \leq x < 0$	$0 \leq x < 1$	$1 \leq x$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$\|x\|$	$-x$	$-x$	x	x
$\|x-1\|$	$-x+1$	$-x+1$	$-x+1$	$x-1$

Obravnavali bomo štiri možnosti.

- *Za* $x < -1$ *dobimo*

$$\begin{aligned} -x-1-x+1 &\leq -x \\ 0 &\leq x \end{aligned}$$

in iz tega sledi, da za $x < -1$ *nimamo rešitve.*

- *Za* $-1 \leq x < 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned} x+1-x+1 &\leq -x \\ -2 &\geq x \end{aligned}$$

in iz tega sledi, da za $-1 \leq x < 0$ *nimamo rešitve.*

- *Za* $0 \leq x < 1$ *dobimo*

$$\begin{aligned} x+1-x+1 &\leq x \\ 2 &\leq x \end{aligned}$$

in iz tega sledi, da za $0 \leq x < 1$ *nimamo rešitve.*

- *Za* $1 \leq x$ *dobimo*

$$\begin{aligned} x+1+x-1 &\leq x \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

in iz tega sledi, da za $1 \leq x$ *nimamo rešitve.*

Neenakost nima rešitve.

(c) *Zapišimo* $|x^2+3x+2|$ *brez absolutne vrednosti*

$$|x^2+3x+2| = \begin{cases} x^2+3x+2 & ; \quad x \leq -2 \ \vee \ -1 \leq x \\ -(x^2+3x+2) & ; \quad -2 < x < -1. \end{cases}$$

- *Za* $x \leq -2 \ \vee \ -1 \leq x$ *dobimo*

$$\begin{aligned} x^2+3x+2 &< x+5 \\ (x+3)(x-1) &< 0 \end{aligned}$$

in to velja za $x \in (-3,1)$. *Torej neenakost velja za* $x \in (-3,-2] \cup [-1,1)$.

- *Za* $-2 < x < -1$ *dobimo*

$$\begin{aligned} -x^2-3x-2 &< x+5 \\ 0 &< x^2+4x+7. \end{aligned}$$

Desna stran neenačbe je ves čas pozitivna in zato neenakost velja za $x \in (-2,-1)$.

Neenakost velja za $x \in (-3,1)$.

(d) Zapišimo naslednjo tabelo

	$x < -2$	$-2 \leq x < -1$	$-1 \leq x < 1$	$1 \leq x$
$\lvert x+2 \rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\lvert x^2-1 \rvert$	x^2-1	x^2-1	$-x^2+1$	x^2-1

Obravnavali bomo tri možnosti.

- *Za* $x < -2$ *dobimo*

$$\begin{aligned} x^2 - 1 + 1 &\leq -x - 2 \\ x^2 + x + 2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Leva stran neenačbe je ves čas pozitivna in zato neenačba nima rešitev.

- *Za* $-2 \leq x < -1 \;\vee\; 1 \leq x$ *dobimo*

$$\begin{aligned} x^2 - 1 + 1 &\leq x + 2 \\ (x+1)(x-2) &\leq 0 \end{aligned}$$

in to velja za $x \in [-1, 2]$*. Ker gledamo* $-2 \leq x < -1 \;\vee\; 1 \leq x$*, dobimo* $x \in [1, 2]$*.*

- *Za* $-1 \leq x < 1$ *dobimo*

$$\begin{aligned} -x^2 + 1 + 1 &\leq x + 2 \\ 0 &\leq x(x+1) \end{aligned}$$

in to velja za $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$*. Ker gledamo* $-1 \leq x < 1$*, dobimo* $x \in [0, 1) \cup \{-1\}$*.*

Neenakost velja za $x \in \{-1\} \cup [0, 2]$*.*

17. Dana je funkcija

$$f(x) = \left| -\frac{x}{2} + 4 \right|.$$

(a) Načrtaj graf funkcije f in izrazi njen predpis brez absolutne vrednosti.

(b) Poišči rešitve enačbe $f(x) = 3$.

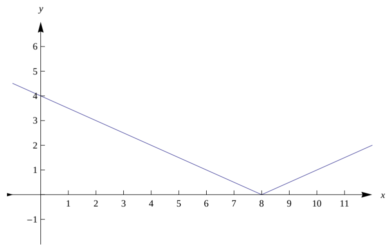
(c) Poišči rešitve enačbe $f(x) = 2x + 5$.

(d) Poišči rešitve neenačbe $f(x) < 3$.

Rešitev.

(a) Vidimo, da je $-\frac{x}{2} + 4 \geq 0$*, ko je* $x \leq 8$*. Tako dobimo*

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 4 & ; \quad x \leq 8 \\ \frac{x}{2} - 4 & ; \quad x > 8. \end{cases}$$



Slika 1.14: Graf $f(x) = \left|-\frac{x}{2} + 4\right|$.

(b) Iz (a) sledi, da obravnavamo naslednji dve možnosti:

- $-\frac{x}{2} + 4 = 3$, *ko je* $x = 2$.
- $\frac{x}{2} - 4 = 3$, *ko je* $x = 14$.

Torej $f(x) = 3$ *velja za* $x = 2$ *in* $x = 14$.

(c) Podobno kot v (b):

- $-\frac{x}{2} + 4 = 2x + 5$, *ko je* $x = -\frac{2}{5}$.
- $\frac{x}{2} - 4 = 2x + 5$, *ko je* $x = -6$.

Torej $f(x) = 2x + 5$ *velja za* $x = -\frac{2}{5}$ *in* $x = -6$.

(d) Pomagajmo si z (a) in dobimo $2 < x < 14$.

18. Dana je funkcija
$$f(x) = |x^2 - 4x|\,.$$

(a) Načrtaj graf funkcije f in zapiši f brez absolutne vrednosti.

(b) Reši enačbo $f(x) = 5$.

(c) Reši neenačbo $f(x) > 5$.

Rešitev. *(a) Vidimo, da je* $x^2 - 4x \geq 0$, *ko je* $x \leq 0$ *in* $4 \leq x$. *Tako dobimo*
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & ; \quad x \leq 0 \ \vee \ 4 \leq x \\ -x^2 + 4x & ; \quad 0 < x < 4. \end{cases}$$

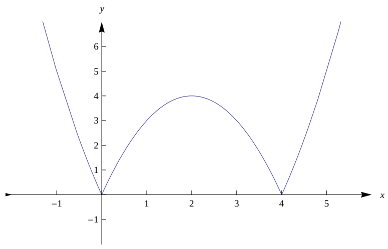
(b) Iz (a) sledi, da obravnavamo naslednji dve možnosti:

- *Za* $x \leq 0 \ \vee \ 4 \leq x$ *dobimo* $x^2 - 4x = 5$ *in iz tega sledi* $x = -1$ *in* $x = 5$.
- *Za* $0 < x < 4$ *dobimo* $-x^2 + 4x = 5$ *in v tem primeru nimamo realnih rešitev.*

Torej $f(x) = 5$ *velja za* $x = -1$ *in* $x = 5$.

(c) Rešujemo podobno kot v (b) in dobimo $x < -1$ *ali* $5 < x$.

19. Dana je funkcija
$$f(x) = |x^2 - 5x + 4|.$$



Slika 1.15: Graf $f(x) = |x^2 - 4x|$

(a) Načrtaj graf funkcije f in zapiši f brez absolutne vrednosti.

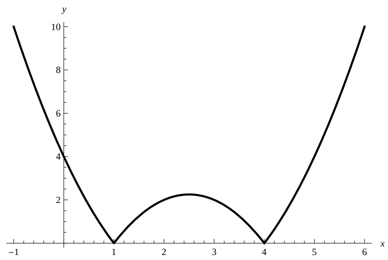
(b) Reši enačbo $f(x) = 1$.

(c) Reši neenačbo $f(x) > 1$.

Rešitev.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & ; \quad x \leq 1 \ \vee \ 4 \leq x \\ -(x^2 - 5x + 4) & ; \quad 1 < x < 4. \end{cases}$$



Slika 1.16: Graf funkcije $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$

(b) Glede na zgornji predpis dobimo

- *iz enačbe* $x^2 - 5x + 4 = 1$, *dobimo* $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$,
- *iz enačbe* $-x^2 + 5x - 4 = 1$, *dobimo* $x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(c) Glede na točki (a) in (b) dobimo rešitev $x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$.

20. Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}.$$

(a) Reši enačbo $|f(x)| = 4$.

(b) Reši neenačbo $|f(x)| > 4$.

Rešitev.

(a) Zapišimo $|f(x)|$ brez absolutne vrednosti

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{3x+2}{x-1} & ; \quad x \leq -\frac{2}{3} \ \vee \ 1 \leq x \\ -\frac{3x+2}{x-1} & ; \quad -\frac{2}{3} < x < 1. \end{cases}$$

Obravnavali bomo dve možnosti.

- *Za $x \leq -\frac{2}{3} \ \vee \ 1 \leq x$*

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x-1} &= 4 \\ 3x+2 &= 4x-4 \\ x &= 6. \end{aligned}$$

- *Za $-\frac{2}{3} < x < 1$*

$$\begin{aligned} -\frac{3x+2}{x-1} &= 4 \\ -3x-2 &= 4x-4 \\ x &= \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$|f(x)| = 4$ velja za $x = \frac{2}{7}$ in $x = 6$.

(b) Postopek je podoben kot v točki (a) in dobimo $\frac{2}{7} < x < 1 \ \vee 1 < x < 6$. Lahko si tudi grafično pomagamo tako, da narišemo graf funkcije $|f(x)|$ in z njega s pomočjo točke (a) preberemo rešitev.

21. Reši neenačbe

(a) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 2$,

(b) $\left|\frac{x^2-1}{x-7}\right| < 2$,

(c) $\frac{1}{|x|} - x > 2$,

(d) $\left|\frac{x+4}{3x+2}\right| > \frac{1}{x}$.

Rešitev.

(a) Vsak lahko razmisli, da imamo naslednji predpis brez absolutne vrednosti

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & ; \quad x < -2 \ \vee \ 1 < x \\ -\frac{x+2}{x-1} & ; \quad -2 \leq x < 1. \end{cases}$$

Obravnavali bomo tri možnosti.

- *Za* $x < -2$ *dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} &> 2 \\ x+2 &< 2(x-1) \\ 4 &< x \end{aligned}$$

  Iz $x < -2$ *in* $4 < x$ *sledi, da ni rešitve na tem intervalu.*

- *Za* $-2 \leq x < 1$ *dobimo*

$$\begin{aligned} -\frac{x+2}{x-1} &> 2 \\ x+2 &> -2(x-1) \\ 3x &> 0. \end{aligned}$$

  Iz $-2 \leq x < 1$ *in* $3x > 0$ *sledi, da je* $x \in (0, 1)$.

- *Za* $1 < x$ *dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} &> 2 \\ x+2 &> 2(x-1) \\ 4 &> x. \end{aligned}$$

  Iz $1 < x$ *in* $x < 4$ *sledi, da je* $x \in (1, 4)$.

Neenakost velja za $x \in (0, 1) \cup (1, 4)$.

(b) $\left|\frac{x^2-1}{x-7}\right| < 2$ *Podobno kot v primeru (a) lahko vsak preveri*

$$\left|\frac{x^2-1}{x-7}\right| = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-7} & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \ \vee \ 7 < x \\ -\frac{x^2-1}{x-7} & ; \quad x < -1 \ \vee \ 1 < x < 7. \end{cases}$$

Obravnavali bomo tri možnosti.

- *Za* $x < -1 \ \vee \ 1 < x < 7$ *dobimo*

$$\begin{aligned} -\frac{x^2-1}{x-7} &< 2 \\ x^2-1 &< -2(x-7) \\ (x+5)(x-3) &< 0 \end{aligned}$$

  in to velja za $-5 \leq x \leq 3$. *Iz* $x < -1$ *in* $-5 \leq x \leq 3$ *sledi, da je* $-5 \leq x < -1$ *in* $1 \leq x \leq 3$.

- *Za* $-1 \leq x \leq 1$ *dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-7} &< 2 \\ x^2-1 &> 2(x-7) \\ x^2-2x+13 &> 0 \end{aligned}$$

  in ta neenakost vedno velja. Iz tega sledi, da je $-1 \leq x \leq 1$.

- *Za* $7 < x$ *dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-7} &< 2 \\ x^2-1 &< 2(x-7) \\ x^2-2x+13 &< 0 \end{aligned}$$

in ta neenakost nikoli ne velja, zato za $7 < x$ *nimamo rešitev.*

Neenakost velja za $x \in (-5, 3)$.

(c) *Obravnavali bomo dve možnosti.*

- *Za* $x < 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} - x &> 2 \\ -1 - x^2 &< 2x \\ 0 &< x^2+2x+1. \end{aligned}$$

Ko upoštevamo $0 < x^2 + 2x + 1$ *in* $x < 0$*, dobimo, da velja za* $x \in \mathbb{R}^- - \{-1\}$.

- *Za* $x > 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - x &> 2 \\ 1 - x^2 &> 2x \\ 0 &> x^2+2x-1. \end{aligned}$$

Ko upoštevamo $x^2 + 2x - 1 < 0$ *in* $x > 0$*, dobimo, da velja za* $0 < x < -1 + \sqrt{2}$.

Neenakost velja za $x \in \mathbb{R}^- - \{-1\} \cup (0, -1 + \sqrt{2})$.

(d) *Vsak lahko sam razmisli, da je potrebno obravnavati spodnje štiri možnosti.*

- *Za* $x \leq -4$ *dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{3x+2} &< \frac{1}{x} \\ (x+4)x &> 3x+2 \\ x^2+x-2 &> 0. \end{aligned}$$

Ko upoštevamo $x^2 + x - 2 > 0$ *in* $x \leq -4$*, dobimo, da velja za* $x \leq -4$.

- *Za* $-4 < x < -\frac{2}{3}$ *dobimo*

$$\begin{aligned} -\frac{x+4}{3x+2} &< \frac{1}{x} \\ -(x+4)x &> 3x+2 \\ x^2+7x+2 &< 0. \end{aligned}$$

Ko upoštevamo $x^2 + 7x + 2 < 0$ *in* $-4 < x < -\frac{2}{3}$*, dobimo, da velja za* $-4 < x < -\frac{2}{3}$.

- *Za* $-\frac{2}{3} < x < 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{3x+2} &< \frac{1}{x} \\ (x+4)x &< 3x+2 \\ x^2+x-2 &< 0. \end{aligned}$$

  Ko upoštevamo $x^2+x-2<0$ *in* $-\frac{2}{3} < x < 0$*, dobimo, da velja za* $-\frac{2}{3} < x < 0$*.*

- *Za* $0 < x$ *dobimo*

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{3x+2} &< \frac{1}{x} \\ (x+4)x &> 3x+2 \\ x^2+x-2 &> 0. \end{aligned}$$

  Ko upoštevamo $x^2+x-2>0$ *in* $0<x$ *dobimo, da velja za* $1<x$*.*

Neenakost velja za $x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{2}{3}, 0) \cup (1, \infty)$*.*

22. Reši neenačbi

(a) $|1-|x-1||<1$,

(b) $\left|\frac{1}{2-|x|}\right| \geq 1$.

Rešitev. Podobno kot v prejšnjih primerih bomo realna števila razdelili na podintervale.

(a)
- *Za* $1-|x-1| \geq 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned} 1-|x-1| &< 1 \\ |x-1| &> 0 \end{aligned}$$

  in to velja za vse realne $x \neq 1$*. Ker pa imamo še pogoj* $1-|x-1| \geq 0$ *(to velja za* $0 \leq x \leq 2$*), dobimo, da velja za* $0 \leq x < 1$ *ali* $1 < x \leq 2$*.*

- *Za* $1-|x-1| < 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned} -1+|x-1| &< 1 \\ |x-1| &< 2 \end{aligned}$$

  in to velja za $-1<x<3$*. Ker pa imamo še pogoj* $1-|x-1|<0$ *(to velja za* $x<0$ *ali* $2<x$*), dobimo, da velja za* $-1<x<0$ *ali* $2<x<3$*.*

Neenakost velja za $-1<x<1$ *ali* $1<x<3$*.*

(b)
- *Za* $2 - |x| > 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-|x|} &\geq 1\\ 1 &\geq 2-|x|\\ |x| &\geq 1\end{aligned}$$

in to velja za vse realne $x \leq -1$ *ali* $1 \leq x$. *Ker pa imamo še pogoj* $2-|x| > 0$ *(to velja za* $-2 < x < 2$*), dobimo, da velja za* $-2 < x \leq -1$ *ali* $1 \leq x < 2$.

- *Za* $2 - |x| < 0$ *dobimo*

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2-|x|} &\geq 1\\ -1 &\leq 2-|x|\\ |x| &\leq 3\end{aligned}$$

in to velja za $-3 < x < 3$. *Ker pa imamo še pogoj* $2-|x| < 0$ *(to velja za* $x < -2$ *ali* $2 < x$*), dobimo, da velja za* $-3 \leq x < -2$ *ali* $2 < x \leq 3$.

Neenakost velja za $x \in [-3,-2) \cup (-2,-1] \cup [1,2) \cup (2,3]$.

Računanje napak

23. Za $x = 1,25 \pm 0,05$, $y = 2,02 \pm 0,02$, $z = 3,73 \pm 0,03$ in $w = -3,9 \pm 0,10$ izračunaj

(a) $a = x + y + z$,

(b) $b = z + y - x$,

(c) $c = xy + 2z$,

(d) $d = x^2 - y$,

(e) $e = \dfrac{4w}{y+z}$,

(f) $f = \dfrac{w^2 - x}{xy + 2z}$.

Rešitev. Natančneje bomo obravnavali napake. Vmesne rezultate bomo zaokrožali na štiri decimalna mesta natančno.

(a) $\tilde{a} = 1,25+2,02+3,73 = 7,00$, $\delta_a = \delta x + \delta y + \delta z = 0,05+0,02+0,03 = 0,10$, $a = \tilde{a} \pm \delta_a = 7,00 \pm 0,10$.

(b) $\tilde{b} = 3,73+2,02-1,25 = 4,50$, $\delta_b = \delta z + \delta y + \delta x = 0,05+0,02+0,03 = 0,10$, $b = \tilde{b} \pm \delta_b = 4,50 \pm 0,10$.

(c) $\tilde{c} = 1,25 \cdot (2,20) + 2 \cdot 3,73 = 9,885$, $\delta_{xy} = |\tilde{x}| \cdot \delta_y + |\tilde{y}| \cdot \delta_x + \delta_x \cdot \delta_y = 1,25 \cdot 0,02 + 2,02 \cdot 0,05 + 0,05 \cdot 0,02 = 0,127$, $\delta_{2z} = \delta_z + \delta_z = 0,03 + 0,03 = 0,06$, $\delta_c = \delta_{xy} + \delta_{2z} = 0,127 + 0,06 = 0,187$, $c = \tilde{c} \pm \delta_c = 9,885 \pm 0,19$,

(d) $\tilde{d} = 1,25 \cdot 1,25 - 2,02 = -0,4575$, $\delta_{x^2} = |\tilde{x}| \cdot \delta_x + |\tilde{x}| \cdot \delta_x + \delta_x \cdot \delta_x = 1,25 \cdot 0,05 + 1,25 \cdot 0,05 + 0,05 \cdot 0,05 = 0,1275$, $\delta_d = \delta_{x^2} + \delta_y = 0,1275 + 0,02 = 0,1475$, $d = \tilde{d} \pm \delta_d = -0,46 \pm 0,15$,

(e) $\tilde{e} = \frac{4 \cdot (-3,9)}{2,02+3,73} = -2,7130$, $\delta_{4w} = 4\delta w = 4 \cdot \delta w = 4 \cdot 0,10 = 0,40$, $\delta_{y+z} = \delta y + \delta z = 0,02 + 0,03 = 0,05$, $\delta_e = \frac{|4\tilde{w}|\delta_{y+z} + |\tilde{y+z}|\delta_{4w}}{||\tilde{y+z}| - \delta y+z||\tilde{y+z}|} = \frac{15,6 \cdot 0,05 + 5,75 \cdot 0,40}{|5,75-0,05| \cdot 5,75} = 0,0940$, $e = \tilde{e} \pm \delta_e = -2,71 \pm 0,09$,

(f) $\tilde{f} = \frac{(-3,9)^2 - 1,25}{1,25 \cdot 2,02 + 2 \cdot 3,73} = 1,3981$, $\delta_{w^2} = |\tilde{w}| \cdot \delta_w + |\tilde{w}| \cdot \delta_w + \delta_w \cdot \delta_w = 3,90 \cdot 0,10 + 3,90 \cdot 0,10 + 0,10 \cdot 0,10 = 0,77$, $\delta_{w^2-x} = \delta w^2 + \delta x = 0,77 + 0,05 = 0,82$, $\delta xy = |\tilde{x}| \cdot \delta_y + |\tilde{y}| \cdot \delta_x + \delta_x \cdot \delta_y = 1,25 \cdot 0,02 + 2,02 \cdot 0,05 + 0,05 \cdot 0,02 = 0,127$, $\delta 2z = 2\delta z = 2 \cdot 0,03 = 0,06$, $\delta xy + 2z = \delta xy + \delta 2z = 0,127 + 0,06 = 0,187$, $\delta f = \frac{|\tilde{w^2+z}|\delta_{xy+2z} + |\tilde{xy+2z}|\delta_{w^2+z}}{||\tilde{xy+2z}| - \delta xy+2z||\tilde{xy+2z}|} = \frac{13,96 \cdot 0,187 + 9,985 \cdot 0,82}{|9,985-0,187|9,985} = 0,1124$, $f = \tilde{f} \pm \delta_f = 1,40 \pm 0,11$.

1.6.5 Kompleksna števila

1. Za podana kompleksna števila poišči $\mathcal{R}e(z)$, $\mathcal{I}m(z)$, $\overline{z}$, $|z|$.

   (a) $z = 3 + 2i$,

   (b) $z = -3i$,

   (c) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + 3 + i$,

   (d) $z = \dfrac{5+10i}{1-2i} + \dfrac{10i}{1+3i}$.

   Rešitev.

   (a) $\mathcal{R}e(3+2i) = 3$, $\mathcal{I}m(3+2i) = 2$, $\overline{3+2i} = 3-2i$, $|3+2i| = \sqrt{(3+2i)(3-2i)} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

   (b) $\mathcal{R}e(-3i) = 0$, $\mathcal{I}m(-3i) = -3$, $\overline{-3i} = 3i$, $|-3i| = \sqrt{(-3i) \cdot 3i} = \sqrt{9} = 3$.

   (c) *Najprej poenostavimo izraz*

   $$z = \frac{1+i}{1-i} + 3 + i = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} + 3 + i = \frac{2i}{2} + 3 + i = 3 + 2i.$$

   $\mathcal{R}e(3+2i) = 3$, $\mathcal{I}m(3+2i) = 2$, $\overline{3+2i} = 3-2i$, $|3+2i| = \sqrt{13}$.

   (d) *Najprej poenostavimo izraz*

   $$\begin{aligned} z &= \frac{5+10i}{1-2i} + \frac{10i}{1+3i} = \frac{5+10i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} + \frac{10i}{1+3i} \cdot \frac{1-3i}{1-3i} \\ &= -3 + 4i + i + 3 = 5i. \end{aligned}$$

   $\mathcal{R}e(5i) = 0$, $\mathcal{I}m(5i) = 5$, $\overline{5i} = -5i$, $|5i| = \sqrt{5i \cdot (-5i)} = \sqrt{25} = 5$.

2. Poenostavi izraza

   (a) $z = \dfrac{1}{i} - \dfrac{5i}{2-i} + i^3(1+i)$,

   (b) $w = \left|\dfrac{(2+3i)^2}{1+i}\right| + \left|\dfrac{i^{15}}{i^{10}+2}\right|$.

   Rešitev.

   (a)

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{i} - \frac{5i}{2-i} + i^3(1+i) = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} - \frac{5i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} - i(1+i) \\ &= -i + 1 - 2i - i + 1 = 2 - 4i. \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} w &= \left|\frac{(2+3i)^2}{1+i}\right| + \left|\frac{i^{15}}{i^{10}+2}\right| = \left|\frac{-5+12i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right| + \left|\frac{-i}{-1+2}\right| \\ &= \left|\frac{-5+12i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right| + 1 = \left|\frac{7+17i}{2}\right| + 1 = \cdot\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2} + 1 \\ &= \frac{\sqrt{338}+2}{2} = \frac{13\sqrt{2}+2}{2} \end{aligned}$$

3. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo

   (a) $\mathcal{R}e(z) + \mathcal{I}m(\overline{z}) = 0$,

   (b) $\mathcal{R}e(z) + \mathcal{I}m(z) = 1$,

   (c) $iz + z\overline{z} = \frac{3}{4} - i$,

   (d) $|z - (3+4i)| = 2$,

   Rešitev.

   (a) Naj bo $z = a + bi$. Potem dobimo

$$\mathcal{R}e(a+bi) + \mathcal{I}m(\overline{a+bi}) = a - b = 0.$$

   Iz tega sledi, da je $b = a$. Rešitev je tako naslednja množica

$$A = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

   (b) Naj bo $z = a + bi$. Potem dobimo

$$\mathcal{R}e(a+bi) + \mathcal{I}m(a+bi) = a + b = 1.$$

   Iz tega sledi, da je $b = 1 - a$. Rešitev je tako naslednja množica

$$B = \{a + (1-a)i \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

(c) *Naj bo* $z = a + bi$. *Potem dobimo*

$$i(a+bi) + (a+bi)(\overline{a+bi}) = ai - b + a^2 + b^2 = \frac{3}{4} - i.$$

Iz tega dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - b &= \frac{3}{4} \\ a &= -1. \end{aligned}$$

Potrebno je izračunati b. *Tako imamo*

$$b^2 - b + \frac{1}{4} = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Iz tega sledi, da imamo eno rešitev $z = -1 + \frac{1}{2}i$.

(d) *Naj bo* $z = a + bi$. *Potem dobimo*

$$|(a+bi) - (3+4i)| = |(a-3) + (b-4)i| = \sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2} = 2.$$

Tako dobimo

$$D = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ (a-3)^2 + (b-4)^2 = 4\}$$

Geometrijsko ta množica predstavlja krožnico s središčem (3,4) in polmerom 2.

4. Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo

(a) $z^2 + 4 = 0$,

(b) $z^3 = 1 - i\sqrt{3}$,

(c) $z^4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

(d) $z^7 = 2\sqrt{3} + i2$.

Rešitev. *V večini primerov bomo uporabili polarni zapis kompleksnega števila.*

(a) *V tem primeru lahko izračunamo direktno*

$$z^2 = -4 = 4i^2.$$

Iz tega sledi, da imamo rešitivi $z_1 = 2i$ *in* $z_2 = -2i$.

(b) *Izračunajmo tako, da izračunamo* r *in* φ.

$$\begin{aligned} r = |1 - \sqrt{3}i| &= \sqrt{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = 2 \\ \tan\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{1}, &\quad \varphi = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

Velja

$$
\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)\right)\\
&= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right)
\end{aligned}
$$

za $k = 0, 1, 2$. *Tako dobimo*

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)\\
z_1 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{9}\right)\right)\\
z_2 &= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{9}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{9}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Vsak lahko sam izračuna konkretne vrednosti na štiri decimalna mesta natančno.

(c) *Izračunajmo* r *in* φ*:*

$$
\begin{aligned}
r &= \left|\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 1\\
\tan\varphi &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Velja

$$
\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)\right)\\
&= \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

za $k = 0, 1, 2, 3$. *Vsak lahko sam izračuna konkretne vrednosti za* $k = 0, 1, 2, 3$ *(glej primer (b)).*

(d) *Izračunajmo* r *in* φ*:*

$$
\begin{aligned}
r &= \left|2\sqrt{3}+i2\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}+i2\right)\left(2\sqrt{3}-i2\right)} = \sqrt{12+4} = 4\\
\tan\varphi &= \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

Velja

$$
\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[7]{4}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2k\pi}{7}\right)\right)\\
&= \sqrt[7]{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}\right)\right)
\end{aligned}
$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. *Vsak lahko sam izračuna konkretne vrednosti za* $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ *(glej primer (b)).*

5. Izračunaj

   (a) $(1 + i\sqrt{3})^6$,

   (b) $(2\sqrt{3} - i2)^9$,

   (c) $(-45 + i45)^{45}$,

   (d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2010}$.

   Rešitev. Uporabili bomo Moivreovo formulo.

   (a) Najprej izračunajmo r *in* φ.

$$\begin{aligned} r &= \left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(1 - i\sqrt{3}\right)} = 2 \\ \tan\varphi &= \frac{\sqrt{3}}{1}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

   Sedaj to upoštevajmo pri računanju.

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^6 &= \left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6 \\ &= 64\left(\cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 64 \end{aligned}$$

   (b) Najprej izračunajmo r *in* φ.

$$\begin{aligned} r &= \left|2\sqrt{3} - i2\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3} - i2\right)\left(2\sqrt{3} + i2\right)} = 4 \\ \tan\varphi &= \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

   Sedaj to upoštevajmo pri računanju.

$$\begin{aligned} (2\sqrt{3} - i2)^9 &= \left(4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^9 \\ &= 262144\left(\cos\left(-9 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-9 \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= i262144. \end{aligned}$$

   (c) Najprej izračunajmo r *in* φ.

$$\begin{aligned} r &= |-45 + i45| = \sqrt{(-45 + i45)(-45 - i45)} = 45\sqrt{2} \\ \tan\varphi &= \frac{45}{-45} = -1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Sedaj to upoštevajmo pri računanju.

$$\begin{aligned}(-45+i45)^{45} &= \left(45\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^{45}\\ &= (45\sqrt{2})^{45}\left(\cos\left(45\cdot\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(45\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\ &= (45\sqrt{2})^{45}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

(d) *Najprej izračunajmo r in φ.*

$$r=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=1$$

$$\tan\varphi=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}},\quad \varphi=\frac{\pi}{4}$$

Sedaj to upoštevajmo pri računanju.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2010} &= \left(1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{2010}\\ &= \left(\cos\left(2010\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2010\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= i\end{aligned}$$

6. Izračunaj

   (a) $z^2=(3-i\sqrt{3})^3$

   (b) $z^6=(2-i2)^4$.

Rešitev. Uporabili bomo polarni zapis kompleksnega števila in Moivreovo formulo.

(a) *Najprej izračunajmo r in φ.*

$$r=\left|3-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)}=2\sqrt{3}$$

$$\tan\varphi=\frac{-\sqrt{3}}{3},\quad \varphi=-\frac{\pi}{6}$$

Sedaj to upoštevajmo pri računanju.

$$\begin{aligned}(3-i\sqrt{3})^3 &= \left(2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right)\right)^3\\ &= 24\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+6k\pi\right)\right)\end{aligned}$$

Direktno uporabimo formulo za iskanje korenov

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt{24\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+6k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+6k\pi}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{24\sqrt{3}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+3k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+3k\pi\right)\right) \end{aligned}$$

za $k = 0, 1$. *Konkretne rešitve za* $k = 0, 1$ *lahko vsak sam enostavno izračuna.*

(b) *Najprej izračunajmo* r *in* φ.

$$\begin{aligned} r &= |2-i2| = \sqrt{(2-i2)(2+i2)} = 2\sqrt{2} \\ \tan\varphi &= \frac{-2}{2} = -1, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Sedaj to upoštevajmo pri računanju.

$$\begin{aligned} (2-i2)^4 &= \left(2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)\right)^4 \\ &= 64\left(\cos\left(-\pi+8k\pi\right)+i\sin\left(2\pi+8k\pi\right)\right) \end{aligned}$$

Direktno uporabimo formulo za iskanje korenov

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[6]{64}\left(\cos\left(\frac{-\pi+8k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi+8k\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4k\pi}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

za $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. *Konkretne rešitve za* $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *lahko vsak sam enostavno izračuna.*

7. V kompleksni ravnini skiciraj množico

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(iz) + \mathcal{I}m(\overline{z}) = -2\}$,

   (b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2, -\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi\right\}$,

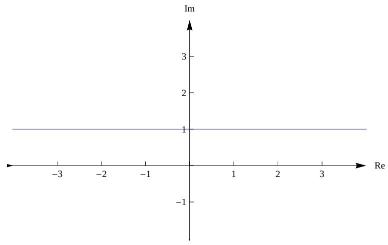
   (c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z^2) + z\overline{z} = 18\}$,

   (d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |2z - i(z+1)| \leq \sqrt{20}\}$.

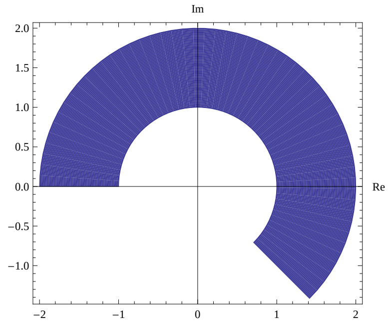
Rešitev. V vseh primerih naj bo $z = a + bi$.

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e(iz) + \mathcal{I}m(\overline{z}) &= -2 \\ \mathcal{R}e(i(a+bi)) + \mathcal{I}m(a-bi) &= -2 \\ -b-b &= -2 \\ b &= 1. \end{aligned}$$



Slika 1.17: Slika množice A.



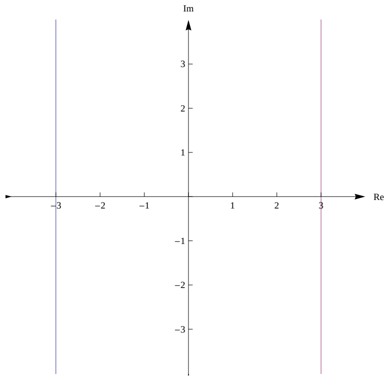
Slika 1.18: Slika množice B.

(b) *Sliko narišemo direktno, ker imamo vse podatke (sicer si pomagaj s polarnim zapisom kompleksnega števila).*

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}e(z^2) + |z\overline{z}| &= 18 \\
\mathcal{R}e((a+bi)^2) + (a+bi)(a-bi) &= 18 \\
a^2 - b^2 + a^2 + b^2 &= 18 \\
a^2 &= 9
\end{aligned}
$$

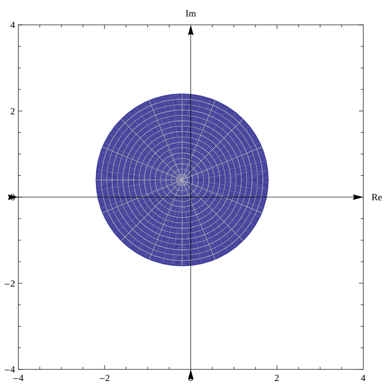
in to velja za $a = -3$ *ali* $a = 3$.



Slika 1.19: Slika množice C ($a = -3$ ali $a = 3$, b poljuben.)

(d)

$$\begin{aligned}
|2(a+bi) - i(a+bi+1)| &\leq \sqrt{20} \\
|(2a+b) + (2b-a-1)i| &\leq \sqrt{20} \\
\sqrt{(2a+b)^2 + (2b-a-1)^2} &\leq \sqrt{20} \\
(2a+b)^2 + (2b-a-1)^2 &\leq 5 \\
4a^2 + 4ab + b^2 + 4b^2 + a^2 + 1 - 4ab - 4b + 2a &\leq 20 \\
5a^2 + 2a + 5b^2 - 4b + 1 &\leq 20 \\
a^2 + \frac{2}{5}a + b^2 - \frac{4}{5}b + \frac{1}{5} &\leq 4 \\
\left(a + \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} + \left(b - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{4}{25} + \frac{1}{5} &\leq 4 \\
\left(a + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(b - \frac{2}{5}\right)^2 &\leq 4.
\end{aligned}$$



Slika 1.20: Slika množice D.

8. Nad množico kompleksnih števil reši enačbo

   (a) $|z| + z = 2 + i$,

   (b) $\overline{z} = z^2$,

   (c) $iz^2 + (-4 - i)z = 4i - 2$,

   (d) $(1 + i)z^3 + 1 - i = 0$,

   (e) $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$, če je $z_1 = 1 + 2i$,

   (f) $z^9 + 2iz^5 - z = 0$.

Rešitev. Uporabili bomo različne načine za reševanje.

(a) Uporabimo $z = a + ib$ in dobimo

$$\sqrt{a^2 + b^2} + a + ib = 2 + i.$$

Iz tega dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} + a &= 2 \\ b &= 1. \end{aligned}$$

Iz enačbe $\sqrt{a^2 + 1} + a = 2$ je potrebno izračunati a. Dobimo

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a^2 + 1}\right)^2 &= (2 - a)^2 \\ a^2 + 1 &= 4 - 4a + a^2 \\ 4a &= 3. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $a = \frac{3}{4}$ in zato imamo enolično rešitev enačbe $z = \frac{3}{4} + i$.

(b) Podobno kot v (a) uporabimo $z = a + ib$:

$$a - bi = a^2 - b^2 + 2iab.$$

Iz tega dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a &= a^2 - b^2 \\ -b &= 2ab. \end{aligned}$$

Glede na realno vrednost b obravnavajmo sistem.

- *Če je $b = 0$, dobimo*

$$a = a^2$$

  in to velja, ko je $a = 0$ ali $a = 1$. Posledično smo dobili $z_1 = 0$ in $z_2 = 1$.

- *Če je $b \neq 0$, iz druge enačbe dobimo, da je $a = -\frac{1}{2}$. Iz prve enačbe izračunajmo še b.*
$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} - b^2$$
in iz tega sledi, da je $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Posledično dobimo $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Dobili smo štiri rešitve enačbe: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ in $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Enačbo preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{aligned} iz^2 + (-4-i)z &= 4i - 2 \\ z^2 + \frac{-4-i}{i}z + \frac{2-4i}{i} &= 0 \\ z^2 + (-1+4i)z + (-4-2i) &= 0 \end{aligned}$$

Sedaj uporabimo formulo za iskanje ničel kvadratne enačbe

$$z_{1,2} = \frac{1 - 4i \pm \sqrt{(-1+4i)^2 + 4(4+2i)}}{2} = \frac{1-4i \pm 1}{2}$$

in iz tega sledi $z_1 = 1 - 2i$ in $z_2 = -2i$.

(d) Enačbo preoblikujemo na naslednji način:

$$\begin{aligned} (1+i)z^3 + 1 - i &= 0 \\ z^3 &= \frac{-1+i}{1+i} \\ z^3 &= i \end{aligned}$$

Sedaj uporabimo polarni zapis kompleksnega števila za $r = 1$ in $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

(e) Pri reševanju te enačbe se bomo sklicali na trditev, da kompleksni koreni polinomske enačbe nastopajo v konjugiranih parih

(več si lahko prebereš v razdelku 2.1), zato je v našem primeru drugi koren $z_2 = 1 - 2i$. Izračunajmo $(z - (1+2i))(z - (1-2i)) = z^2 - 2z + 5$ in sedaj delimo polinoma

$$(z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100) \ : (z^2 - 2z + 5) \ = z^2 + 8z + 20.$$

Poiskati je potrebno le še rešitve kvadratne enačbe $z^2 + 8z + 20$. Velja

$$z_{3,4} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 80}}{2} = -4 \pm 2i$$

in zato $z_3 = -4 + 2i$ in $z_4 = -4 - 2i$.

(f) *Enačbo preoblikujemo na naslednji način*

$$z^9 + 2iz^5 - z = z(z^8 + 2iz^4 - 1) = z(z^4 + i)^2.$$

Iz tega zapisal sledi, da je potrebno rešiti $z = 0$ *in* $z^4 + i = 0$. *Seveda je* $z_1 = 0$. $z^4 + i = 0$ *bomo rešili s pomočjo polarnega zapisa kompleksnega števila.*

$$r = |-i| = \sqrt{-i \cdot i} = 1, \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Sledi

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

za $k = 0, 1, 2, 3$ *(vsak lahko sam vstavi podatke). Skupaj smo tako dobili pet enoličnih rešitev.*

9. Reši sistem enačb

   (a) $|z + 1 + i| = 2, \quad \mathcal{R}e(z + 1 + i) = 0,$

   (b) $|(1 + i)\overline{z}| = 2, \quad \mathcal{R}e((1 + i)\overline{z}) = 0.$

   Rešitev.

   (a) *Naj bo* $z = a + ib$. *Potem dobimo sistem enačb*

   $$\begin{aligned} |a + ib + 1 + i| &= \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 1)^2} = 2 \\ \mathcal{R}e(a + ib + 1 + i) &= a + 1 = 0. \end{aligned}$$

   Iz druge enačbe sledi, da je $a = -1$. *Ker je* $a = -1$, *iz prve enačbe sledi*

   $$\sqrt{(b + 1)^2} = 2$$

   in zato je $b_1 = -3$ *in* $b_2 = 1$. *Tako dobimo rešitvi* $z_1 = -1 + i$ *in* $z_2 = -1 - 3i$.

   (b) *Naj bo* $z = a - ib$. *Potem dobimo sistem enačb*

   $$\begin{aligned} |(1 + i)(a - ib)| = |a + b + i(a - b)| &= \sqrt{(a + b)^2 + (a - b)^2} = 2 \\ \mathcal{R}e((1 + i)(a - ib)) = \mathcal{R}e(a + b + i(a - b)) &= a + b = 0. \end{aligned}$$

   Iz druge enačbe sledi, da je $a = -b$. *Upoštevamo to pri prvi enačbi in dobimo*

   $$\sqrt{(b + b)^2} = \sqrt{(2b)^2} = 2$$

   in zato je $b_1 = -1$ *in* $b_2 = 1$. *Tako dobimo rešitvi* $z_1 = 1 - i$ *in* $z_2 = -1 + i$.

10. Reši enačbo $z_1 + z_2 = 1 - i$, če je $Arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$ in $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$.

Rešitev. Naj bo $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\cos\varphi_1)$ *in* $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_2)$. *Upoštevamo* $Arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$ *in* $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$ *in dobimo*

$$z_1 = r_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$z_2 = r_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vstavimo v $z_1 + z_2 = 1 - i$

$$r_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) + r_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i.$$

Iz tega dobimo sistem enačb

$$r_1\frac{\sqrt{3}}{2} + r_2\frac{1}{2} = 1$$
$$r_1\frac{1}{2} - r_2\frac{\sqrt{3}}{2} = -1.$$

Iz tega dobimo $r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ *in* $r_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. *Tako je* $z_1 = \frac{3-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})}{4}$ *in* $z_2 = \frac{1+\sqrt{3}-i(\sqrt{3}+3)}{4}$.

11. Reši enačbo $\mathcal{I}m(z_1 + z_2 + z_3) = 0$, če je $|z_1| = 1$, $|z_3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Arg(z_1) = Arg(z_3) = \frac{\pi}{6}$ in $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$.

Rešitev. Rešujemo podobno kot v prejšnji nalogi.
Naj bo $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ *in* $z_3 = r_3(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$. *Ko upoštevamo* $Arg(z_1) = Arg(z_3) = \frac{\pi}{6}$ *in* $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}$, *dobimo*

$$z_1 = r_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$z_2 = r_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$z_3 = r_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right).$$

Sedaj upoštevajmo še $|z_1| = 1$ *in* $|z_3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *in zato je*

$$|z_1| = \left|r_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right| = |r_1| \cdot 1 = 1$$
$$|z_3| = \left|r_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right| = |r_3| \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Iz tega sledi, da je $r_1 = 1$ *in* $r_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Tako dobimo kompleksni števili* $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ *in* $z_3 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$. *Upoštevajmo še* $\mathcal{I}m(z_1 + z_2 + z_3) = 0$

$$\mathcal{I}m(z_1 + z_2 + z_3) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - r_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Sledi, da je $r_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Tako je* $z_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$.

12. Izračunaj

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2$$

pri pogoju, da je z kompleksno število in velja $|z| = 1$.

Rešitev. Vemo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$. *Zato*

$$\begin{aligned}
|1 + z|^2 + |1 - z|^2 &= (1 + a)^2 + b^2 + (1 - a)^2 + b^2 \\
&= 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 \\
&= 2 + 2(a^2 + b^2) \\
&= 2 + 2\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

13. Dokaži, da za poljubno kompleksno število oblike $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, velja

$$\frac{|a| + |b|}{\sqrt{2}} \leq |z|.$$

Rešitev. Preoblikujemo

$$\begin{aligned}
\frac{|a| + |b|}{\sqrt{2}} &\leq \sqrt{a^2 + b^2} \\
|a| + |b| &\leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \\
(|a| + |b|)^2 &\leq 2(a^2 + b^2) \\
|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 &\leq 2|a|^2 + 2|b|^2 \\
0 &\leq |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \\
0 &\leq (|a| - |b|)^2
\end{aligned}$$

in to velja za vsak $a, b \in \mathbb{R}$.

Realne funkcije

V tem poglavju se bomo osredotočili na realne funkcije. Kot posebni primer realnih funkcij bomo obravnavali zaporedja ter v povezavi z njimi še številske in funkcijske vrste. Poleg tega bomo spoznali limito funkcije in nekaj lastnosti zveznih funcij.

2.1 Pregled elementarnih funkcij

V prvem poglavju so nas med drugim zanimale preslikave oziroma funkcije v splošnem, sedaj se bomo osredotočili samo na realne funkcije realne spremenljivke. Spoznali bomo njihove osnovne lastnosti in naredili pregled elementarnih funkcij.

Osnovne lastnosti

Zanimajo nas preslikave $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere bomo uporabljali izraz funkcija

$$f(x) = y\,.$$

Ker je domena podmnožica $\mathbb{R}$, je f funkcija realne spremenljivke. Ker je tudi kodomena podmnožica $\mathbb{R}$, je f realna funkcija. Domena D običajno ni vnaprej podana, temveč je to množica vseh tistih realnih števil, za katere je predpis funkcije f izračunljiv. Zato ne govorimo o domeni, temveč o *definicijskem območju* oz. *naravnem definicijskem območju* funkcije f, ki ga označimo D_f. Nadalje pravimo, da je x *neodvisna spremenljivka* ali *argument*, $f(x) = y$ pa *odvisna spremenljivka*, saj je y odvisen od izbire x-a.

Funkcije lahko podamo na več načinov:

a) *Tabelarično podana funkcija*

Tabelarični način podajanja je primeren za funkcije s končnim definicijskim območjem $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

nedvisne spremenljivke	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
funkcijske vrednosti	$f(x_1) = y_1$	$f(x_2) = y_2$	$\ldots$	$f(x_n) = y_n$

Za izračun funkcijskih vrednosti v vmesnih točkah lahko uporabimo *linearno interpolacijo*, kar pomeni, da med točkama $T_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ in $T_i(x_i, y_i)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, interpoliramo linearno funkcijo oziroma premico. Izračunajmo enačbo premice skozi T_{i-1} in T_i:

$$\begin{aligned} y &= kx + n \\ & \quad k = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ & \quad n = y_i - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\, x_i \\ y &= y_i + \underbrace{\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}_{\Delta y}(x - x_i)\,. \end{aligned}$$

Zgled 51. *Z linearno interpolacijo izračunajmo $\sqrt{2}$.*

1.

x	$\ldots$	1	4	$\ldots$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\ldots$	1	2	$\ldots$

$\sqrt{2} = f(2) = 1 + \frac{2-1}{4-1}(2-1) = 1.33\ldots = 1.\overline{3}\,.$

2.

x	$\ldots$	1.5	2.3	$\ldots$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\ldots$	1.2248	1.5166	$\ldots$

$\sqrt{2} = f(2) = 1.2248 + \frac{1.5166-1.2248}{2.3-1.5}(2-1.5) = 1.4072\ldots\,.$

Eksaktna vrednost je enaka $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots \doteq 1.4142\,.$

b) *Eksplicitno podana funkcija*

V tem primeru je podan predpis za izračun funkcijske vrednosti $f(x)$. Na primer,

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\,, f(x) = \ln x$$

ali

$$\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x > 0\,, \\ 0 & ; \quad x = 0\,, \\ -1 & ; \quad x < 0\,. \end{cases}$$

c) *Implicitno podana funkcija*

Funkcija je podana implicitno z enačbo

$$g(x, y) = 0\,.$$

Funkcijska vrednost $y = f(x)$ v točki x_0 je določena z enačbo $g(x_0, f(x_0)) = 0$, pri čemer mora biti funkcija f enolično določena, kar pa ni vedno res. Običajno je mogoče v okolici določene točke govoriti o enoličnem predpisu.

Zgled 52. *Ali je s predpisom $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ določena funkcija?*

Ne, na primer za $x = 1$ je y določen z $y^2 = 1$, kar pomeni, da ni enoličen.

S primernim zožanjem domene in kodomene lahko $g(x, y) = 0$ določa funkcijo.

d) *Parametrično podana funkcija*

Na ta način podamo funkcijo f, $f(x) = y$, s pomočjo dveh eksplicitno podanih funkcij g in h:

$$x = g(t)\,,$$

$$y = h(t)\,,$$

pri čemer parameter t preteče vrednosti neke podmnožice $D \subseteq \mathbb{R}$.

V uporabi je zapis:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t)\,.$$

Tudi v tem primeru velja podobno kot pri implicitno podani funkciji, da $f(x) = y$ ni nujno enolično določen in v tem primeru nimamo opravka s funkcijo.

Zgled 53. *Ali je s predpisom*

$$x = \cos t,$$

$$y = \sin t,\ t \in [0, \pi]$$

podana funkcija $f(x) = y$?

Med spremenljivkama x in y opazimo zvezo:

$$x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1\,,$$

kar je implicitno podana funkcija. Ker parameter t preteče vrednosti iz intervala $[0, \pi]$, je $y \geq 0$ in

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Poglejmo si nekaj osnovnih lastnosti realnih funkcij.

Definicija 2.1. *Funkcija f, definirana na simetričnem intervalu $D = (-a, a)$ ali $D = [-a, a]$, je* soda, *če velja*

$$f(x) = f(-x), \; \forall x \in D$$

in liha, *če velja*

$$f(x) = -f(-x), \; \forall x \in D\,.$$

Zgled 54. *Preverimo sodost oziroma lihost funkcije.*

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

   Ker je $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 = \frac{1}{2}x^2$, je to soda funkcija.

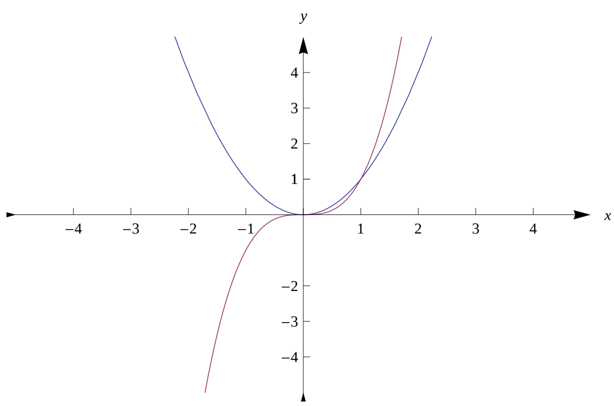
2. $f(x) = 2\,x^3$.

   Ker je $f(-x) = 2\,(-x)^3 = -2\,x^3$, je to liha funkcija.

3. $f(x) = x + 2x^2$.

   To ni niti soda, niti liha funkcija.

Graf sode funkcije je simetričen glede na y os, graf lihe funkcije pa je simetričen glede na koordinatno izhodišče (*glej Sliko 2.21*). Večina realnih funkcij ni niti sodih niti lihih.



Slika 2.21: Graf sode in lihe funkcije iz Primera 54.

Definicija 2.2. *Naj bo f definirana na D in $x_1, x_2 \in D$. Tedaj je f* naraščajoča*, ko velja*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

in f je padajoča*, ko velja*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\,.$$

Če na desni strani veljata strogi neenakosti ($f(x_1) < f(x_2)$) oziroma ($f(x_1) > f(x_2)$), govorimo o strogo naraščajoči *oziroma* strogo padajoči *funkciji. Če je f (strogo) naraščajoča ali (strogo) padajoča funkcija, je f* monotona *funkcija. Če je funkcija monotona samo na neki podmnožici I definicijskega območja, pravimo, da je monotona na I.*

Zgled 55. *Preverimo monotonost funkcije.*

1. $f(x) = x^2$.

   Funkcija f ni monotona funkcija, ker je za $x < 0$ strogo padajoča, za $x > 0$ pa strogo naraščajoča.

2. $f(x) = x^3$.

   f je monotona, ker je naraščajoča funkcija.

Definicija 2.3. *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Če obstaja tako število $P \in \mathbb{R}$, da je*

$$f(x + P) = f(x),\ \forall x \in D\,,$$

potem je f periodična funkcija *s periodo P. Najmanjša pozitivna perioda je* osnovna perioda*.*

Zgled 56. *Preverimo periodičnost funkcije.*

1. $f(x) = \sin x$.

   Ker je $f(x) = f(x + 2\pi) = f(x + 4\pi) = f(x - 2\pi)\ldots$, je f periodična funkcija z osnovno periodo 2π.

2. $f(x) = \tan x$.

   Ker je $f(x) = f(x+\pi) = f(x+2\pi) = f(x-\pi)\ldots$, je f periodična funkcija z osnovno periodo π.

Definicija 2.4. *Naj bosta $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $g : D_g \to \mathbb{R}$. Tedaj je naravno definicijsko območje kompozituma $f \circ g$ definirano takole*

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} .$$

Zgled 57. *Naj bosta dani realni funkciji $f(x) = 2 - x^2$ in $g(x) = \sqrt{x}$. Poiščimo definicijsko območje obeh kompozitumov.*

Definicijsko območje funkcije f je $D_f = \mathbb{R}$ in funkcije g je $D_g = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Definicijski območji kompozitumov sta

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x \geq 0 \big| \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = D_g , \\ D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} \big| 2 - x^2 \geq 0\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] . \end{aligned}$$

Elementarne funkcije

Preglejmo po vrsti elementarne funkcije, s katerimi se bomo srečevali v nadaljevanju.

a) *Polinomi in racionalne funkcije*

Definicija 2.5. Polinomi *so funkcije oblike*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 ,$$

kjer je $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$. Če je $a_n \neq 0$, pravimo, da je polinom p stopnje *n.*

Kadar želimo poudariti stopnjo polinoma, pišemo p_n namesto p. Številu a_n pravimo *vodilni koeficient* polinoma, številu a_0 pa *splošni člen.*

Rešitvam polinomske enačbe

$$p(x) = 0$$

pravimo *koreni.* Običajno namesto o korenih govorimo kar o *ničlah polinoma.* Polinom stopnje n ima natanko n ne nujno različnih ničel. Koreni polinomske enačbe pripadaj množici $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. Ker kompleksni koreni polinomske enačbe zmeraj nastopajo v konjugiranih parih, ima polinom lihe stopnje vsaj eno realno ničlo. Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koreni polinomske enačbe

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 .$$

Tedaj lahko polinom p *faktoriziramo*, kar pomeni, da ga zapišemo kot produkt faktorjev

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\,.$$

Če se faktor $(x - x_k)$ pojavi m-kat v razcepu, pravimo, da je x_k m-kratna ničla polinoma f.

Ničli polinoma druge stopnje

$$p(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

sta korena pripadajoče enačbe

$$p(x) = 0$$

in ju izračunamo po znanih formulah

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.$$

Izraz pod korenom imenujemo diskriminanta in jo označujemo z $D = b^2 - 4ac$. Glede na vrednost diskriminante ločimo tri možnosti:

$$\begin{aligned} D > 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R},\\ D = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \in \mathbb{R},\\ D < 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = \overline{x_2} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Ničle polinomov višje stopnje

$$p(x) = a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0\,, n \geq 3$$

lahko iščemo s pomočjo *Hornerjevega algoritma.*

Uporabimo ga lahko, če poznamo vsaj en koren enačbe $p(x) = 0$. Dokazati je mogoče, da če so koeficienti a_i celoštevilski in je koren racionalno število $\frac{m}{n}$, tedaj m deli a_0, n pa a_n. Uporaba Hornerjevega algoritma je prikazana na Zgledu 58.

Zgled 58. *Poiščimo vse korene polinomske enačbe*

$$p(x) = 5x^4 + 48x^3 - 15x^2 + 48x - 20 = 0\,.$$

Če je koren racionalno število $\frac{m}{n}$, tedaj $m \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ in $n \in \{1, 5\}$. Skupno imamo 12 kandidatov za rešitev enačbe, poleg teh še njihove nasprotne vrednosti. Preverimo po Hornerjevem algoritmu, da je $\frac{2}{5}$ koren enačbe.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 5 & 48 & -15 & 48 & -20 \\
 & & 2 & 20 & 2 & 20 \\
\hline
\frac{2}{5} & 5 & 50 & 5 & 50 & 0
\end{array}$$

Torej je

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x-\frac{2}{5})(5x^3+50x^2+5x+50) \\
&= 5(x-\frac{2}{5})(x^3+10x^2+x+10) \\
&= 5(x-\frac{2}{5})(x^2(x+10)+(x+10)) \\
&= 5(x-\frac{2}{5})(x+10)(x^2+1) \\
&= 5(x-\frac{2}{5})(x+10)(x+i)(x-i)\,.
\end{aligned}$$

Rešitve so $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = -10$, $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

Definicija 2.6. Racionalna funkcija f *je kvocient dveh polinomov* p *in* q*:*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,.$$

Ničle ima v točkah, kjer je $p(x) = 0$. Definirana je povsod, kjer je $q(x) \neq 0$. V točkah, kjer je $q(x) = 0$, funkcija f ni definirana. Pravimo, da ima v taki točki funkcija *pol* ali *vertikalno asimptoto*. Več o tem bomo izvedeli v naslednjem razdelku, ko bomo risali graf racionalne funkcije.

Zgled 59. *Poiščimo ničle, definicijsko območje in pole funkcije*

$$f(x) = \frac{5x^4+48x^3-15x^2+48x-20}{x^2-4}\,.$$

Ničle funkcije f so koreni polinoma iz Zgleda 58. Pola ima v $2, -2$ in definicijsko območje je zato $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

b) *Trigonometrične funkcije*

Definirali bomo *trigonometrične funkcije* sinus, kosinus, tangens in kotangens, za katere uporabljamo tudi termin *kotne funkcije*. Trigonometrične funkcije bomo najprej definirali za kote z intervala $[0, 2\pi]$. Kot je poleg v radianih lahko merjen tudi v stopinjah. Kote iz stopinj v radiane pretvarjamo po naslednji zvezi:

$$x(rd) = \frac{\pi}{180^\circ} x(^\circ)$$

oziroma

$$x(^\circ) = \frac{180^\circ}{\pi} x(rd)\,.$$

Kot x, merjen v radianih, predstavlja dolžino loka na enotski krožnici med točkama E in T s Slike 2.22.

Na enotski krožnici izberemo poljubno točko $T(a, b)$ in označimo ostale točke, kot je razvidno s Slike 2.22. Kot med pozitivnim delom osi x in poltrakom OT označimo z x. Tedaj je

$$\begin{aligned}
|OA| &= a = \cos x && \dots \quad \text{kosinus kota } x\,,\\
|OB| &= b = \sin x && \dots \quad \text{sinus kota } x\,,\\
|ET''| &= \tan x && \dots \quad \text{tangens kota } x\,,\\
|E'T'| &= \cot x && \dots \quad \text{kotangens kota } x\,.
\end{aligned}$$

Iz podobnosti trikotnikov OAT in OET'' je razvidno razmerje

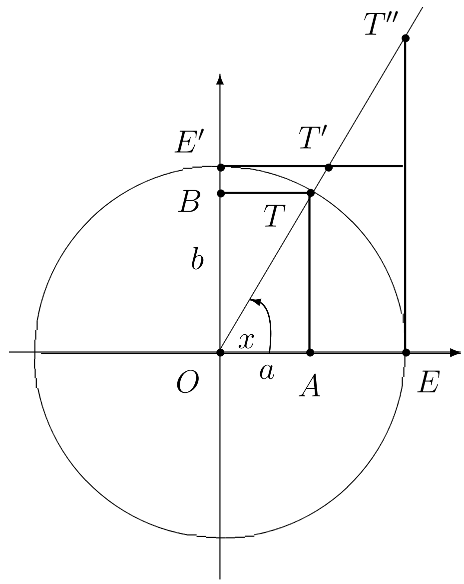
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{|OE'|} = \tan x\,.$$

Podobno velja

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cot x}{|OE''|} = \cot x\,,$$

kar pomeni, da je

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}\,.$$



Slika 2.22: Definicija trigonometričnih funkcij.

Poglejmo predznak trigonometričnih funkcij po posameznih kvadrantih:

	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\tan x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot x$	$+$	$-$	$+$	$-$

Iz Slike 2.22 je razvidno, da sta funkciji sinus in kosinus periodični z osnovno periodo 2π, tangens in kotangens pa s periodo π. Torej velja

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi),$$

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi),$$

$$\tan x = \tan(x + k\pi),$$

$$\cot x = \cot(x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Nadalje je s Slike 2.22 razvidno, da je kosinus soda funkcija ($\cos x = \cos(-x)$) in sinus liha funkcija ($\sin x = -\sin(-x)$), kar pomeni, da sta preostali dve prav tako lihi funkciji ($\tan x = -\tan(-x)$, $\cot x = -\cot(-x)$).

Poglejmo še nekaj najpogostejših zvez med trigonometričnimi funkcijami. Po Pitagorovem izreku velja

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$

Izračunajmo

$$\begin{aligned}
1 + \tan^2\, x &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + x\sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}\,.
\end{aligned}$$

Podobno zveza velja za kotangens

$$1 + \cot^2\, x = \frac{1}{\sin^2 x}\,.$$

Brez dokaza zapišimo adicijska izreka:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y\,, \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\,.
\end{aligned}$$

Od tod lahko izpeljemo

$$\begin{aligned}
\sin(x-y) &= \sin(x + (-y)) \\
&= \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) \\
&= \sin x \cos y - \cos x \sin y\,, \\
\cos(x-y) &= \cos(x + (-y)) \\
&= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\
&= \cos x \cos y + \sin x \sin y\,.
\end{aligned}$$

Iz adicijskih izrekov lahko izpeljemo tudi formuli za sinus in kosinus dvojnih kotov:

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= \sin(x+x) \\
&= \sin x \cos x + \cos x \sin x \\
&= 2 \sin x \cos y\,, \\
\cos(2x) &= \cos(x+x) \\
&= \cos x \cos x - \sin x \sin x \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x\,.
\end{aligned}$$

Prav tako nam adicijski izreki dajo zvezo med kotoma, katerih vsota je $\frac{\pi}{2}$:

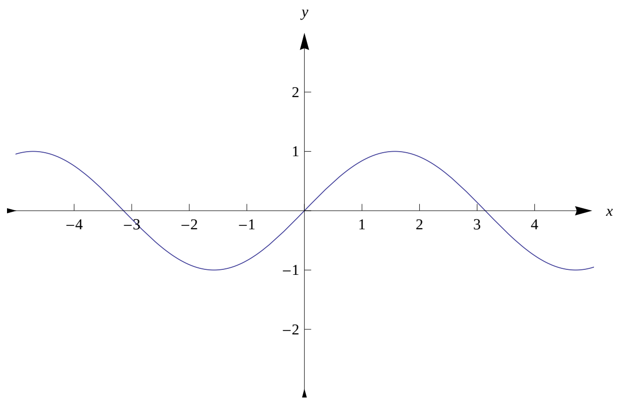
$$\begin{aligned}
\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) &= \sin \tfrac{\pi}{2} \cos x - \cos \tfrac{\pi}{2} \sin x \\
&= \cos x\,, \\
\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) &= \cos \tfrac{\pi}{2} \cos x + \sin \tfrac{\pi}{2} \sin x \\
&= \sin x\,.
\end{aligned}$$

Podobno velja za preostali dve funkciji:

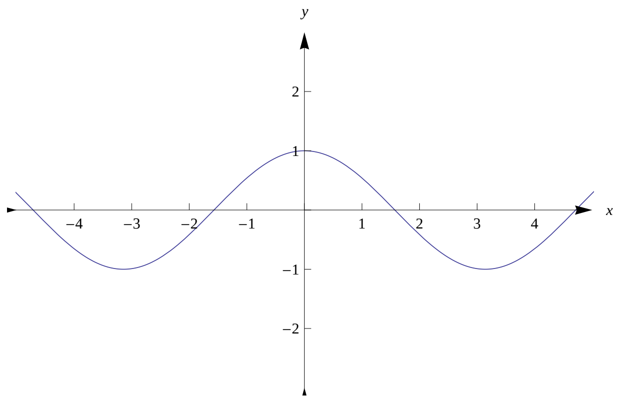
$$\begin{aligned}
\tan(\tfrac{\pi}{2} - x) &= \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{\cos(\frac{\pi}{2} - x)} \\
&= \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \cot x\,, \\
\cot(\tfrac{\pi}{2} - x) &= \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2} - x)} \\
&= \tan x\,.
\end{aligned}$$

Omenimo še, da sta stari oznaki za funkciji tangens in kotangens tg oz. ctg.

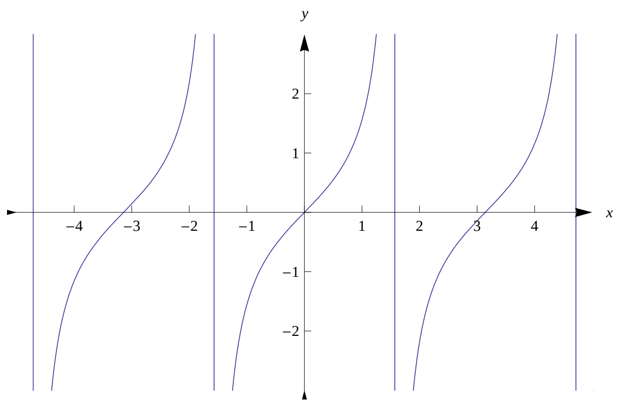
Poglejmo še grafe trigonometričnih funkcij, ki so razvidni s Slik 2.23, 2.24, 2.25, 2.26. Funkciji kosinus in sinus sta definirani na celem $\mathbb{R}$, medtem ko funkcija tangens ni definiran v ničlah kosinusa ($x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), kotangens pa ni definiran v ničlah sinusa ($x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).



Slika 2.23: Graf funkcije sinus.



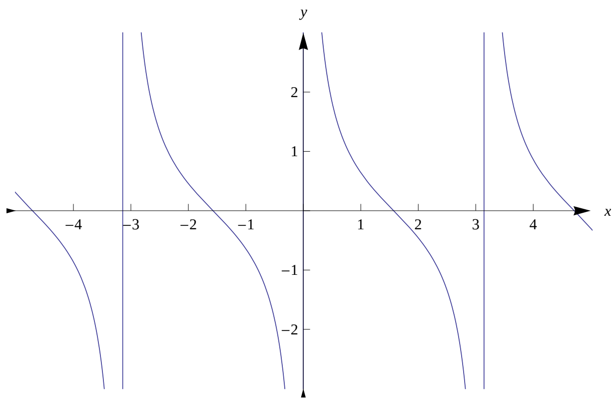
Slika 2.24: Graf funkcije kosinus.



Slika 2.25: Graf funkcije tangens.

c) *Ciklometrične funkcije*

Ciklometrične funkcije so obratne oziroma inverzne funkcije od trigonometričnih. Zanje uporabljamo tudi izraz *krožne funkcije*. Ciklometrične funkcije so



Slika 2.26: Graf funkcije kotangens.

arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens.

Funkcija arkus sinus

Če hočemo, da bo obstajal inverz funkcije sinus, mora le-ta biti bijektivna. V ta namen moramo skrčiti definicijsko območje. Naj bo $f(x) = \sin x$ in $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$. Tedaj ostaja $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ taka, da je

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x,\ \forall x \in [-1, 1]$$

in

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Imenujemo jo *arkus sinus* in pišemo

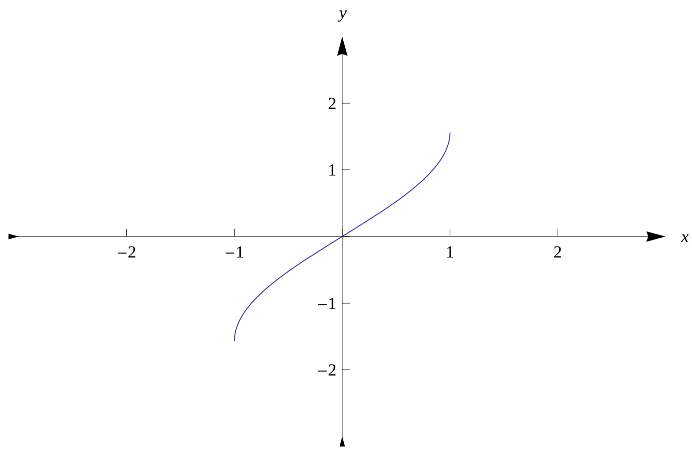
$$f^{-1}(x) = \operatorname{asin} x\,.$$

Ponekod zasledimo še staro oznako, ki je arcsin. Velja torej

$$\sin(\operatorname{asin} x) = x,\ \forall x \in [-1, 1]\,,$$

$$\operatorname{asin}(\sin x) = x,\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

Definicijsko območje funkcije $f(x) = \sin x$ bi lahko skrčili tudi kako drugače. Za vsako skrčitev definicijskega območja, ki ima za rezultat bijektivno funkcijo sinus, lahko definiramo obratno funkcijo arkus sinus. Za poljubno kodomeno funkcije arkus sinus pišemo funkcijo z veliko začetnico, torej $\operatorname{Asin} x$. Kadar skrčimo območje na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, torej tako, kot smo to najprej naredili, govorimo o *glavni veji* funkcije arkus sinus in jo pišemo z malo začetnico $\operatorname{asin} x$.



Slika 2.27: Graf glavne veje funkcije arkus sinus.

Vemo že, da graf obratne funkcije dobimo z zrcaljenem preko premice $y = x$, kot je prikazano na Sliki 2.27.

Funkcija arkus kosinus

Naj bo $f(x) = \cos x$. Definicijsko območje skrčimo na $[0, \pi]$, s čimer bomo podobno kot pri funkciji arkus sinus, dobili glavno vejo funkcije arkus kosinus, ki jo zapisujemo z malo začetnico. Tedaj obstaja

$$f^{-1}(x) = \operatorname{acos} x : [-1, 1] \to [0, \pi]\,,$$

za katero velja

$$\cos(\operatorname{acos} x) = x,\ \forall x \in [-1, 1]\,,$$
$$\operatorname{acos}(\cos x) = x,\ \forall x \in [0, \pi]\,.$$

Tudi v tem primeru lahko naletimo na staro oznako arccos.

Na Sliki 2.28 vidimo graf glavne veje funkcije arkus kosinus.

Izpeljimo še zvezo med obema znanima obratnima funkcijama. Naj bo $x \in [-1, 1]$. Tedaj je $y = \operatorname{asin} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in $x = \sin y$. Nadalje je

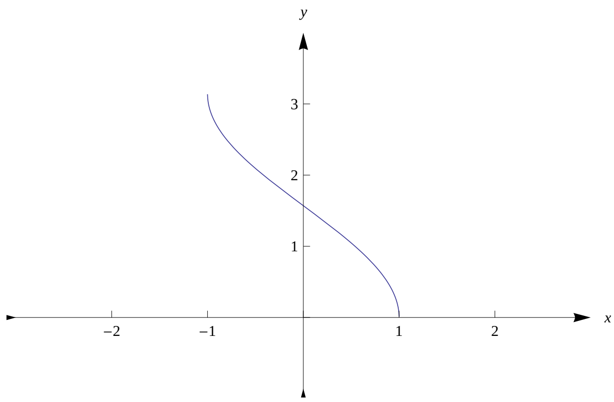
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin y = x\,,$$

kar pomeni, da je

$$\frac{\pi}{2} - y = \operatorname{acos} x$$

oziroma

$$\operatorname{asin} x + \operatorname{acos} x = \frac{\pi}{2}\,,\ \forall x \in [-1, 1].$$



Slika 2.28: Graf glavne veje funkcije arkus kosinus.

Funkcija arkus tangens

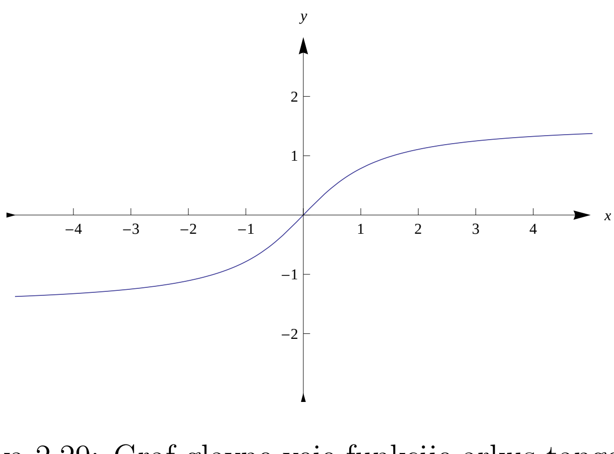
Naj bo $f(x) = \tan x$. Definicijsko območje skrčimo na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, s čimer bomo dobili glavno vejo funkcije arkus tangens Tedaj obstaja

$$f^{-1}(x) = \operatorname{atan} x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \,,$$

za katero velja

$$\tan(\operatorname{atan} x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$
$$\operatorname{atan}(\tan x) = x,\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \,.$$

Na Sliki 2.29 vidimo graf glavne veje funkcije arkus tangens.



Slika 2.29: Graf glavne veje funkcije arkus tangens.

Funkcija arkus kotangens

Naj bo $f(x) = \cot x$. Definicijsko območje skrčimo na $(0, \pi)$, kar nam ponovno da glavno vejo funkcije arkus kotangens. Tedaj obstaja

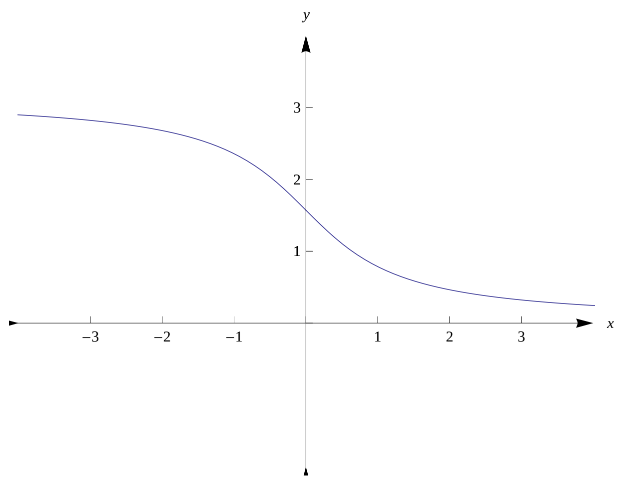
$$f^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)\,,$$

za katero velja

$$\cot(\operatorname{arccot} x) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\operatorname{acot}(\cot x) = x,\ \forall x \in (0, \pi)\,.$$

Na Sliki 2.30 vidimo graf veje funkcije arkus kotangens.



Slika 2.30: Graf glavne veje funkcije arkus kotangens.

Izpeljimo še zvezo med obema obratnima funkcijama. Naj bo $x \in \mathbb{R}$ in $y = \operatorname{atan} x$. Tedaj je

$$x = \tan y = \cot\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\,.$$

Torej je

$$\frac{\pi}{2} - y = \operatorname{acot} x$$

oziroma

$$\operatorname{atan} x + \operatorname{acot} x = \frac{\pi}{2}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tudi pri funkcijah arkus tangens in arkus kotangens sta ponekod v uporabi stari oznaki, ki sta arctg oz. arcctg.

d) *Eksponentna funkcija*

Eksponentna funkcija je oblike

$$f(x) = a^x,\ a > 0\,.$$

V eksponentni funkciji nastopa neodvisna spremenljivka x v eksponentu. Ker je $1^x = 1$ za vsak x, naj bo osnova $a \neq 1$. Eksponentna funkcija je povsod definirana, torej je $D_f = \mathbb{R}$, in je povsod pozitivna. To tudi pomeni, da je $Z_f = \mathbb{R}^+$, in zato nima ničel.

Torej

$$a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\,.$$

Za $f(x) = a^x$ velja

$$f(x+y) = f(x)\,f(y)\,,$$

saj je

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a^{x+y} \\ &= a^x\,a^y \\ &= f(x)\,f(y)\,. \end{aligned}$$

Za $a > 1$ je $f(x) = a^x$ strogo naraščajoča funkcija, saj za vsak x_1, x_2 velja:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \\ &\Leftrightarrow 1 < \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} \\ &\Leftrightarrow 1 < a^{x_2 - x_1}\,. \end{aligned}$$

Ker je $x_2 - x_1 > 0$ in $a > 1$ je to res za vsak $x_1 < x_2$.

Na Sliki 2.31 vidimo graf funkcije $f(x) = a^x$, za $a > 1$.

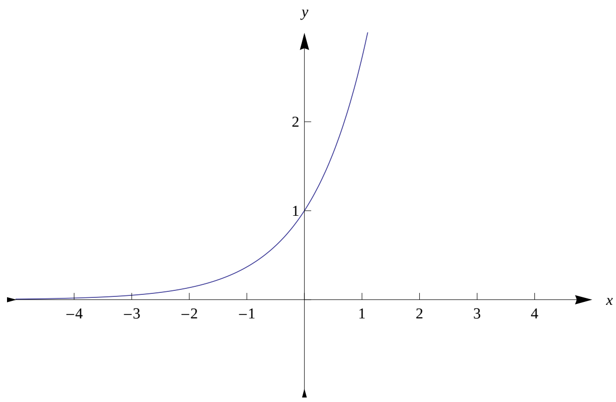
Za $a < 1$ je $f(x) = a^x$ strogo padajoča funkcija, saj za vsak x_1, x_2 velja:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; a^{x_1} > a^{x_2}\,,$$

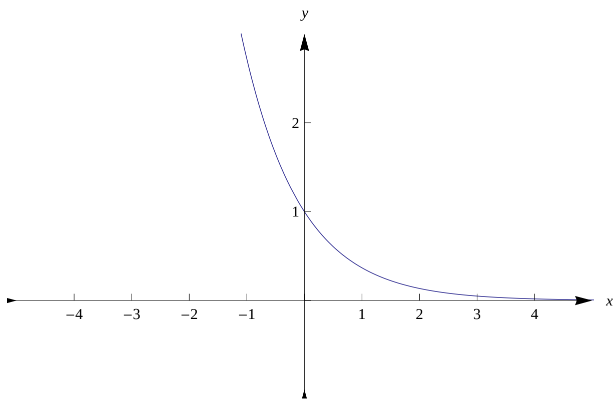
kar pokažemo na analogen način kot za $a > 1$.

Ker je eksponentna funkcija strogo monotona, je zato injektivna.

Zaradi nekaterih zakonov naravne rasti je zelo pomembna osnova število e oziroma eksponentni funkciji e^x in e^{-x}. Število e bomo spoznali pri razdelku



Slika 2.31: Graf eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ za $a > 1$.



Slika 2.32: Graf eksponentne funkcije $f(x) = a^x$ za $a < 1$.

o zaporedjih, zaenkrat povejmo le to, da je to iracionalno število, katerega približek je $2,71828\ldots$

Na Sliki 2.32 vidimo graf funkcije $f(x) = a^x$, ko je $a < 1$:

Zgled 60. *Skicirajmo grafa funkcij e^x in e^{-x}.*

Grafa obeh funkcij vidimo na Slikah 2.31 in 2.32.

e) *Logaritemska funkcija*

Naj bo f eksponentna funkcija, torej

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = a^x,\ a > 0, a \neq 1\,.$$

To je bijektivna funkcija, zato obstaja njej obratna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Imenujemo jo *logaritemska funkcija* in pišemo

$$f^{-1}(x) = \log_a x\,.$$

(Beremo: logaritem z osnovo a od x.)

Ker sta eksponentna in logaritemska funkcija obratni, velja

$$f(f^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

in

$$f^{-1}(f(x)) = \log_a a^x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

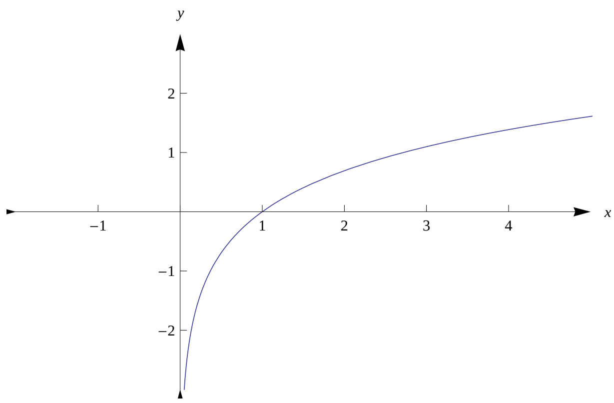
Imamo torej zvezo

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x\,.$$

Logaritemska funkcija ima ničlo v točki 1, saj velja

$$0 = \log_a x \Leftrightarrow a^0 = 1 = x\,.$$

Graf logaritemske funkcije dobimo iz grafa eksponentne funkcije z zrcaljenjem preko premice $y = x$, kar vidimo na Slikah 2.33 in 2.34.



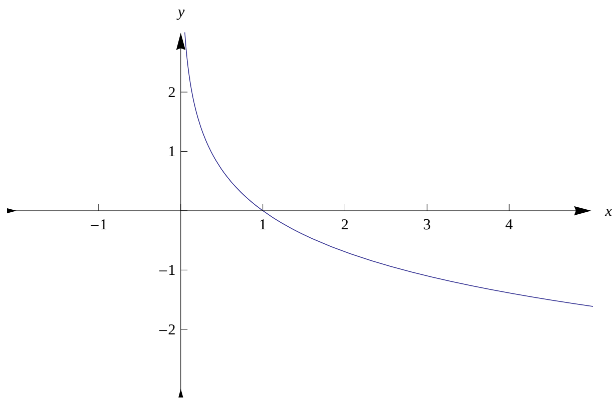
Slika 2.33: Graf logaritemske funkcije z osnovo $a > 1$.

Ob upoštevanju injektivnosti eksponentne funkcije izpeljimo tri pomembne lastnosti logaritma:

(1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,\ x, y > 0$

Izpeljava:

$$\begin{aligned} a^{\log_a(xy)} &= x\,y \\ &= a^{\log_a x}\, a^{\log_a y} \\ &= a^{\log_a x + \log_a y}\,. \end{aligned}$$



Slika 2.34: Graf logaritemske funkcije z osnovo $a < 1$.

(2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $x, y > 0$
Izpeljava:

$$\begin{aligned} a^{\log_a \frac{x}{y}} &= \frac{x}{y} \\ &= \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} \\ &= a^{\log_a x - \log_a y}\,. \end{aligned}$$

(3) $\log_a x^y = y \log_a x$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$
Izpeljava:

$$\begin{aligned} a^{\log_a x^y} &= x^y \\ &= (a^{\log_a x})^y \\ &= a^{(\log_a x)y} \\ &= a^{y \log_a x}\,. \end{aligned}$$

Kadar je osnova enaka številu e, govorimo o *naravnem logaritmu* in pišemo

$$\log_e x = \ln x\,.$$

Na Sliki 2.33 vidimo graf te funkcije.

f) *Hiperbolične funkcije*

Definirajmo *hiperbolični funkciji* kosinus hiperbolikus in sinus hiperbolikus

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \ldots \quad \text{kosinus hiperbolikus},$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \ldots \quad \text{sinus hiperbolikus}.$$

Opazimo, da je prva funkcija soda, druga pa liha. Med njima veljajo naslednje zveze:

(1) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x &= \frac{1}{4}(2e^{x+y} - 2e^{-x-y}) \\ &= \operatorname{sh}(x+y). \end{aligned}$$

(2) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

Pokažemo podobno kot (1).

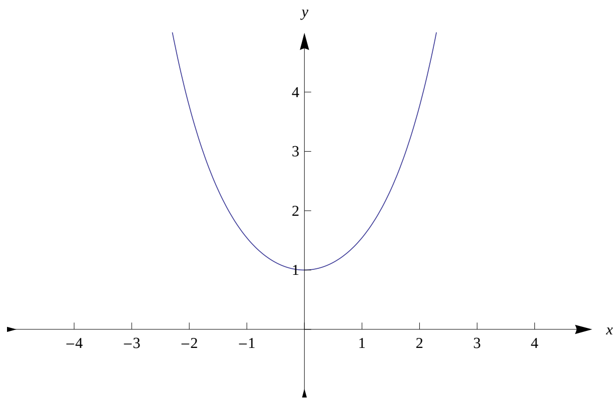
(3) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

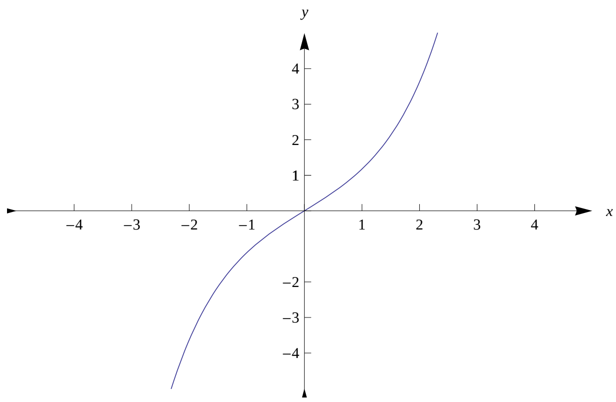
Na Sliki 2.35 vidimo graf funkcije kosinus hiperbolikus in na 2.36 vidimo graf funkcije kosinus hiperbolikus.

2.2 Zaporedja

Definirali bomo zaporedje, njegovo konvergenco in se osredotočili na nekatere lastnosti, kot sta monotonost in omejenost.



Slika 2.35: Graf hiperbolične funkcije kosinus hiperbolikus.



Slika 2.36: Graf hiperbolične funkcije sinus hiperbolikus.

Zaporedje v množici M je preslikava

$$a : \mathbb{N} \to M .$$

Množica M bo za nas množica realnih ali kompleksnih števil in tako govorimo o realnem ali kompleksnem zaporedju.

Po dogovoru pišemo funkcijsko vrednost $a(n) = a_n$ in jo imenujemo n-ti ali *splošni* člen zaporedja, n pa imenujemo *indeks* člena zaporedja. Namesto zapisa $a : \mathbb{N} \to M$ uporabljamo za zaporedje zapis $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$.

Zgled 61. *Poglejmo nekaj primerov na različne načine podanih zaporedij.*

1. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $(\frac{1}{n^2}) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots)$
2. $a_n = a_{n-1} + d$, *kjer sta* $a_1, d \in \mathbb{R} \ldots$ *aritmetično zaporedje*
3. $a_n = a_{n-1}\, q$, *kjer sta* $a_1, q \in \mathbb{R} \ldots$ *geometrijsko zaporedje*

4. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = F_1 = 1 \ldots$ *Fibonaccijevo zaporedje*

5. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n},\ (a_n) = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

Definicija 2.7. *Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno število. Odprti interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ imenujemo* ε-okolica *točke a.*

Zgled 62. *Od katerega n naprej so vsi členi zaporedja $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ znotraj ε-okolice točke 0, če je $\varepsilon = \frac{1}{10}$ oz. $\varepsilon = \frac{1}{100}$?*

Rešujemo neenakost

$$\begin{aligned} |a_n - 0| &< \varepsilon \\ \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| &< \varepsilon \\ \frac{1}{n} &< \varepsilon \\ n &> \frac{1}{\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

Za $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ležijo znotraj ε-okolice vsi členi od 11-ega naprej, za $\varepsilon = \frac{1}{100}$ pa od 101-ega naprej.

Definicija 2.8. *Naj bo (a_n) zaporedje v M. Število $a \in M$ je* limita *zaporedja (a_n), $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, natanko tedaj, ko za vsako ε-okolico točke a obstaja tako naravno število n_0, da za vsako naravno število $n \geq n_0$ velja, da a_n leži znotraj ε-okolice točke a:*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Pišemo tudi $a_n \to a$. Če obstaja limita zaporedja, pravimo, da je zaporedje *konvergentno*, sicer je zaporedje *divergentno*.

Zgled 63. *Dokažimo, da velja*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

$$
\begin{aligned}
\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\left|\frac{1}{n}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{n} &< \varepsilon \\
n &> \frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Tedaj je n_0 prvo naravno število večje od $\frac{1}{\varepsilon}$. Na primer, za $\varepsilon = \frac{1}{50}$, bi bil $n > n_0 = 50$, kar pomeni, da vsi členi od 50-ega naprej ležijo znotraj ε-okolice limite 0.

Zgled 64. *Pokažimo, da je zaporedje* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ *konvergentno.*

Členi zaporedja konvergirajo k limiti 1, kar pokažemo tako, da preverimo pogoj

$$
\begin{aligned}
\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \quad \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| &< \varepsilon \Leftrightarrow \\
\left|\frac{-1}{n+1}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{n+1} &< \varepsilon \\
n+1 &> \frac{1}{\varepsilon} \\
n &> \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.
\end{aligned}
$$

Tedaj je n_0 prvo naravno število večje od $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Na primer, za $\varepsilon = \frac{1}{20}$, bi bil $n > n_0 = 19$, kar pomeni, da vsi členi od 19-ega naprej ležijo znotraj ε-okolice limite 1.

Opazimo, če je a limita zaporedja a_n, tedaj v poljubno majhni okolici točke a ležijo vsi členi zaporedja (a_n) od nekega člena a_{n_0} naprej.

Zgled 65. *Ali je* $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ *konvergentno zaporedje?*

Ne, ker se sodi členi bližajo k 1, lihi pa k -1.

Definicija 2.9. *Naj bo* (a_n) *zaporedje. Število* s *je* stekališče *zaporedja* (a_n)*, če vsebuje vsaka poljubno majhna okolica števila* s *neskončno členov zaporedja* (a_n)*.*

Če je s stekališče zaporedja (a_n), tedaj je neenakost $|a_n - s| < \varepsilon$ izpolnjena za neskončno mnogo indeksov n.

Opazimo, da velja

$$\text{"limita } \Rightarrow \text{ stekališče"}\,,$$

medtem ko implikacija v obratno smer ne drži.

Zgled 66. *Poiščimo stekališča zaporedja* $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6}, \ldots)$

Stekališči sta 1 in 0.

Izrek 2.10. *Če ima zaporedje več kot eno stekališče, je divergentno.*

Dokaz. Naj bosta s_1 in s_2 različni stekališči zaporedja (a_n). Pokažimo, da nobeno ni limita zaporedja (a_n). S tem namenom izberimo tak ε, da velja

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}|s_1 - s_2|\,.$$

Potem je po definiciji stekališča na vsakem od intervalov $(s_1 - \varepsilon, s_1 + \varepsilon)$ in $(s_2 - \varepsilon, s_2 + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) in noben ni na obeh intervalih hkrati. To pomeni, da nobeno od števil s_1 in s_2 ne zadošča temu, da bi v njegovi ε-okolici ležali vsi členi a_n od nekega n naprej in zato nobeno od števil s_1 in s_2 ne more biti limita. ∎

Konvergenco zaporedja je včasih težko potrditi. Pri tem nam pomagajo nekatere lastnosti zaporedij.

a) *Monotonost zaporedja*

   Za motivacijo si poglejmo zaporedje

   $$a_n = \frac{1}{n}\,.$$

   Naštejmo nekaj prvih členov tega zaporedja

   $$(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)\,.$$

   Opazimo, da se členi zaporedja manjšajo.

Definicija 2.11. *Zaporedje* (a_n) *je* naraščajoče, *če velja*

$$a_n \leq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

in je strogo naraščajoče, *če*

$$a_n < a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Zaporedje (a_n) *je* padajoče, *če velja*

$$a_n \geq a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

in je strogo padajoče, *če*

$$a_n > a_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Zaporedje je monotono, *ko je (strogo) narašajoče ali (strogo) padajoče.*

Zgled 67. *Preverimo monotonost zaporedij iz Zgleda 61.*

1. Strogo padajoče.
2. Glede na d ločimo:

$$\begin{array}{lcl} d > 0 & \Rightarrow & \text{strogo naraščajoče zaporedje,} \\ d < 0 & \Rightarrow & \text{strogo padajoče zaporedje,} \\ d = 0 & \Rightarrow & \text{konstanto zaporedje}\,. \end{array}$$

3. Glede na q ločimo:

$$\begin{array}{ccl} q > 1 & \Rightarrow & \text{strogo naraščajoče zaporedje,} \\ q = 1 & \Rightarrow & \text{konstanto zaporedje,} \\ 0 \leq q < 1 & \Rightarrow & \text{strogo padajoče zaporedje,} \\ q < 0 & \Rightarrow & \text{ni monotono}\,. \end{array}$$

4. Naraščajoče zaporedje.
5. Ni monotono zaporedje.

b) *Omejenost zaporedja*

Definicija 2.12. *Zaporedje* (a_n) *je* navzgor omejeno, *če obstaja tak* M *iz* $\mathbb{R}$, *da velja*

$$a_n \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

in je navzdol omejeno, *če obstaja tak* m *iz* $\mathbb{R}$, *da velja*

$$a_n \geq m,\ \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Zaporedje je omejeno, *ko je navzdol in navzgor omejeno.*

Opazimo, da je zaporedje (a_n) (navzgor/navzdol) omejeno, ko je množica njegovih členov $\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ (navzgor/navzdol) omejena in v tem smislu ne gre za nov pojem.

Zgled 68. *Preverimo omejenost zaporedij iz Zgleda 61.*

1. $M \geq 1, m \leq 0$.
2. Glede na d ločimo:

$$\begin{array}{lll} d > 0 & \Rightarrow & m \leq a_1,\ M \text{ ne obstaja}, \\ d < 0 & \Rightarrow & M \geq a_1,\ m \text{ ne obstaja}, \\ d = 0 & \Rightarrow & m = M = a_n. \end{array}$$

3. Glede na q ločimo:

$$\begin{array}{clc} q > 1 & \Rightarrow & m \leq a_1,\ M \text{ ne obstaja}, \\ q = 1 & \Rightarrow & m = M = a_1\ , \\ 0 \leq q < 1 & \Rightarrow & m = 0, M = a_1 \text{ ali } M = 0, m = a_1, \\ -1 < q < 0 & \Rightarrow & m \leq -|a_1|, M \geq |a_1|. \end{array}$$

4. $m \leq F_1$, M ne obstaja.
5. $m \leq -1, M \geq \frac{1}{2}$.

Podobno kot pri omejenosti poljubne množice, sta tudi pri zaporedjih še posebej zanimivi natančni meji.

Definicija 2.13. Supremum M' *zaporedja* (a_n) *je supremum množice njegovih členov*

$$M' = sup\,\{a_n|\, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Infimum m' *zaporedja* (a_n) *je infimum množice njegovih členov*

$$m' = inf\{a_n|n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Pišemo

$$M' = sup\,(a_n) \quad in \quad m' = inf(a_n)\,.$$

Zgled 69. *Poiščimo natančne meje (omejenih) zaporedij iz Zgleda 61.*

1. $M' = 1, m' = 0$.
2. ,3. Če obstajajo, je vsak infimum obenem tudi minimum in vsak supremum je maksimum.
4. $m' = F_1$, M' ne obstaja.

5. $m' = -1, M' = \frac{1}{2}$.

Izrek 2.14. *Vsako monotono in omejeno zaporedje je konvergentno.*

Dokaz. Naj bo (a_n) naraščajoče in omejeno zaporedje in naj bo $M' = \sup(a_n)$. Pokazali bomo, da je $M' = \lim_{n\to\infty} a_n$:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - M'| < \varepsilon\,.$$

Izberimo poljuben $\varepsilon > 0$. Tedaj število $M' - \varepsilon$ ni zgornja meja zaporedja, saj sicer M' ne bi bil natančna zgornja meja. Torej obstaja člen zaporedja a_{n_ε} tak, da leži med $M' - \varepsilon$ in M', kar pomeni, da je $a_{n_\varepsilon} > M' - \varepsilon$. Če postavimo indeks tega člena za n_0 v definiciji limite, to je $n_\varepsilon = n_0$, potem za ta ε velja

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - M'| < \varepsilon\,,$$

saj je zaporedje (a_n) po predpostavki naraščajoče, kar pomeni, da je M' res limita zaporedja a_n.

Podobno pokažemo v primeru padajočega zaporedja (a_n), da je $m' = \inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$. ∎

Neposredno iz dokaza sledi naslednja posledica.

Posledica 2.15. *Naj bo (a_n) monotono zaporedje.*

(i) Če je (a_n) naraščajoče in navzgor omejeno, tedaj (a_n) konvergira k supremumu.

(ii) Če je (a_n) padajoče in navzdol omejeno, tedaj (a_n) konvergira k infimumu.

Pomemben primer monotonega in omejenega zaporedja je zaporedje

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Naštejmo približne vrednosti nekaj členov tega zaporedja

$a_1 = 2\,,\ a_2 = 2.25\,,\ a_3 = 2.371,\ a_4 = 2.440\,, \ldots, a_{100} = 2.705\,, \ldots, a_{1000} = 2.717\,, \ldots$

Po Izreku 2.14 obstaja limita tega zaporedja. Izkaže se, da je to iracionalno število, ki je pomembna konstanta[1] in ga označimo z e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \doteq 2.7182818284590\ldots$$

[1]Glej eksponentno in logaritemsko funkcijo.

Poglejmo še, kako računamo z zaporedji in njihovimi limitami. Zaporedja seštevamo, odštevamo, množimo in delimo po členih:

$$\begin{aligned}(a_n \pm b_n) &= (a_1 \pm b_1,\, a_2 \pm b_2, \ldots),\\ (a_n \cdot b_n) &= (a_1 \cdot b_1,\, a_2 \cdot b_2, \ldots),\\ (\frac{a_n}{b_n}) &= (\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots),\ b_i \neq 0,\ \forall\, i \in \mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Naslednji izrek pove, kako računamo s konvergentnimi zaporedji.

Izrek 2.16. *Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Tedaj velja*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = AB$.

Dokaz.

(i) Ker sta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji, velja:

$$\forall\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in}$$

$$\forall\, \varepsilon'' > 0,\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : |b_n - B| < \varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Tako za vsak $n \geq n_0$, kjer je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ velja:

$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (A + B)| &= |(a_n - A) + (b_n - B)|\\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B|\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

(ii) Ker je (b_n) konvergentno zaporedje, je tudi omejeno (sam premisli). Zato obstaja število $M > 0$ tako, da je $|b_n| \leq M$. Ker je (a_n) konvergentno zaporedje, za vsak $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ obstaja tako naravno število n_1, da za vsak $n \geq n_1$ velja $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. Ločimo dva primera:

(a) $A = 0$. Tedaj velja:

$$|a_n \cdot b_n - AB| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon\,.$$

(b) $A \neq 0$. Ker je (b_n) konvergentno zaporedje za vsak $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{|A|} > 0$, obstaja tako naravno število n_2, da za vsak $n \geq n_2$ velja $|b_n - B| < \dfrac{\varepsilon}{|A|}$. Tedaj za vsak $n \geq n_0$, pri čemer je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, velja:

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - A\,B| &= |a_n \cdot b_n - A\,b_n + A\,b_n - A\,B| \\ &= |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \\ &< |b_n(a_n - A)| + |A(b_n - B)| \\ &= |b_n||a_n - A| + |A||b_n - B| \\ &< M\frac{\varepsilon}{M} + |A|\frac{\varepsilon}{|A|} = 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

∎

Iz Izreka 2.16 neposredno sledi posledica.

Posledica 2.17. *Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ in c poljubno realno število. Tedaj velja*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (c\,a_n) = c\,A$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = A - B$.

Izrek 2.18. *Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, pri čemer je vsak člen zaporedja (b_n) različen od 0 in tudi $B \neq 0$. Tedaj velja*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}\,.$$

Dokaz. Pokažimo najprej

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}\,.$$

Preoblikujmo izraz

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{b_n \cdot B}\right| = \left|\frac{1}{b_n}\right| \frac{|b_n - B|}{|B|}\,.$$

Ker je (b_n) konvergentno zaporedje, za $\varepsilon = \frac{|B|}{2}$ obstaja tako naravno število n_1, da za vsak $n \geq n_1$ velja:

$$||b_n| - |B|| \;\leq\; |b_n - B| \;<\; \varepsilon = \frac{|B|}{2}\,.$$

Iz
$$||b_n| - |B|| < \frac{|B|}{2}$$
sledi
$$\begin{aligned} -\frac{|B|}{2} &< \ |b_n| - |B| \ < \frac{|B|}{2} \ / + |B| \\ \frac{|B|}{2} &< \quad |b_n| \quad < \frac{3\,|B|}{2}\,. \end{aligned}$$
Nadaljujmo samo s prvo neenakostjo
$$\begin{aligned} \frac{|B|}{2} &< |b_n| \ / \cdot \tfrac{2}{|B||b_n|} \\ \frac{1}{|b_n|} &< \frac{2}{|B|}\,. \end{aligned}$$

Za $\varepsilon' = \varepsilon\frac{|B|^2}{2} > 0$ obstaja tako naravno število n_2, da za vsak $n \geq n_2$ velja:
$$|b_n - B| < \varepsilon' = \varepsilon\frac{|B|^2}{2}\,.$$
Zato za vsak $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ velja
$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{1}{b_n}\right| \frac{|b_n - B|}{|B|} < \frac{2}{|B|}\,\varepsilon\,\frac{|B|^2}{2}\frac{1}{|B|} = \varepsilon\,.$$
Po točki (ii) Izreka 2.16 je dokaz s tem zaključen.

∎

Zgled 70. *Poiščimo limito zaporedja* $a_n = \dfrac{3n}{4+7n}$.
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4+7n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{4}{n} + \frac{7n}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4\frac{1}{n} + 7} \\ &= \frac{3}{7}\,. \end{aligned}$$

Zgled 71. *Raziščimo zaporedje* $a_n = 2 + \frac{n}{n+1}$ *(monotonost, omejenost, konvergenco, stekališča).*

Zaporedje je naraščajoče ter omejeno z $m \leq a_1$ in $M \geq 3$. Potemtakem je to konvergetno zaporedje, kjer je

$$\begin{aligned}
\sup(2 + \tfrac{n}{n+1}) &= \lim_{n\to\infty}(2 + \frac{n}{n+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \\
&= 2 + 1 = 3\,.
\end{aligned}$$

Infimum zaporedja je $\inf(2 + \frac{n}{n+1}) = a_1 = \frac{5}{2}$.

2.3 Vrste

Številske vrste

Naj bo

$$a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n,\, \ldots$$

zaporedje realnih števil. Izraz

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

imenujemo *številska vrsta* ali na kratko *vrsta*, številom a_1, a_2, ... pravimo *členi vrste*. Vrsto pišemo kot

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

Vrsti lahko le včasih priredimo neko realno število kot njeno vsoto ali vrednost. Pri tem nam pomagajo *delne vsote* S_1, S_2, ...:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Zaporedju (S_n) pravimo *zaporedje delnih vsot*. V primeru, ko je zaporedje delnih vsot (S_n) konvergento, imenujemo njegovo limito S *vsota vrste* in pišemo:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

oziroma

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_n \,.$$

Če število S obstaja, pravimo, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *konvergentna*, sicer je vrsta *divergentna*.

Poglejmo primera konvergentne in divergentne vrste.

Vsota členov geometrijskega zaporedja tvori *geometrijsko vrsto*:

$$a + aq + aq^2 + \cdots \,.$$

Izračunajmo n-to delno vsoto S_n:

$$S_n = a_1 + a_2 + \,\cdots\, + a_n = a + aq + \,\cdots\, + aq^{n-1}$$

Pomnožimo obe strani enakosti s q in poglejmo razliko:

$$\begin{aligned} S_n &= a + aq + \,\cdots\, + aq^{n-1} \\ S_n q &= aq + aq^2 + \,\cdots\, + aq^n \\ \\ S_n &= a\frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Delna vsota S_n bo konvergentna, ko obstaja $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$, kar se zgodi, ko je $|q| < 1$ in je ta limita enaka 0. Za $|q| < 1$ je torej

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q} \,.$$

Vrsta

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$$

je divergentna, saj je zaporedje delnih vsot

$$S_1 = 0,\ S_2 = 1,\ S_3 = 0,\ S_4 = 1,\ \ldots$$

divergentno.

Opazimo, da je v primeru, ko obstaja vsota geometrijske vrste, limita

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} aq^{n-1} = 0\,,$$

kar velja tudi v splošnem. Pred navedbo tega izreka, ki govori o tem, si poglejmo kaj pravi Cauchyjev pogoj, ki je bistvenega pomena za dokaz samega izreka.[2]

Izrek 2.19. *(Cauchyjev pogoj)*
Vrsta

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

je konvergentna natanko tedaj, kadar za vsako pozitivno število ε obstaja tako naravno število n, da je neenakost

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

izpolnjena za vsako naravno število p. Krajše,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \textit{konvergira} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

∎

Izrek 2.20. *Če je vrsta*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

konvergentna, tedaj je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Dokaz. Ker je vrsta konvergentna, zanjo velja Cauchyjev pogoj. Za $p = 1$ dobimo, da za vsako pozitivno število ε obstaja tako naravno število n, da je izpolnjena neenakost

$$|a_{n+1}| < \varepsilon\,,$$

kar pomeni, da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ∎

To pa še ni dovolj, da bi bila vrsta konvergentna, zato je pogoj

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

potreben pogoj za konvergenco vrste, ne pa tudi *zadosten* pogoj.

[2] Cauchyjev pogoj sledi iz izreka o konvergenci Cauchyjevih zaporedij. Ker jih na tem mestu ne omenjamo, lahko radovednejši bralec dokaz najde v [3], na straneh 110 in 124.

Zgled 72. *Pokažimo, da* harmonična vrsta

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ni konvergenta, čeprav je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Z malo računanja opazimo, da za delne vsote velja

$$S_2 \geq \frac{3}{2},\ S_4 > \frac{4}{2},\ S_8 > \frac{5}{2},\ S_{16} > \frac{6}{2},\ S_{32} > \frac{7}{2},\ \ldots\,,$$

oziroma

$$S_{2^k} > \frac{k+2}{2},$$

kar pomeni, da zaporedje S_n ni navzgor omejeno in ker je očitno naraščajoče, ne more biti konvergentno.

Konvergenčni kriteriji

a) *Konvergenca vrst s pozitivnimi členi* indexvrste!s pozitivnimi členi

Navedli bomo nekaj zadostnih pogojev za konvergenco vrst s pozitivnimi členi.

1. PRIMERJALNI KRITERIJ

Definicija 2.21. *Vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *je* majoranta *vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *če je za vsako naravno število* n *izpolnjen pogoj*

$$a_n \leq b_n\,.$$

Pravimo tudi, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ minoranta *vrste* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi je konvergentna, če ima kakšno konvergentno majoranto* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Velja tudi, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi divergentna, če ima kakšno divergentno minoranto* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Zgled 73. *Ali je konvergenta vrsta*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\frac{1}{\sqrt{4\cdot 5}}+\cdots ?$$

Velja

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}}=\frac{1}{n+1}\,,$$

zato je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ *minoranta vrste* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. *Ker je prva vrsta harmonična vrsta brez prvega člena, je divergentna, saj končno mnogo členov ne vpliva na konvergenco vrste. Torej je naša vrsta divergentna.*

2. KVOCIENTNI ali D'ALEMBERTOV KRITERIJ

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\,.$$

Tedaj velja, če je

$$q<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad\text{konvergira,}$$

$$q>1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\quad\text{divergira.}$$

Zgled 74. *Preverimo konvergenco vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}.$$

Po kvocientnem kriteriju je

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{ne^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\frac{1}{e^{2n+1}}=0$$

in zato vrsta konvergira.

3. KORENSKI ali CAUCHYJEV KRITERIJ

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q\,.$$

Tedaj velja, če je

$$q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergira,}$$

$$q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergira.}$$

Zgled 75. *Preverimo konvergenco vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}.$$

Po korenskem kriteriju je

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}e > 1$$

in zato vrsta divergira.

4. RAABEJEV KRITERIJ

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo* q *limita pridruženega zaporedja*

$$q = \lim_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right).$$

Tedaj velja, če je

$$q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergira,}$$

$$q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{divergira.}$$

Zgled 76. *Preučimo konvergenco vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\,.$$

Po Raabejevem kriteriju izračunajmo kvocient

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^3}{n^3} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n+1}{n^2} \\ &= 3 > 1\,. \end{aligned}$$

Ker je $q > 1$, je zaporedje konvergentno.

Opomba. Za kriterije 2., 3. in 4. je v primeru, ko q ne obstaja, ustrezna vrsta divergentna. Kadar je $q = 1$, ti kriteriji ne dajo odgovora na vprašanje o konvergenci vrste.

b) *Konvergenca alternirajočih vrst*

Alternirajoča vrsta je vrsta s pozitivnimi in negativnimi členi, ki si izmenično sledijo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n\,,\ a_n \geq 0\,.$$

Izrek 2.22. *(Leibnizov kriterij)*
Alternirajoča vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots$$

je konvergentna, če je

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq \cdots \quad in \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$$

Dokaz. Naj bo k poljubno naravno število in S_{2k} delna vsota prvih $2k$ členov vrste. Ker je

$$S_{2k+2} - S_{2k} = a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq 0\,,$$

je podzaporedje delnih vsot (S_{2k}) monotono naraščajoče. Ocena

$$\begin{aligned} S_{2k} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + a_{2k-1} + a_{2k} = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \leq a_1 \end{aligned}$$

kaže na to, da je podzaporedje (S_{2k}) navzgor omejeno. Ker je podzaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, obstaja limita $L = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}$. Ker za vsak k velja

$$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$$

je

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = L + 0 = L\,.$$

Podzaporedje sodih delnih vsot (S_{2k}) in podzaporedje lihih delnih vsot (S_{2k+1}) konvergirata k številu L, zato je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

in je alternirajoča vrsta konvergentna. ∎

Zgled 77. *Preverimo konvergenco vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}\,.$$

Vrsta je alternirajoča, absolutne vrednosti členov tvorijo padajoče zaporedje in konvergirajo k 0, zato je po Leibnizovem kriteriju vrsta konvergentna.

c) *Konvergenca vrst s poljubnimi členi* indexvrste!s poljubnimi členi

Definicija 2.23. *Vrsta* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je* absolutno konvergentna*, če konvergira pridružena vrsta* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *absolutnih vrednosti njenih členov.*

Če za konvergentno vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *pridružena vrsta* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *divergira, govorimo o* pogojni konvergenci.

V primeru vrst s poljubnimi členi nas torej zanima absolutna konvergenca vrste. V ta namen nimamo novih kriterijev, temveč le prilagodimo kriterije za vrste s pozitivnimi členi na absolutno vrednost.

Zgled 78. *Preverimo konvergenco vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\,.$$

Uporabi Raabejev kriterij na pridruženi vrsti s pozitivnimi členi:

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}-1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2} \\ &= 2>1\,. \end{aligned}$$

Vrsta je zato absolutno konvergentna.

Do sedaj smo člene vrste obravnavali kot realna števila. Na podoben način kot realne vrste obravnavamo tudi kompleksne vrste, le da je sedaj absolutna konvergenca vezana na definicijo absolutne vrednosti kompleksnega števila.

Zgled 79. *Preučimo konvergenco vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\,.$$

Uporabimo kvocientni kriterij:

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{i^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{i^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{i}{n+1}=0\,.$$

Vidimo, da je vrsta absolutno konvergentna.

Kompleksne vrste poveže z realnimi naslednji izrek.

Izrek 2.24. *Kompleksna vrsta* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+i\,b_n)$ *je konvergentna z vsoto* $S=A+i\,B$ *natanko tedaj, ko sta konvergentni realni vrsti* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *in* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n$*, katerih vsoti sta* A *oziroma* B*.*

Dokaz. Označimo posamezna zaporedja delnih vsot:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n) \longmapsto S_n\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n \longmapsto A_n\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n \longmapsto B_n\,.$$

Tedaj je

$$S_n = A_n + iB_n\,.$$

($\Rightarrow$) Naj bo $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + i\,b_n)$ konvergentna vrsta z vsoto $S = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Tedaj je $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = a + ib$, kar pomeni:

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\,n \geq n_0 : |S_n - (a+ib)| < \varepsilon\,.$$

Torej velja

$$\varepsilon > |S_n - a - ib| = |A_n - a + i(B_n - b)| = \sqrt{(A_n-a)^2 + (B_b - b)^2}$$

in sledi

$$\sqrt{(A_n-a)^2} = |A_n - a| < \varepsilon\,,$$

$$\sqrt{(B_n-b)^2} = |B_n - b| < \varepsilon\,,$$

kar pomeni, da je $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a$ in $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = b$.

($\Leftarrow$) Naj bo $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a$ in $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = b$. Tedaj

$$\forall\,\frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \exists\,n_1 \in \mathbb{N},\ \forall\,n \geq n_1 : |A_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in}$$

$$\forall\,\frac{\varepsilon}{2} > 0,\ \exists\,n_2 \in \mathbb{N},\ \forall\,n \geq n_2 : |B_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Naj bo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Tedaj $\forall\,n \geq n_0$ velja

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > |A_n - a| + |B_n - b| = \sqrt{(A_n-a)^2} + \sqrt{(B_n-b)^2}\\ &\leq \sqrt{(A_n-a)^2 + (B_n-b)^2} = |S_n - (a+ib)|\,,\end{aligned}$$

kar pomeni, da je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a + ib$

$\blacksquare$

Konvergentne vrste seštevamo in množimo s skalarjem po členih. Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentni vrsti in c poljubno realno število. Tedaj je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)\,,$$

$$c\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n\,,$$

pri čemer sta rezultata prav tako konvergentni vrsti. Pri računanju z absolutno konvergentnimi vrstami lahko poljubno premešamo vrstni red členov, kar pa ne velja za pogojno konvergentne vrste.

Funkcijske vrste

Doslej smo obravnavali samo take vrste, pri katerih so bili posamezni členi konstante. Vzemimo sedaj vrsto

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots\,,$$

kjer so členi $f_k(x)$ funkcije spremenljivke x. Tako vrsto imenujemo *funkcijska vrsta.* Obstaja naj taka množica $D \subseteq \mathbb{R}$, na kateri so vsi členi $f(x)$ definirani. Če damu argumentu kako vrednosti c iz D, dobimo številsko vrsto

$$f_1(c) + f_2(c) + f_3(c) + \cdots\,,$$

ki je bodisi konvergentna bodisi divergentna.

Zgled 80. *Preučimo konvergenco vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{n-1}}\,.$$

To je geometrijska vrsta (definirana za poljuben $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) s kvocientom $\frac{1}{x}$ in je konvergentna za vsak $|x| > 1$, ter divergentna za vsak $|x| < 1$, $x \neq 0$. Za $x = 1$ in $x = -1$ dobimo prav tako divergentni številski vrsti.

Za ugotavljanje območja konvergentnosti funkcijske vrste uporabljamo že poznane kriterije konvergence številskih vrst.

Podobno kot za številsko vrsto naj bo $S_n(x)$ konvergentno zaporedje delnih vsot funkcijske vrste $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in $S(x)$ njena vsota. Za vsak x dobimo pripadajočo številsko vrsto in če so le-te konvergentne, pravimo, da funkcijska vrsta *konvergira po točkah*. Poznamo še drugo vrsto konvergence, in sicer enakomerno konvergenco funkcijske vrste.

Definicija 2.25. *Funkcijska vrsta*

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

je na D enakomerno konvergentna*, če za vsako pozitivno številu ε obstaja tak n_o, da je neenačba*

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

izpolnjena za vsak $n \geq n_o$ in za poljuben $x \in D$.

To pomeni, da mora za vsak $x \in D$ obstajati skupen indeks n_0, za katerega je izpolnjena zgornja neenačba. V jeziku Cauchyjevega pogoja lahko enakomerno konvergenco zapišemo kot:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b]\,.$$

Intuitivno bi lahko rekli, da je razlika med konvergenco po točkah in enakomerno konvergenco v tem, da ima pri običajni konvergenci vsak x svoj n, za katerega je izpolnjena zgornja neenakost, medtem ko morajo imeti pri enakomerni konvergenci vsi x-i skupen n.

Enakomerno konvergenco funkcijskih vrst je težko preverjati, zato nam je v pomoč *Weierstrassov kriterij.*

Izrek 2.26. (Weierstrassov kriterij)
Na danem območju D funkcijska vrsta

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots$$

enakomerno konvergira, kadar obstaja taka konvergentna številska vrsta

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\,,$$

da za vsak $x \in D$ in $n \in \mathbb{N}$ velja neenakost

$$|f_n(x)| \leq a_n\,.$$

Vrsta $\sum a_n$ je potem majoranta funkcijske vrste $\sum f_n(x)$. □

Zgled 81. *Ali je vrsta*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{2^k}$$

enakomerno konvergentna na $\mathbb{R}$*?*

Naredimo oceno

$$\left|\frac{\sin(kx)}{2^k}\right| = \frac{|\sin(kx)|}{2^k} \leq \frac{1}{2^k}\,.$$

Ker je to konvergentna številska vrsta, je funkcijska vrsta enakomerno konvergentna na $\mathbb{R}$.

Najbolj pomembne funkcijske vrste so *potenčne vrste*, ki so oblike

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^{n-1}\,,$$

kjer je (a_n) neko zaporedje. Pogosteje pišemo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

Uporabimo npr. korenski kriterij za preučitev absolutne konvergence po točkah:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n\, x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1\,.$$

Od tod sledi

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,,$$

kar pomeni, da je vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutno konvergentna na intervalu

$$(-R, R),\ \text{kjer} \quad \text{je} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}\,.$$

Pri tem postavimo

$$R = \infty,\ \text{če} \quad \text{je} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

in če je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty\,,$$

vrsta ni nikjer absolutno konvergentna. Lastnosti vrste na krajiščih intervala moramo posebej raziskati.

Podobno bi lahko uporabili kvocientni kriterij:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1$$

Od tod sledi

$$|x|<\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

in vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ je absolutno konvergentna na intervalu

$$(-R,R),\ \text{kjer}\quad \text{je}\quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\,.$$

Če je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=0\,,$$

vrsta ni nikjer absolutno konvergentna. Lastnosti vrste na krajiščih intervala moramo tudi v tem primeru posebej raziskati.

Zgled 82. *Določimo območje konvergence vrste*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\,.$$

Uporabimo kvocienti kriterij za absolutno konvergenco po točkah:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{|x|^n}{n}}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=|x|<1\,.$$

Vrsta je torej absolutno konvergentna na $(-1,1)$, izven tega intervala je divergentna, na krajiščih intervala pa moramo konvergenco posebej preveriti.

Za $x=1$ dobimo harmonično vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,,$$

za katero že vemo, da je divergentna.

Za $x=-1$ dobimo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,,$$

ki je pogojno konvergentna.

2.4 Limita in zveznost funkcije

V tem razdelku bomo definirali limito funkcije in za tem še zveznost.

Limita funkcije

Definicija 2.27. *Naj bo funkcija f definirana v vsaki točki neke okolice točke a, razen morda v točki a sami. Število L je* limita funkcije *f v točki a, če velja naslednji sklep:*

"Za vsako pozitivno število ε obstaja tako pozitivno število δ, da če za vsak $x \neq a$ velja $|x - a| < \delta$, potem mora veljati $|f(x) - L| < \varepsilon$."

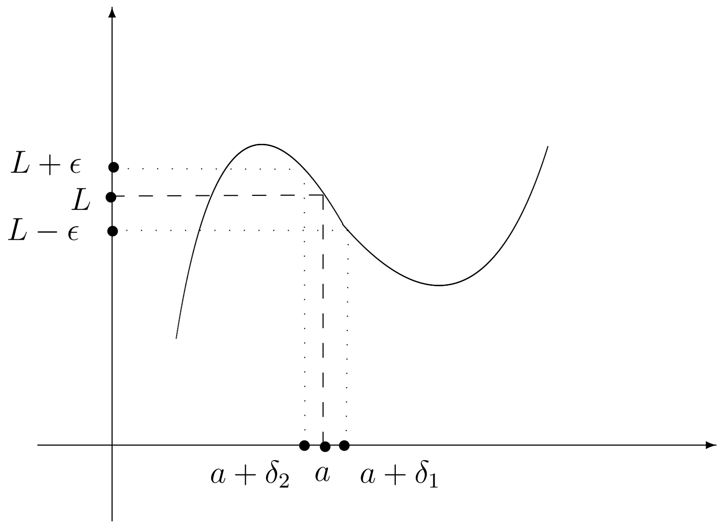
Pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ali} \quad f(x) \overset{x \to a}{\longrightarrow} L\,.$$

Krajše:

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, \forall\, x \neq a : \, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Slike 2.37 ponazarja definicijo limite funkcije v točki a. Za okolico δ izberemo manjšo od obeh vrednosti δ_1 in δ_2.



Slika 2.37: Limita v točki a.

Nekateri zanimivi primeri so:

- f ni definirana v točki a in ima limito L,

- f je definirana v točki a in ima limito L, ampak $f(a) \neq L$,
- f je definirana v točki a in ima limito L ter $f(a) = L$,
- f nima limite L, ima pa limito, ko se bližamo z desne oz. leve strani proti točki a.

Definicija 2.28. *Funkcija f ima v a* desno limito*, L^+, če velja:*

"Za vsako pozitivno število ε obstaja tako pozitivno število δ, da za vsak $x \in (a, a+\delta)$ velja $|f(x) - L^+| < \varepsilon$."

Krajše:

$$L^+ = \lim_{x \downarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, \forall\, x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L^+| < \varepsilon\,.$$

Podobno definiramo levo limito*, L^-, funkcije f v točki a:*

$$L^- = \lim_{x \uparrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, \forall\, x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L^-| < \varepsilon\,.$$

Iz definicije desne in leve limite sledi v točki sledi, da obstaja limita L natanko tedaj, ko sta leva limita L^- in desna limita L^+ enaki:

$$L = L^+ = L^- \Leftrightarrow L = \lim_{x \to a} f(x)\,.$$

Zgled 83. *Poiščimo levo in desno limito funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ v točki* 0.

Premislimo, kaj se dogaja s funcijo f, ko se bližamo točki 0 enkrat iz pozitivne strani in drugič iz negativne. Ko se bližamo iz desne strani, gredo vrednosti izraza $\frac{1}{x}$ proti pozitivni neskončnosti, saj gre imenovalec proti vedno manjšim pozitivnim številom:

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty\,.$$

Izraz $e^{\frac{1}{x}}$ zato v neskončnosti narašča, kar pomeni, da je

$$L^+ = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0\,.$$

V primeru leve limite gredo vrednosti izraza $\frac{1}{x}$ proti negativni neskončnosti:

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty\,,$$

zato gre $e^{\frac{1}{x}}$ proti 0 in leva limita je

$$L^- = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1\,.$$

Pri računanju z limitami velja podobno kot pri limiti zaporedij.

Izrek 2.29. *Naj bo* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *in* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. *Tedaj velja:*

(i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,

(ii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = A\, B$,

(iii) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Dokaz. Za ilustracijo pokažimo točko (i), medtem ko je (ii) in (iii) težje dokazati. Izberimo $2\,\varepsilon > 0$. Ker je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, za vsak $\varepsilon > 0$ obstajata δ_1, δ_2 taka, da velja:

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \varepsilon\,.$$

Tedaj velja:

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$$

za vsak $|x - a| < \delta'$, kjer je $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ker je

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| \geq |f(x) - A + g(x) - B| = |(f(x) + g(x)) - (A + B)|\,,$$

dobimo

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < 2\,\varepsilon\,,$$

za vsak $|x - a| < \delta'$. ∎

Definicija 2.30. *Funkcija f ima limito L, ko gre x proti neskončno, če za vsako pozitivno število ε obstaja tak $M > 0$, da $|f(x) - L| < \varepsilon$ velja za vsak $x > M$.*

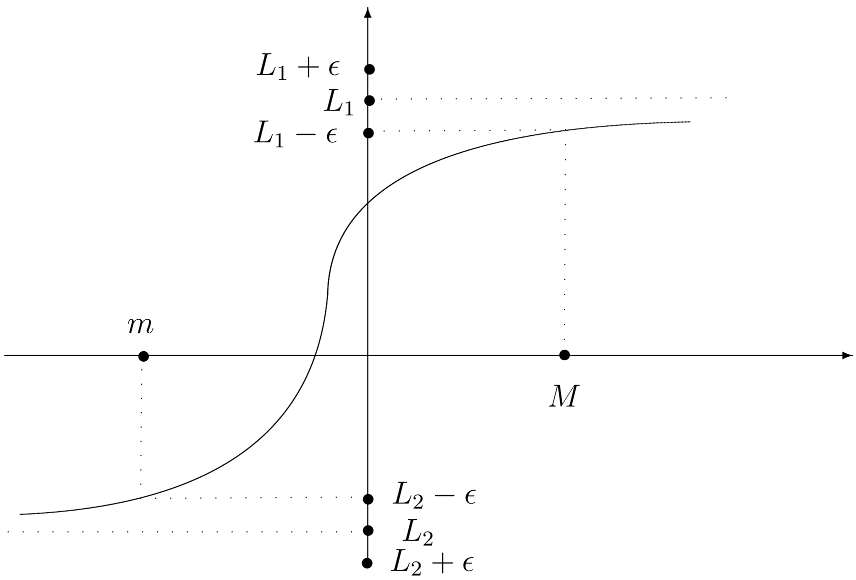
Krajše:

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0, \exists\,M > 0, \forall\,x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Podobno definiramo limito, ko gre x proti negativni neskončnosti:

$$L = \lim_{x\to-\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0, \exists\,m < 0, \forall\,x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Na Sliki 2.38 vidimo primer takšnih limit.



Slika 2.38: Limita funkcije, ko gre x proti neskončnosti.

Zgled 84. *Izračunajmo* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$.

Limita je enaka 0, ker je števec konstanten, imenovalec pa narašča v neskončnost.

Limito funkcije v točki a lahko pišemo tudi kot:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)\,.$$

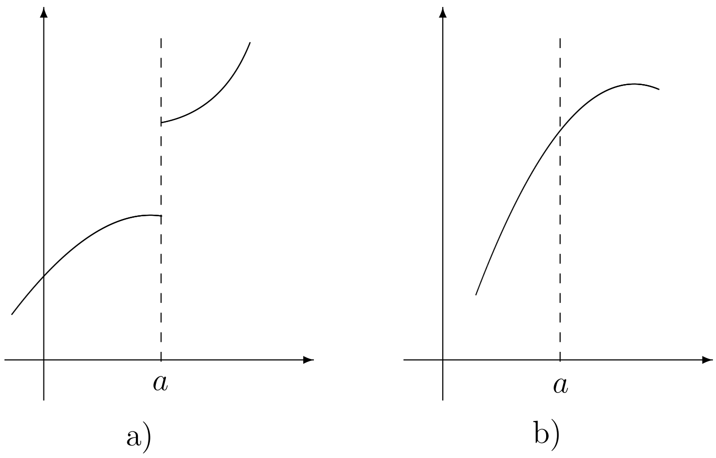
Zveznost funkcije

Definicija 2.31. *Naj bo funkcija f definirana na neki okolici točke a. Pravimo, da je f* zvezna *v a, če velja:*

"Za vsako pozitivno število ε obstaja tako pozitivno število δ, da če je $|x-a|<\delta$, potem velja $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$."

Krajši zapis za zveznost funkcije f v točki a:

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon\,.$$



Slika 2.39: a) V točki a nezvezna funkcija in b) zvezna funkcija.

Definicija 2.32. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je* zvezna*, če je zvezna v vsaki točki svoje domene D.*

Na Sliki 2.39 vidimo primera pod a) nezvezne in pod b) zvezne funkcije.

Potrebni pogoji za zveznost funkcije f v točki a so:

- f je definirana v točki a,
- f ima limito v točki a,
- limita v točki a je enaka funkcijski vrednosti $f(a)$.

Spodnje situacije vodijo v nezveznost funkcije f v točki a:

- funkcija f v točki a ni definirana.
- f v točki a nima limite,
- f ima limito v točki a, a ni enaka $f(a)$.

Izrek 2.33. *Funkcija f je zvezna v točki a natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

Dokaz.

($\Rightarrow$) Ker je f zvezna v točki a, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da velja:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,,$$

kar pomeni, $f(a)$ zadošča pogojem za limito funkcije f v točki a.

($\Leftarrow$) Ker je
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,,$$
obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da za vsak $x \neq a$ velja:
$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\,.$$
Če je $x = a$, tedaj je
$$|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon\,,$$
s čimer je dokaz zaključen.

∎

Izrek 2.34. *Če sta funkciji f in g zvezni v točki a in je $c \neq 0$ neko število, potem so v a zvezne tudi funkcije*

(i) $f \pm g$,

(ii) $c \cdot f$,

(iii) $f \cdot g$,

(iv) $\dfrac{f}{g}$, *če je* $g \neq 0$.

Dokaz. Sledi neposredno iz Izreka 2.29. ∎

Naslednji izrek podaja zelo pomembno lastnost limite kompozituma zveznih funkcij, ki jo bomo v nadaljevanju potrebovali. Izreka ne bomo dokazali.

Izrek 2.35. *Naj bo f zvezna v točki b in $\lim_{x\to a} g(x) = b$. Potem je*
$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)\,.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati moramo, da obstaja $\delta > 0$ tak, da za vsak $x : |x-a| < \delta$ velja:
$$|f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon\,.$$
Iz zveznosti funkcije f v točki b sledi, da za dani ε obstaja $\delta_1 > 0$ tak, da za vsak y velja, če $|y - b| < \delta_1$, tedaj je
$$|f(y) - f(b)| < \varepsilon\,.$$
Ker je $\lim_{x\to a} g(x) = b$, mora za vsak $\varepsilon_1 > 0$, torej tudi za $\varepsilon_1 := \delta_1$, obstajati $\delta > 0$ tak, da bo za vsak $x : |x-a| < \delta$ veljalo
$$|g(x) - b| < \delta_1\,.$$
Ker je $g(x) = y$, smo dokaz zaključili. ∎

Nekatere pomembnejše limite

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

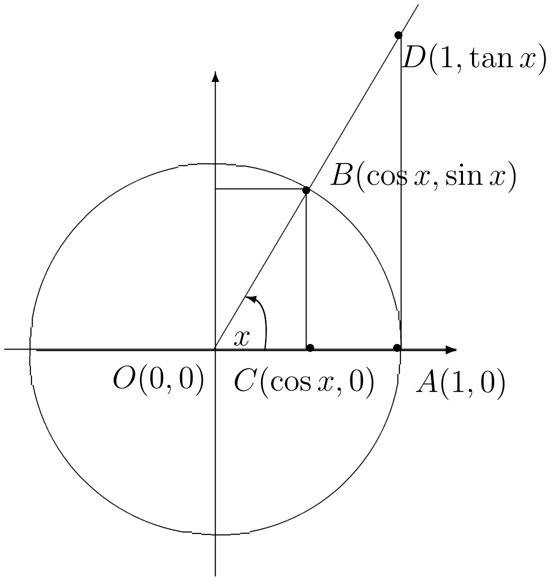
Izberimo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ in naj bo $A(1,0)$, $B(\cos x, \sin x)$, $C(\cos x, 0)$, $D(1, \tan x)$ ter $O(0,0)$, kot je to razvidno s Slike 2.40. Nadalje naj bo S_1 ploščina trikotnika AOB, S_2 ploščina trikotnika AOD in S ploščina krožnega izseka AOB. Poudarimo, da je ploščina krožnega izseka s polmerom r enaka $r^2\frac{x}{2}$. Tedaj velja:

$$
\begin{array}{ccccc}
S_1 & \leq & S & \leq & S_2 \\[1ex]
\dfrac{1}{2}\sin x & \leq & \dfrac{x}{2} & \leq & \dfrac{1}{2}\tan x \quad / \cdot 2 \,/ : \sin x \\[1ex]
1 & \leq & \dfrac{x}{\sin x} & \leq & \dfrac{1}{\cos x} \\[1ex]
1 & \geq & \dfrac{\sin x}{x} & \geq & \cos x \\[1ex]
 & & x \to 0 & & \\[1ex]
1 & \geq & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} & \geq & \lim\limits_{x\to 0} \cos x \\[1ex]
 & & \Downarrow & & \\[1ex]
 & & \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 & &
\end{array}
$$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Pri zaporedjih smo omenili, da je $\lim_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n = \mathrm{e}$. Naj bo x poljubno pozitivno število in naj bo n celi del števila x. Tedaj je $n \leq x < n+1$ in velja naslednje:

$$
\begin{array}{lcl}
\frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} & \Rightarrow & (1+\frac{1}{x})^x \leq (1+\frac{1}{n})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) \\[1ex]
\frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} & \Rightarrow & (1+\frac{1}{x})^x > (1+\frac{1}{n+1})^x > (1+\frac{1}{n+1})^n = \\[1ex]
 & & (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\frac{n+1}{n+2}
\end{array}
$$



Slika 2.40: Izpeljava limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Zato velja

$$\begin{array}{ccccc}
(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\frac{n+1}{n+2} & < & (1+\frac{1}{x})^x & \leq & (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) \\
\downarrow n\to\infty & & & & \downarrow n\to\infty \\
\mathrm{e}\cdot 1 & < & (1+\frac{1}{x})^x & \leq & \mathrm{e}\cdot 1
\end{array}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \mathrm{e}$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

V b) vpeljemo $y = \frac{1}{x}$ in limita je neposredna posledica.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$

Izračunajmo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e = \frac{\log_e e}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a}\,.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

V d) upoštevamo, da je logaritemska osnova enaka e.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

Vpeljemo $u=a^x-1$ in dobimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_a(u+1)}=\lim_{u\to 0}\left(\frac{\log_a(u+1)}{u}\right)^{-1}=\ln a\,.$$

Zvezne funkcije na zaprtem intervalu

V zadnjem razdelku smo spoznali definicijo zveznosti funkcije, sedaj pa nas bodo zanimale lastnosti funkcij, ki so zvezne na zaprtem intervalu. Izkaže se, da imajo le-te veliko lepih lastnosti.

Zanimajo nas funkcije na zaprtih intervalih

$$f:[a,b]\to\mathbb{R}\,.$$

Definicija 2.36. *Funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je* zvezna*, če je zvezna v vsaki točki odprtega intervala (a,b) in v točki a obstaja desna limita, ki je enaka $f(a)$ in v točki b leva limita, ki je enaka $f(b)$:*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ 0<h<\delta\Rightarrow$$

$$|f(a)-f(a+h)|<\varepsilon\ \wedge\ |f(b)-f(b-h)|<\varepsilon\,.$$

S $\mathcal{C}[a,b]$ označujemo množico zveznih funkcij na zaprtem intervalu $[a,b]$.

V zvezi z zveznostjo funkcij na zaprtem intervalu velja nekaj pomembnih izrekov.

Izrek 2.37. *Naj bo $f\in\mathcal{C}[a,b]$ in $f(a)\cdot f(b)<0$. Tedaj obstaja $c\in(a,b)$ takšna, da je $f(c)=0$.*

Dokaz. Naj bo $f(a)<0$ in $f(b)>0$ ter definirajmo množico

$$A=\{x|x\in[a,b]\wedge f(x)<0\}\,.$$

Množica A ni prazna in je navzgor omejena, zato obstaja njena natančna zgornja meja $M=\sup A$. Ker je $M\in[a,b]$, obstaja $f(M)$, za katerega je izpolnjena natanko ena od treh možnosti:

$f(M)<0$**:** V tem primeru je $M\in[a,b)$. Naj bo najprej $M\in(a,b)$. Ker je f zvezna v M, obstaja tak $\delta>0$, da velja:

$$|x-M|<\delta\Rightarrow f(x)<0\,.$$

Potemtakem za vsak $x_1\in(M,M+\delta)$ velja, da je $f(x_1)<0$, kar je v protislovju s tem, da je M supremum. Prav tako ne more biti $M=a$.

$f(M) > 0$: Sklepamo podobno kot v prvem primeru.

$f(M) = 0$: To je res, ker je edina preostala možnost.

Podobno bi postopali v primeru, ko je $f(a) > 0$ in $f(b) < 0$. ∎

Zgled 85. *Naj bo $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x) = -x^2 + 4$. Pokažimo, da ima f na intervalu $[0,4]$ ničlo.*

Ker je $f(0) = 4 > 0$ in $f(4) = -12 < 0$, po Izreku 2.37 obstaja ničla funkcije f na $[0,4]$ in sicer je to točka $x = 2$.

Definicija 2.38. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$* navzgor omejena*, če obstaja $M \in \mathbb{R}$ tak, da je*

$$f(x) \leq M, \; \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Podobno je f navzdol omejena*, če obstaja $m \in \mathbb{R}$ tak, da je*

$$f(x) \geq m, \; \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Števili M in m imenujemo zgornja *oz.* spodnja meja *funkcije f na $[a,b]$.*

Definicija 2.39. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supremum M' funkcije f je supremum množice funkcijskih vrednosti*

$$M' = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}\,.$$

Infimum M' funkcije f je infimum množice funkcijskih vrednosti

$$m' = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}\,.$$

Uporabljamo zapisa

$$M' = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \quad in \quad m' = \inf_{x \in [a,b]} f(x)\,.$$

Naslednji izrek podaja zvezo med zveznostjo funkcij in omejenostjo. Sam dokaz zahteva poglobljeno znanje o zaporedjih, zato je namenjen zahtevnejšim bralcem.

Izrek 2.40. *Vsaka zvezna funkcija definirana na zaprtem intervalu je omejena.*

Dokaz. $*$ Recimo, da $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ni navzgor omejena. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja tak $x_n \in [a,b]$, da je $x < f(x_n)$. Obstaja torej zaporedje (x_n), $x_n \in [a,b]$, ki je očitno omejeno in zato vsebuje konvergentno podzaporedje (x_{n_k}), ki konvergira k točki $c \in [a,b]$. Pridruženo zaporedje $(f(x_{n_k}))$ potemtakem divergira v neskončnost, kar je v nasprotju z zveznostjo funkcije f na $[a,b]$.
Podobno pokažemo, da je f navzdol omejena.

∎

Zgled 86. *Preverimo Izrek 2.40 na primerih.*

1. *Naj bo* $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom* $f(x) = x^2$.

   Vidimo, da je f zvezna in po Izreku 2.40 omejena. Vidimo, da je $M \geq f(3)$ in $m \leq f(0)$.

2. *Naj bo* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = 0 \\ \\ \frac{1}{x} & ; \quad \text{sicer}\,. \end{cases}$$

   Vidimo, da f ni omejena in po Izreku 2.40 zato ni zvezna.

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$. Če natančna zgornja meja M' pripada zalogi vrednosti funkcije f, tedaj je M' *maksimum* funkcije f na D:

$$M' = \max_{x \in D} f(x)\,.$$

Podobno, če natančna spodnja meja m' pripada zalogi vrednosti funkcije f, tedaj je m' *minimum* funkcije f na D:

$$m' = \min_{x \in D} f(x)\,.$$

Zgled 87. *Če obstajata, poiščimo minimum in maksimum funkcij.*

1. *Naj bo* $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom* $f(x) = x^2$.

   Maksimum doseže v točki 2 in sicer je $M' = 4$, minimum pa v točki 1 in velja $m' = 1$.

2. *Naj bo* $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ *podana s predpisom* $f(x) = \tan x$.

   Minimum doseže v točki 0 in sicer je $m' = 0$, maksimuma pa nima.

3. *Naj bo* $f : \mathbb{R}^+ \to (0, \frac{\pi}{2})$ *podana s predpisom* $f(x) = \text{atan}\, x$.

   Nima maksimuma, niti minimuma.

Na Zgledu 87 smo videli, da je od treh primerov le zvezna funkcija na zaprtem intervalu dosegla minimum in maksimum.

Izrek 2.41. *Zvezna funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *doseže na intervalu* $[a, b]$ *minimum in maksimum.*

Dokaz. Pokažimo za primer maksimuma. Po Izreku 2.40 obstaja natančna zgornja meja M' funkcije f. Pokažimo, da je $M' = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

Ker je M' supremum funkcije f, velja $M' - f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Tam, kjer je $M' - f(x) > 0$, je kvocient $\frac{1}{M'-f(x)}$ zvezna funkcija. Če funkcija f ne bi nikjer zavzela vrednosti M', bi bil ta kvocient povsod na $[a, b]$ zvezen in po izreku 2.40 omejen. Tedaj bi $\exists A > 0$:

$$\frac{1}{M' - f(x)} \leq A, \, \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Od tod sledi

$$f(x) \leq M' - \frac{1}{A}$$

in M' ne bi bil supremum funkcije. Zato torej obstaja $c \in [a, b] : f(c) = M'$. Podobno pokažemo za minimum funkcije. ∎

Za konec dokažimo zadnji izrek v zvezi z zveznostjo funkcij na zaprtem intervalu, ki se glasi.

Izrek 2.42. *Naj bo* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija. Tedaj zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom.*

Dokaz. Naj bo

$$m' = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{in} \quad M' = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

ter $f(\alpha) = m'$ in $f(\beta) = M'$. Točki α in β obstajata zaradi Izreka 2.41.

Če je $\alpha = \beta$, potem je $f(x) = m' = M'$ za vsak $x \in [a, b]$ in ni kaj dokazovati.

Predpostavimo sedaj, da je $\alpha < \beta$. Definirajmo novo funkcijo $\Psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\Psi(x) = f(x) - C\,,$$

kjer je C poljubna vrednost med m' in M'. Trdimo, da obstaja tak $\varphi \in [a, b]$, da je $f(\varphi) = C$. Ker je f zvezna, je tudi nova funkcija Ψ zvezna za vsak $C \in [m', M']$. Izračunajmo

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha) &= f(\alpha) - C = m' - C < 0\,,\\ \Psi(\beta) &= f(\beta) - C = M' - C > 0\,.\end{aligned}$$

Po Izreku 2.37 obstaja $\varphi \in [\alpha, \beta]$ tak, da je $\Psi(\varphi) = 0$ in zato $f(\varphi) - C = 0$. ∎

Iz Izreka 2.42 sledi naslednja posledica.

Posledica 2.43. *Zaloga vrednosti zvezne funkcije definirane na* $[a, b]$ *je interval* $[m', M']$*, kjer je*

$$m' = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \textit{in} \quad M' = \max_{x \in [a,b]} f(x)\,.$$

2.5 Naloge z rešitvami

2.5.1 Pregled elementarnih funkcij

1. Kateri od naslednjih predpisov je preslikava

   (a) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = x^4 - x^2$,

   (b) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = \sqrt{x^4 + x^2}$,

   (c) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y^2 = x^2 + x + 1$,

   (d) $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ y^2 = x^2 + x + 1$?

   Rešitev.

   (a) Je.

   (b) Je.

   (c) Ni (glej kodomeno).

   (d) Je (glej kodomeno).

2. Preveri injektivnost in surjektivnost za naslednje preslikave

   (a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$,

   (b) $f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2$,

   (c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ f_3(x) = x^2$,

   (d) $f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f_4(x) = x^2$.

   Rešitev.

   (a) Ni injektivna, ni surjektivna.

   (b) Je injektivna, ni surjektivna.

   (c) Ni injektivna, je surjektivna.

   (d) Je injektivna, je surjektivna.

3. Določi naravno definicijsko območje realnih funkcij realne spremenljivke:

   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$,

   (b) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x$,

   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$,

   (d) $f(x) = \dfrac{x}{2x^2 - 8}$,

   (e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24}$,

(f) $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$,

(g) $f(x) = \sqrt{\tan x}$,

(h) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$,

(i) $f(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$,

(j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2+4}{x^2-4x}}$,

(k) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$,

(l) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{x-5}{x^2-1}\right)$,

(m) $f(x) = e^{\sqrt{|x|-x}}$,

(n) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{x+1}}}{\ln(x+1)}$,

(o) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-3}{2x-8}\right) + \dfrac{\sqrt{x+3}}{\cos(\pi x)}$,

(p) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+5} + \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{4-x}}$.

Rešitev.

(a) $D_f = \mathbb{R}$ *(kvadratna funkcija).*

(b) $D_f = \mathbb{R}$ *(polinom četrte stopnje).*

(c) $D_f = \mathbb{R}$, *saj* $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

(d) $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, *saj je* f *racionalna funkcija in* $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$*).*

(e) $D_f = \mathbb{R} - \{-4, -2, 1, 3\}$, *saj je* f *racionalna funkcije in* $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$. *Namig: pole poiščemo s pomočjo Hornerjevega algoritma.*

(f) $D_f = [-2, 1]$, *saj mora veljati* $-x^2 - x + 2 \geq 0$. *Tako je*

$$-x^2 - x + 2 = -(x-1)(x+2) \geq 0$$

in to velja na intervalu $[-2, 1]$.

(g) $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$, *mora veljati* $\tan x \geq 0$.

(h) $D_f = (e, \infty)$, *saj*

$$\begin{aligned} \ln(\ln x) &> 0 \\ \ln x &> 1 \\ x &> e. \end{aligned}$$

(i) *$D_f = (4, \infty)$, saj*

$$\begin{aligned} \log_3(\log_4 x) &> 0 \\ \log_4 x &> 1 \\ x &> 4. \end{aligned}$$

(j) *$D_f = [-2, 0) \cup [2, 4)$, saj gledamo*

$$\frac{-x^2 + 4}{x^2 - 4x} \geq 0.$$

Števec in imenovalec sta hkrati pozitivna na intervalu $[-2, 0)$ oziroma hkrati negativna na $[2, 4)$.

(k) *$D_f = \mathbb{R}_0^+$, saj gledamo*

$$-1 \leq \frac{x - 1}{x + 1} \leq 1.$$

Imamo naslednji dve možnosti

- *za $x < -1$ dobimo*

$$-x - 1 \geq x - 1 \geq x + 1$$

in to nikoli ne velja ($-2x \geq 0 \geq 2$);

- *za $x > -1$ dobimo*

$$-x - 1 \leq x - 1 \leq x + 1$$

in to velja za $x \geq 0$.

(l) *$D_f = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$, saj gledamo*

$$-1 \leq \frac{x - 5}{x^2 - 1} \leq 1.$$

Imamo dve možnosti:

- *za $x < -1$ ali $1 < x$ dobimo*

$$\begin{array}{ccccc} -x^2 + 1 & \leq & x - 5 & \leq & x^2 - 1 \\ 0 & \leq & x^2 + x - 6 & \leq & 2x^2 - 2 \\ 0 & \leq & (x - 2)(x + 3) & \leq & 2(x - 1)(x + 1) \end{array}$$

in to velja za $x \leq -3$ ali $2 \leq x$;

- *za $-1 < x < 1$ dobimo (podobno kot prej)*

$$0 \geq (x - 2)(x + 3) \geq 2(x - 1)(x + 1)$$

in to nikoli ne velja.

(m) *$D_f = \mathbb{R}$, saj $|x| - x \geq 0$ velja za poljuben $x \in \mathbb{R}$.*

(n) *$D_f = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$. Števec je definiran za $\mathbb{R} - \{-1\}$. Imenovalec je definiran za $x > -1$ in je $\ln(x + 1) \neq 0$, ko je $x \neq 0$.*

(o) $D_f = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, 3)$.
Vidimo, da je $\frac{x-3}{2x-8} > 0$, *ko je* $x < 3$ *ali* $x > 4$. $\sqrt{x+3}$ *je definirana za* $x \geq -3$, $\cos(\pi x) = 0$ *za* $x = \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. *Zato je* $D_f = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, 3)$.

(p) $D_f = (0, 4)$. *Vidimo, da je* $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$, $\ln(x)$ *je definirana za* $x > 0$, $\sqrt{4-x}$ *za* $x \leq 4$ *ter* $\sqrt{4-x} = 0$, *ko je* $x = 40$.

4. Ali imata realni funkciji f in g enaki naravni definicijski območji

(a) $f(x) = 2 \ln x$, $g(x) = \ln x^2$,

(b) $f(x) = \ln(\sin x)$, $g(x) = \sin(\ln x)$,

(c) $f(x) = \sqrt{1 - \ln^2 x}$, $g(x) = \sqrt{1 - \ln x^2}$,

(d) $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = e^{\ln(x^2+x+1)}$.

Rešitev.

(a) $D_f = \mathbb{R}^+$, $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ *(gledamo* $x^2 > 0$*). Funkciji nimata enakih naravnih defincijskih območij.*

(b) $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$ *(gledamo* $\sin x > 0$*),* $D_g = \mathbb{R}^+$. *Funkciji nimata enakih naravnih defincijskih območij.*

(c) $D_f = [e^{-1}, e]$, *saj je*

$$\begin{aligned} 1 - \ln^2 x &\geq 0 \\ 1 &\geq \ln^2 x \\ 1 &\geq \ln x \geq -1 \\ e &\geq x \geq e^{-1}. \end{aligned}$$

$D_g = [-\sqrt{e}, \sqrt{e}] \backslash \{0\}$, *saj je*

$$\begin{aligned} 1 - \ln x^2 &\geq 0 \\ 1 &\geq \ln x^2 \\ e &\geq x^2 \\ \sqrt{e} &\geq x \geq -\sqrt{e}. \end{aligned}$$

Funkciji nimata enakih naravnih defincijskih območij.

(d) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R}$, *saj je* $x^2 + x + 1 > 0$ *ne glede na* $x \in \mathbb{R}$. *Funkciji imata enaki naravni definicijski območji.*

5. Za naslednje funkcije določi D_f, Z_f in f^{-1}.

(a) $f(x) = \sqrt{2 - 4x}$,

(b) $f(x) = 2^x + 2^{x+1}$,

(c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 1$,

(d) $f(x) = \ln(3x - 6)$,

(e) $f(x) = \frac{-x+5}{x+1}$,

(f) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{če} \quad x \leq 0 \\ x^2, & \text{če} \quad x > 0 \end{cases}$.

Ali vedno obstaja f^{-1}?

Rešitev.

(a) $D_f = (-\infty, \frac{1}{2}]$, $Z_f = [0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 2}{-4}$.

(b) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (0, \infty)$, $f(x) = 2^x + 2^{x+1} = 2^x(1 + 2) = 3 \cdot 2^x$, $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

(c) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$, $Z_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\ln(x+1)}$.

(d) $D_f = (2, \infty)$, $Z_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x + 6}{3}$.

(e) $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $Z_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{-x+5}{x+1}$.

(f) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \textit{če} \quad x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \textit{če} \quad x > 0 \end{cases}$.

6. Preveri, da je funkcija $f : [-2, 3) \to (-2, 9]$,

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & ; \quad -2 \leq x < 0 \\ 9 - x^2 & ; \quad 0 \leq x < 3 \end{cases}$$

bijekcija in izračunaj njen inverz (pomagaj si s sliko).

Rešitev. Bijektivnost lahko vsak preveri.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & ; \quad -2 < x \leq 0 \\ \sqrt{9 - x} & ; \quad 0 < x \leq 9. \end{cases}$$

7. Samo s poznavanjem elementarnih funkcij najprej določi naravno definicijsko območje in zalogo vrednosti ter nato skiciraj naslednje grafe funkcij:

(a) $f(x) = x^2 + 2$,

(b) $f(x) = |\ln(x - 2)|$,

(c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$,

(d) $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$,

(e) $f(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)^x$,

(f) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Rešitev.

(a) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = [2, \infty)$, *Slika 2.41.*

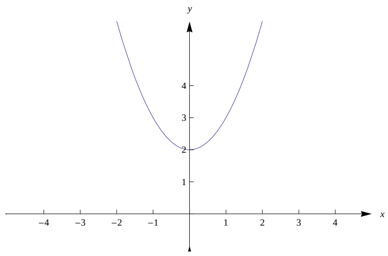
(b) $D_f = (2, \infty)$, $Z_f = [0, \infty)$, *Slika 2.42.*

(c) $D_f = \mathbb{R}^+$, $Z_f = \mathbb{R}$, *Slika 2.43.*

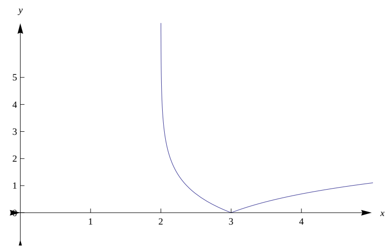
(d) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (0, \infty)$, *Slika 2.44.*

(e) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (-\infty, 0)$, *Slika 2.45.*

(f) $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = (0, \infty)$, *Slika 2.46.*



Slika 2.41: Primer 7(a).

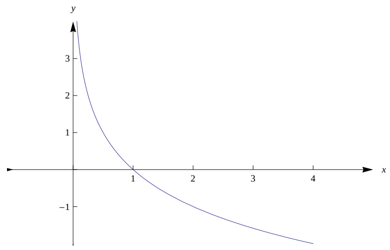


Slika 2.42: Primer 7(b).

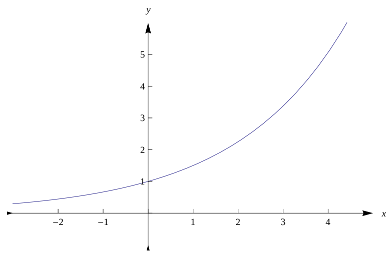
8. Določi naravno definicijsko območje in kodomeno, da bo f bijektivna in nato izračunaj inverz funkcije f:

(a) $f(x) = x^2 + 1$,

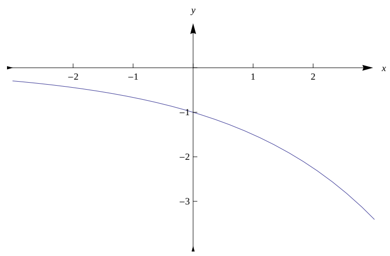
(b) $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$,



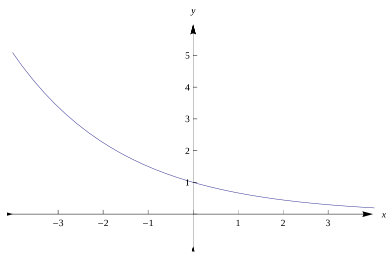
Slika 2.43: Primer 7(c).



Slika 2.44: Primer 7(d).



Slika 2.45: Primer 7(e).



Slika 2.46: Primer 7(f).

(c) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$,

(d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Rešitev. Izbirali bomo „največjo“ naravno definicijsko območje in kodomeno. Vsak lahko sam preveri, da za je izbrano naravno definicijsko in kodomeno f bijektivna.

(a) Imamo več možnosti. Npr. $D_f = \mathbb{R}_0^+$, *kodomena* $[1, \infty)$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

(b) $D_f = [1, \infty)$, *kodomena* $\mathbb{R}_0^+$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$.

(c) $D_f = \mathbb{R} - \{4\}$, *kodomena* $\mathbb{R} - \{2\}$, $f^{-1}(x) = \frac{4x}{x-2}$.

(d) Imamo več možnosti. Npr. $D_f = [2, \infty)$, *kodomena* $[4, \infty)$, *izpeljimo* $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{4} - x} + \frac{x}{2}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{y^2}{y-1} \\ xy - x &= y^2 \\ y^2 - xy &= -x \\ \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} &= -x \\ y &= \pm\sqrt{\frac{x^2}{4} - x} + \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

9. Določi sodost oziroma lihost naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^2}$,

(b) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x + x^5}$,

(c) $f(x) = \dfrac{|x^3 - \sin x|}{x}$,

(d) $f(x) = \dfrac{3^x + 1}{3^x - 1}$,

(e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$,

(f) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Rešitev.

(a) Funkcija je soda, saj velja

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x-2)^2} + \sqrt[3]{(-x+2)^2} = \sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x-2)^2} = f(x).$$

(b) Funkcija je soda, saj velja

$$f(-x) = \frac{\tan(-x)}{-x + (-x)^5} = \frac{-\tan x}{-x - x^5} = \frac{-\tan x}{-(x + x^5)} = \frac{\tan x}{x + x^5} = f(x).$$

(c) *Funkcija je liha, saj velja*

$$f(-x) = \frac{|(-x)^3 - \sin(-x)|}{-x} = \frac{|-x^3 + \sin x|}{-x} = -\frac{|x^3 - \sin x|}{x} = -f(x).$$

(d) *Funkcija je liha, saj velja*

$$f(-x) = \frac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1} = \frac{\frac{1+3^x}{3^x}}{\frac{1-3^x}{3^x}} = -\frac{3^x+1}{3^x-1} = -f(x).$$

(e) *Funkcija je liha, saj velja*

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -f(x).$$

(f) *Funcija je liha, saj velja*

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{1+(-x)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{-1} \\ &= -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

10. Izračunaj kompozituma funkcij f in g ($f \circ g$, $g \circ f$)

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 7$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 3$,

    (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$,

    (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$, $g(x) = -x^2 - 1$,

    (d) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x \leq 0 \\ x^2 & ; \quad x > 0 \end{cases}$,

    (e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; \quad x \geq 0 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} & ; \quad x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+1 & ; \quad x \geq -1 \\ 0 & ; \quad x < -1 \end{cases}$,

    (f) $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ |\sin x| & ; \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$,

    (g) $f(x) = e^x$, $g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \leq 0 \\ \ln x & ; \quad x > 0 \end{cases}$,

(h) $f(x) = -2x + 4$, $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & ; \quad |x| \leq 2 \\ 4x^2 - x^4 & ; \quad |x| > 2 \end{cases}$,

(i) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^3+1}{x+1} & ; \quad x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ e^{2x} - 1 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1} & ; \quad x < -1 \\ 0 & ; \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \arctan(x+1) & ; \quad x > 0 \end{cases}$.

Rešitev. Pri vsakem kompozitumu bomo opredelili naravno definicijsko območje in kodomeno.

(a) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 3) = 5(x^3 + 3) - 7 = 5x^3 + 8$, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x - 7) = (5x - 7)^3 + 3 = 125x^3 - 525x^2 + 735x - 340$.

(b) $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = 2^{x-1}$, $g \circ f : \mathbb{R} \to (-1, \infty)$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = 2^x - 1$.

(c) $f \circ g : \mathbb{R} \to (0, e^{-1}]$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^2 - 1) = e^{-x^2-1}$, $g \circ f : \mathbb{R} \to (-\infty, -1)$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^x) = -e^{2x} - 1$,

(d) *Najprej določimo kodomeno posamezih predpisov. Za lažje razumevanje naj bo* $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 0$, $g_1(x) = -1$ *in* $g_2(x) = x^2$. *Tako velja* $f_1 : (-\infty, 0) \to (-\infty, 0)$, $f_2 : [0, \infty) \to \{0\}$, $g_1 : (-\infty, 0] \to \{-1\}$, $g_2 : (0, \infty) \to (0, \infty)$. *Sedaj ustrezno komponirajmo upoštevajoč naravno definicijsko območje in kodomeno posameznih predpisov*

- $f \circ g$
  - $(f \circ g_1)(x) = f(g_1(x)) = f(-1) = f_1(-1) = -1$,
  - $(f \circ g_2)(x) = f(g_2(x)) = f(x^2) = f_2(x^2) = 0$.
- $g \circ f$
  - $(g \circ f_1)(x) = g(f_1(x)) = g(x) = g_1(x) = -1$,
  - $(g \circ f_2)(x) = g(f_2(x)) = g(0) = g_1(0) = -1$.

Tako smo dobili $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x \leq 0 \\ 0 & ; \quad x > 0 \end{cases}$, $(g \circ f)(x) = -1$ *za vsak* $x \in \mathbb{R}$.

(e) *Lahko rešujemo kot v prejšnjem primeru. Strnimo postopek:* $f : [0, \infty) \to [-1, \infty)$, $f : (-\infty, 0) \to (-1, 0)$, $g : [-1, \infty) \to [0, \infty)$, $g : (-\infty, -1) \to \{0\}$.

- $f \circ g$
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 - 1 = x^2 + 2x$, *če je* $x \geq -1$,
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = -1$, *če je* $x < -1$.
- $g \circ f$
  - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = x^2 - 1 + 1 = x^2$, *če je* $x \geq 0$,
  - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-(x - 1)^{-2}) = -\frac{1}{(x-1)^2} + 1$, *če je* $x < 0$.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} x^2+2x, & ; \quad x\geq -1 \\ -1, & ; \quad x<-1 \end{cases},$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} x^2, & ; \quad x\geq 0 \\ \frac{-1}{(x-1)^2}+1, & ; \quad x<0 \end{cases}.$$

(f) $f:(-\infty,0)\to(-\infty,0)$, $f:[0,\infty)\to\{0\}$, , $g:(-\infty,-\frac{\pi}{2}]\cup[\frac{\pi}{2},\infty)\to\{1\}$, $g:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to[0,1)$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1)=0$, *če je* $|x|\geq\frac{\pi}{2}$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(|\sin x|)=0$, *če je* $|x|<\frac{\pi}{2}$.
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=1$, *če je* $x\leq-\frac{\pi}{2}$,
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x)=|\sin x|$, *če je* $-\frac{\pi}{2}<x<0$,
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(0)=0$, *če je* $x\geq 0$.

$$(f\circ g)(x)=0,\ \textit{za vsak}\ x\in\mathbb{R},\ (g\circ f)(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\leq-\frac{\pi}{2} \\ |\sin x| & ; \quad -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ 0 & ; \quad x\geq 0 \end{cases},$$

(g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $g:(-\infty,0]\to\{1\}$, $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(1)=e$, *če je* $x\leq 0$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\ln x)=e^{\ln x}=x$, *če je* $x>0$.
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(e^x)=\ln e^x=x$, *če je* $x\in\mathbb{R}$.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} e & ; \quad x\leq 0 \\ x & ; \quad x>0 \end{cases},\ (g\circ f)(x)=x,\ \textit{za vsak}\ x\in\mathbb{R}.$$

(h) $f:[1,3]\to[-2,2]$, $f:(-\infty,1)\to(2,\infty)$, $f:(3,\infty)\to(-\infty,-2)$, $g:[-2,2]\to[-4,0]$, $g:(-\infty,-2)\cup(2,\infty)\to\mathbb{R}^-$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-4)=-2(x^2-4)+4=-2x^2+12$, *če je* $|x|\leq 2$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(4x^2-x^4)=-2(4x^2-x^4)+4=2x^4-8x^2+4$, *če je* $|x|>2$.
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+4)=(-2x+4)^2-4=4x^2-16x+12$, *če je* $1\leq x\leq 3$,
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-2x+4)=4(-2x+4)^2-(-2x+4)^4$, *če je* $x<1$ *ali* $x>3$.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -2x^2+12 & ; \quad |x|\leq 2 \\ 2x^4-8x^2+4 & ; \quad |x|>2 \end{cases},$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}4x^2-16x+12 & ; \quad 1\le x\le 3\\ 4(-2x+4)^2-(-2x+4)^4 & ; \quad x<1 \vee 3<x\end{cases}.$$

(i) $f:(-\infty,0)\to(\infty,-1)$, $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $g:(-\infty,-1)\to(-\infty,-1)$, $g:[-1,0]\to\{0\}$, $g:(0,\infty)\to(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

- $f\circ g$
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(-\frac{x}{x+1}\right)=-\frac{\left(-\frac{x}{x+1}\right)^3+1}{-\frac{x}{x+1}+1}=-\frac{3x^2+3x+1}{(x+1)^2}$, *če je* $x<-1$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(0)=0$, *če* $-1\le x\le 0$,
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\arctan(x+1))=e^{2(\arctan(x+1))}-1$, *če je* $x>0$,
- $g\circ f$
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(-\frac{x^3+1}{x+1}\right)=-\frac{-\frac{x^3+1}{x+1}}{-\frac{x^3+1}{x+1}+1}=\frac{-x^2+x-1}{x^2-x}$, *če je* $x<0$,
  - $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=0$, *če je* $x=0$.
  - $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(e^{2x}-1)=\arctan(e^{2x}-1+1)=\arctan(e^{2x})$, *če je* $x>0$.

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}-\frac{3x^2+3x+1}{(x+1)^2} & ; \quad x<-1\\ 0 & ; \quad -1\le x\le 0\\ e^{2(\arctan(x+1))}-1 & ; \quad x>0\end{cases},$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}\frac{-x^2+x-1}{x^2-x} & ; \quad x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\\ 0 & ; \quad x=0\\ \arctan(e^{2x}) & ; \quad x>0\end{cases}.$$

11. Izračunaj vsoto, razliko in produkt funkcij f in g, $f(x)=\begin{cases}|x| & ; \quad x\le 1\\ x^2 & ; \quad x>1\end{cases}$ in $g(x)=\begin{cases}x^2 & ; \quad x\le -2\\ e^x & ; \quad -2<x\le 0\\ \sin x & ; \quad x>0\end{cases}$.

Rešitev. Naj $*$ označuje poljubno operacijo ($+$, $-$ ali $\cdot$). Potem je

$$(f*g)(x)=\begin{cases}|x|*x^2, & ; \quad x\le -2\\ |x|*e^x, & ; \quad -2<x\le 0\\ |x|*\sin x, & ; \quad 0<x\le 1\\ x^2*\sin x, & ; \quad x>1\end{cases}$$

12. Razstavi f na osnovne elementarne funkcije

(a) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - e^{\sin x}}{x}$.

Rešitev.

(a) $f_1(x) = \sqrt{x},\ f_2(x) = x,$

$$f(x) = (f_1 \circ (f_2 + f_1 \circ (f_2 + f_1)))(x).$$

(b) $f_1(x) = \sin x,\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = x^2,\ f_4(x) = \frac{1}{x},$

$$f(x) = ((f_3 - f_2 \circ f_1) \cdot f_4)(x).$$

2.5.2 Zaporedja

1. V aritmetičnem zaporedju je vsota prvih osem členov 100, vsota drugega in šestega člena pa je 22. Izračunaj prvi člen in splošni člen zaporedja.

   Rešitev. Vemo, da je

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_6 & + & a_7 & + & a_8 & = & 100 \\ & & & & & & & & & & a_2 & + & a_6 & = & 22. \end{array}$$

   Ker je v aritmetičnem zaporedju velja $a_n = a_1 + d(n-1)$, *dobimo*

$$\begin{array}{ccccc} 8a_1 & + & 28d & = & 100 \\ 2a_1 & + & 6d & = & 22. \end{array}$$

   Zato je $a_1 = 2$, $d = 3$ *in posledično* $a_n = 2 + 3(n-1) = -1 + 3n$.

2. Poišči takšen x, da bodo števila 1, $\cos x$ in $\cos^2 x$ zaporedni trije členi aritmetičnega zaporedja.

   Rešitev. Ker 1, $\cos x$ *in* $\cos^2 x$ *tvorijo aritmetično zaporedje, je* $d = \cos x - 1$ *in* $d = \cos^2 x - \cos x$. *Iz tega sledi*

$$\cos x - 1 = \cos^2 x - \cos x.$$

   Dobimo kvadratno enačbo $\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$, *ki je ekvivalentna enačbi* $(\cos x - 1)^2 = 0$. *Rešitev te enačbe je množica* $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. *Posledično vsi elementi te množice ustrezajo pogoju naloge.*

3. Poišči takšen x, da bodo števila $\ln 3$, $\ln(2^x - 2)$ in $\ln(2^x + 4)$ prvi trije členi aritmetičnega zaporedja.

   Rešitev. Ker $\ln 3$, $\ln(2^x - 2)$ *in* $\ln(2^x + 4)$ *tvorijo aritmetično zaporedje, zato je* $d = \ln(2^x - 2) - \ln 3$ *in* $d = \ln(2^x + 4) - \ln(2^x - 2)$. *Posledično dobimo*

$$\ln\left(\frac{2^x - 2}{3}\right) = \ln\left(\frac{2^x + 4}{2^x - 2}\right)$$

oziroma

$$\begin{aligned} 3(2^x+4) &= (2^x-2)^2 \\ (2^x)^2 - 7\cdot 2^x - 8 &= 0 \\ (2^x-8)(2^x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Ker 2^x ne zavzame negativnih vrednosti, je edina rešitev $x=3$.

4. Tretji člen geometrijskega zaporedja je 12, peti pa je 3. Izračunaj splošni člen zaporedja.

   Rešitev. Vemo, da je
   $$\begin{aligned} a_3 &= a_1\cdot q^2 &= 12 \\ a_5 &= a_1\cdot q^4 &= 3. \end{aligned}$$
   in iz tega sledi, da je $q=\pm\frac{1}{2}$ in $a_1=48$. Glede na q imamo dva različna zaporedja $a_n = 48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ in $a_n' = 48\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

5. Vsota treh števil je 40, vsota njihovih desetiških logaritmov pa 3. Poišči ta števila, če tvorijo geometrijsko zaporedje.

   Rešitev. Poiščimo števila a_1, a_2 in a_3 za katera
   $$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 40 \\ \log a_1 + \log a_2 + \log a_3 &= 3. \end{aligned}$$
   Če upoštevamo, da ta števila tvorijo geometrijsko zaporedje ($a_2=a_1q$, $a_3=a_1q^2$), dobimo
   $$\begin{aligned} a_1(1+q+q^2) &= 40 \\ \log(a_1q)^3 &= 3. \end{aligned}$$
   Tako dobimo $q=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ in zato dobimo dve rešitvi za števila a_1, a_2 in a_3. Torej $a_1=\frac{20}{3-\sqrt{5}}$, $a_2=10$ in $a_3=5(3-\sqrt{5})$ ter $a_1=\frac{20}{3+\sqrt{5}}$, $a_2=10$ in $a_3=5(3+\sqrt{5})$.

6. Vsota treh števil, ki tvorijo aritmetično zaporedje, je 6. Če k tretjemu številu prištejemo prvo število, prvo in drugo število pa ohranimo, dobimo geometrijsko zaporedje. Izračunaj dana tri števila.

   Rešitev. Naj bodo a_1, a_2 in a_3 iskana števila. Ker tvorijo geometrijsko zaporedje, zato velja a_1, $a_2=a_1+d$ in $a_3=a_1+2d$. Iz tega sledi
   $$3a_1+3d=6.$$
   Tako dobimo, da je $a_2=a_1+d=2$. Vemo tudi, da števila a_1, a_2 in a_1+a_3 tvorijo geometrijsko zaporedje in zato je $q=\frac{a_3+a_1}{a_2}=\frac{2a_2+2d}{2}=2$. Iz tega potem sledi, da je $a_1=1$, $a_2=2$ in $a_3=3$.

7. Izračunaj naslednje limite zaporedij:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+3n+1}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3}{3n^3+n^2+3n+1}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3+3}{3n^2+2n+1}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n-7}{2n+4}\right)^{13}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(2n^2+1)(3n^3+1)(4n^4+1)}{(n+1)(n^2+2)(n^3+3)(n^4+4)}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+7^n}{3+5\cdot 7^n}$,

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}$,

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n}{1+(-3)^n}$,

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2+1})$,

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}$,

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$,

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}}$

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$,

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}+1}$,

(p) $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(n+1)-\ln(n))$,

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1-n^2}{n^2+2n+1}}$,

(r) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$,

(s) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-1}$,

(t) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+2}$,

(u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2}$,

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n-2}{n^3-1}\right)^{n^2}$

(w) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n)-\ln(n+1))$,

(x) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\dfrac{\pi n^3-n^2}{2n(3n^2+1)}\right)$,

(y) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$,

(z) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)}{(n+3)!}$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{n^3+3n^2+3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3(1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})}=0$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{3n^3+n^2+3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{n^3(3+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})}=\dfrac{2}{3}$,

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^4+3}{3n^2+2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4(5+\frac{3}{n^4})}{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}=\infty$ *ali rečemo, da ta limita ne obstaja,*

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-7}{2n+4}\right)^{13}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{13}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n^2+1)(3n^3+1)(4n^4+1)}{(n+1)(n^2+2)(n^3+3)(n^4+4)}=24$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+7^n}{3+5\cdot 7^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n(\frac{1}{7^n}+1)}{7^n(\frac{3}{7^n}+5)}=\dfrac{0+1}{0+5}=\dfrac{1}{5}$,

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n(3\cdot(\frac{3}{5})^n+5)}{5^n((\frac{3}{5})^n+1)}=\dfrac{0+5}{0+1}=5$,

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n}{1+(-3)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-3)^n}{(-3)^n(\frac{1}{(-3)^n}+1)}=\dfrac{1}{0+1}=1$,

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$,

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-\sqrt{n^2+1})(n+\sqrt{n^2+1})}{n+\sqrt{n^2+1}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}} = 0,$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}+1 = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1 =$
$= \sqrt{1+0}+1 = 2,$

(l) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n(1+\frac{1}{n})} = \dfrac{\sqrt[3]{0+0}}{1+0} = 0,$

(m) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\left(1+\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{9+\frac{1}{n}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt[6]{\frac{n^2}{n^3}}+\sqrt[4]{\frac{n}{n^2}}}{\sqrt{9+\frac{1}{n}}} = \dfrac{1+0+0}{\sqrt{9+0}} = \dfrac{1}{3},$

(n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+n\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n^2}}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+0}}} = 1,$

(o) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2}+1} = \dfrac{1-1}{1+1} = 0,$

(p) $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1)-\ln(n)) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) =$
$= \ln 1 = 0,$

(q) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1-n^2}{n^2+2n+1}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-n^2}{n^2+2n+1}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(\frac{1}{n^2}-1)}{n^2(1+2\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}} =$
$= 2^{\frac{0-1}{1+2\cdot 0+0}} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2},$

(r) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}\cdot(-2)} = e^{-2},$

(s) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{3n-1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{n}} = e^3,$

(t) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1-1}{n+1}\right)^{n+2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n+2}{-(n+1)}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{-(n+1)}} = e^{-1},$

(u) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)^{n^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)^{\frac{n^2-1}{2}\cdot\frac{2n^2}{n^2-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2-1}} = e^2,$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n-2}{n^3-1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)(n^2+n+2)}{(n-1)(n^2+n+1)}\right)^{n^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2+n+1}\right)^{(n^2+n+1)\cdot\frac{n^2}{n^2+n+1}} =$

$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n+1}} = e,$

(w) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\ln(n)-\ln(n+1)) = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n}{-(n+1)}}\right) =$

$= \ln e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-(n+1)}} = \ln e^{-1} = -1,$

(x) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi n^3-n^2}{2n(3n^2+1)}\right) = \sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi n^3-n^2}{2n(3n^2+1)}\right) =$

$= \sin\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3(\pi-\frac{1}{n})}{2n^3(3+\frac{1}{n^2})}\right) = \sin\left(\frac{\pi-0}{2(3+0)}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2},$

(y) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n!((n+1)-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$

(z) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)}{(n+3)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot((n+2)+\frac{1}{n!})}{(n+3)(n+2)(n+1)!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n\cdot n!})}{n^2(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2})} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n\cdot n!}}{n(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2})} = 0.$

8. Za naslednja zaporedja preveri monotonost, omejenost in konvergentnost.

(a) $a_n = \frac{1}{3n+4}$,

(b) $a_n = \frac{1000n}{n^2+1}$,

(c) $a_n = 1+\frac{n}{n+1}$,

(d) $a_n = \frac{n^2+2}{n+1}$,

(e) $a_n = 1+\frac{(-1)^n}{n}$,

(f) $a_n = \sin((n+1)x)$, kjer je $x \in \mathbb{R}^+$.

Rešitev.

(a) *Zaporedje je padajoče, saj je*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \\ \frac{1}{3(n+1)+4} &\leq \frac{1}{3n+4} \\ 4 &\leq 7; \end{aligned}$$

navzdol omejeno z 0, saj je $\frac{1}{3n+4} > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*; navzgor omejeno z 1, saj je padajoče in je* $a_1 = \frac{1}{7} < 1$*;* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n+4} = 0$.

(b) *Zaporedje je padajoče, saj je*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq a_n \\ \frac{1000(n+1)}{(n+1)^2+1} &\leq \frac{1000n}{n^2+1} \\ n^3+n^2+n+1 &\leq n^3+2n^2+2n \\ 1 &\leq n^2+n; \end{aligned}$$

navzdol omejeno z 0, saj je $\frac{1000n}{n^2+1} > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*; navzgor omejeno s 501, saj je padajoče in je* $a_1 = 500 < 501$*;* $\lim_{n\to\infty} \frac{1000n}{n^2+1} = 0$.

(c) *Zaporedje je naraščajoče, saj je*

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ 1+\frac{n}{n+1} &\leq 1+\frac{n+1}{n+2} \\ n^2+2n &\leq n^2+2n+1 \\ 0 &\leq 1; \end{aligned}$$

navzdol omejeno z 1, saj je $1+\frac{n}{n+1} > 1$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*; navzgor omejeno z 2, saj je naraščajoče in limita je enaka 2;* $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{n}{n+1} = 2$.

(d) *Zaporedje je naraščajoče, saj je*

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ \frac{n^2+2}{n+1} &\leq \frac{(n+1)^2+2}{n+1+1} \\ n^3+2n^2+2n+4 &\leq n^3+3n^2+5n+3 \\ 1 &\leq n^2+3n; \end{aligned}$$

navzdol je omejeno z 0, saj je $\frac{n^2+2}{n+1} > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*; navzgor ni omejeno;* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n+1} = \infty$ *(divergira).*

(e) *Zaporedje ni monotono, saj že* $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{3}{2}$ *in* $a_3 = \frac{2}{3}$; *navzdol omejeno z 0, saj je* $1+\frac{(-1)^n}{n} > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$; *navzgor omejeno z 2, saj je* $\frac{(-1)^n}{n} < 1$; $\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1$.

(f) *Za poljuben* $x \in \mathbb{R}^+$, *obstajo taki* $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < n_3$, *za katere velja* $n_1, n_3 \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{x}, \frac{2k\pi}{x}\right)$, $n_2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\frac{2k\pi}{x}, \frac{(2k+1)\pi}{x}\right)$. *Za* n_1 *in* n_3 *je funkcija* sin *negativna, za* n_2 *pa pozitivna, kar pomeni, da zaporedje ni monotono. Ker je zaloga vrednosti funkcije* sin *interval* $[-1, 1]$, *zato je zaporedje navzdol omejeno z -1, navzgor pa z 1. Zaporedje ni konvergentno, saj vrednosti oscilirajo med -1 in 1 (glej monotonost).*

9. Dano je zaporedje

$$a_n = \frac{2n-1}{2n+2}.$$

(a) Preveri monotonost, omejenost in konvergentnost.

(b) Od katerega člena dalje se vsi členi razlikujejo od limitne vrednosti za manj od 0.01?

Rešitev.

(a) *Zaporedje je naraščajoče*

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1} \\ \frac{2n-1}{2n+2} &\leq \frac{2n+1}{2n+4} \\ 4n^2 + 6n - 4 &\leq 4n^2 + 6n + 2 \\ -4 &\leq 2; \end{aligned}$$

navzdol omejeno z 0, saj je $\frac{n-1}{2n+2} > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$; *navzgor omejeno z 1, saj je naraščajoče in limita je enaka 1;*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+2} = 1.$$

(b)

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n-1}{2n+2} - 1\right| &< \frac{1}{100} \\ 1 - \frac{2n-1}{2n+2} &< \frac{1}{100} \\ 300 &< 2n + 2. \end{aligned}$$

Torej od 150. *člena naprej.*

10. Dano je zaporedje
$$a_n = \frac{3n}{n^2 + 3n + 2}.$$
    (a) Preveri monotonost, omejenost in konvergentnost.
    (b) Od katerega člena dalje se vsi členi razlikujejo od limitne vrednosti za manj od 0.01?

Rešitev.

(a) *Zaporedje je padajoče*
$$\begin{aligned} a_{n+1} &\le a_n \\ \frac{3n+3}{(n+1)^2 + 3(n+1) + 2} &\le \frac{3n}{n^2+3n+2} \\ 2 &\le n(n+1); \end{aligned}$$
navzdol omejeno z 0, saj je $\frac{3n}{n^2+3n+2} > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*; navzgor omejeno z 1, saj je padajoče in* $a_1 = \frac{1}{2} < 1$*;* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n}{n^2+3n+2} = 0$.

(b)
$$\begin{aligned} \left| \frac{3n}{n^2+3n+2} - 0 \right| &< \frac{1}{100} \\ 300n &< n^2 + 3n + 2 \\ 0 &< n^2 - 297n + 2. \end{aligned}$$
Po reševanju te kvadratne enačbe sledi, da od 297. *člena naprej.*

11. Dano je zaporedje
$$a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + n + 1}.$$
    (a) Preveri monotonost, omejenost in konvergentnost.
    (b) Od katerega člena dalje se vsi členi razlikujejo od limitne vrednosti za manj od 0.001?

Rešitev.

(a) *Zaporedje je naraščajoče*
$$\begin{aligned} a_n &\le a_{n+1} \\ \frac{n^2+n}{n^2+n+1} &\le \frac{(n+1)^2 + n + 1}{(n+1)^2 + n + 1 + 1} \\ 0 &\le 2n + 2; \end{aligned}$$
navzdol omejeno z 0, saj je $\frac{n^2+n}{n^2+n+1} > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*; navzgor omejeno z 1, saj* $\frac{n^2+n}{n^2+n+1} < 1$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*;* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+n+1} = 1$.

(b)

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+n}{n^2+n+1}-1\right| &< \frac{1}{1000}\\ 1-\frac{n^2+n}{n^2+n+1} &< \frac{1}{1000}\\ 0 &< n^2+n-999.\end{aligned}$$

Po reševanju te kvadratne enačbe sledi, da od 32. člena naprej.

12. Razišči zaporedje s členi

$$a_n = \frac{n^5}{5^n}.$$

Rešitev. Zaporedje ni monotono, saj $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{32}{25}$, $a_3 = \frac{243}{125}$ *in* $a_4 = \frac{1024}{625}$. *Za lažje dokazovanje omejenosti preverimo, od katerega člena naprej je monotono. Dokažimo, da je*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Leftrightarrow n < 3.$$

Preverimo implikacijo samo v desno stran.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}}{\frac{n^5}{5^n}} &\geq 1\\ \frac{(n+1)^5}{5n^5} &\geq 1\\ (n+1)^5 &\geq 5n^5\\ n+1 &\geq \sqrt[5]{5}n\\ 2.7 &\geq n.\end{aligned}$$

Torej je a_n *padajoče od tretjega člena naprej. Navzdol je omejeno z 0, saj je* $\frac{n^5}{5^n} > 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*; navzgor je omejeno z* 2 *(do tretjega člena je* a_n *naraščajoče, od tretjega člena pa padajoče);* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{5^n} = 0$.

13. Razišči zaporedje s členi $a_1 = 3$ in

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + 2.$$

Rešitev.

- *Monotonost*
  Preverimo, da je zaporedje padajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \leq a_1$. *Zato predpostavimo, da je* $a_{n+1} \leq a_n$ *in dokažimo, da je* $a_{n+2} \leq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned}a_{n+2} &\leq a_{n+1}\\ \frac{1}{6}a_{n+1}+2 &\leq \frac{1}{6}a_n+2\\ a_{n+1} &\leq a_n.\end{aligned}$$

- *Omejenost*
  Ker je zaporedje padajoče, je navzgor omejeno s prvim členom $a_1 = 3$. *Preverimo, da je navzdol omejeno z 0. Za* a_1 *to trivialno velja. Zato predpostavimo, da je* $a_n > 0$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da je tudi* $a_{n+1} > 0$. *Ker je* $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + 2$ *in* $a_n > 0$, *imamo vsoto dveh pozitivnih členov in zato je* $a_{n+1} > 0$.
- *Limita zaporedja*
  Zaporedje je konvergentno, ker je padajoče in navzdol omejeno. Naj bo $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Tako pridemo do zveze*
  $$L = \frac{1}{6}L + 2$$
  in iz tega sledi, da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{12}{5}$.

14. Razišči zaporedje s členi $a_1 = 2$ in
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2.$$

Rešitev.

- *Monotonost*
  Preverimo, da je zaporedje naraščajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \geq a_1$, *zato predpostavimo, da je* $a_{n+1} \geq a_n$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da je tudi* $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.
  $$\begin{aligned} a_{n+2} &\geq a_{n+1} \\ \frac{1}{2}a_{n+1} + 2 &\geq a_n\frac{1}{2} + 2 \\ a_{n+1} &\geq a_n. \end{aligned}$$
- *Omejenost*
  Ker je zaporedje naraščajoče, je navzdol omejeno z $a_1 = 2$. *Preverimo, da je navzgor omejeno s 4. Za* a_1 *to trivialno velja. Zato predpostavimo, da* $a_n < 4$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da je tudi* $a_{n+1} < 4$.
  $$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_n + 2 &< 4 \\ a_n &< 4. \end{aligned}$$
- *Limita zaporedja*
  Zaporedje je konvergentno, ker je naraščajoče in navzgor omejeno. Naj bo $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. *Tako pridemo do zveze*
  $$L = \frac{1}{2}L + 2$$
  in iz tega sledi, da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

15. Razišči zaporedje s členi $a_1 = 3$ in

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2.$$

Obravnavaj še primer, ko je $a_1 = 2$ oziroma $a_1 = 1$.

Rešitev.

- *Monotonost*
  Preverimo, da je zaporedje naraščajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \geq a_1$, zato predpostavimo, da je $a_{n+1} \geq a_n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, in dokažimo, da je tudi $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\geq a_{n+1} \\ a_{n+1}^2 - 2 &\geq a_n^2 - 2 \\ a_{n+1}^2 &\geq a_n^2. \end{aligned}$$

  Ker gledamo samo pozitivne člene, to res velja.

- *Omejenost*
  Ker je zaporedje naraščajoče, je zaporedje navzdol omejeno s prvim členom $a_1 = 3$. Hitro vidimo, da zaporedje ni navzgor omejeno (glej začetne člene zaporedja).

- *Konvergenca*
  Zaporedje ne konvergira, ker ni navzgor omejeno.

Vsak lahko sam preveri, da v primeru, ko je $a_1 = 2$ dobimo konstantno zaporedje s splošnim členom $a_n = 2$, ko pa je $a = 1$, pa dobimo, zaporedje $a_1 = 1$ in $a_n = -1$ za vsak $n = 2, 3, \ldots$.

16. Dano je zaporedje $a_1 = 1$ in

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n}.$$

Poišči limito zaporedja in dokaži, da vsi členi zaporedja ležijo na intervalu $[1, 3]$.

Rešitev.

- *Naj bo $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Tako pridemo do zveze*

$$L = \frac{L}{2} + \frac{3}{2L}.$$

  Iz tega dobimo

$$L^2 - 3 = 0.$$

  Tako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$, saj so vsi členi zaporedja pozitivni.

- *Preverimo, da je zaporedje navzdol omejeno z 1. Za* $a_1 = 1$ *je to res, zato predpostavimo, da je* $1 \leq a_n \leq 3$ *za nek* $n \in \mathbb{N}$ *in dokažimo, da je tudi* $1 \leq a_{n+1} \leq 3$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n} \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2 \cdot 1} = 3$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n} \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 3} = 1$$

in zato so res vsi členi na intervalu $[1, 3]$.

17. Razišči zaporedje s členi

$$a_n = \underbrace{\ln(2 + \ln(2 + \ln(2 + \ldots \ln 2) \ldots))}_{n}.$$

Rešitev. Preden bomo raziskali zaporedje, zapišimo zaporedje kot $a_1 = \ln 2$ *in* $a_{n+1} = \ln(2 + a_n)$.

- *Monotonost*
  Preverimo, da je zaporedje naraščajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \geq a_1$*, zato predpostavimo, da je* $a_{n+1} \geq a_n$*, kjer je* $n \in \mathbb{N}$*, in dokažimo, da je tudi* $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\geq a_{n+1} \\ \ln(2 + a_{n+1}) &\geq \ln(2 + a_n) \\ a_{n+1} &\geq a_n. \end{aligned}$$

- *Omejenost*
  Ker je zaporedje naraščajoče, je zaporedje navzdol omejeno z $a_1 = \ln 2$. *Dokažimo, da je tudi navzgor omejeno. Predpostavimo, da obstaja* $M \in \mathbb{R}$*, za katerega je* $a_n < M$ *za poljuben* $n \in \mathbb{N}$ *in dokažimo, da je potem* $a_{n+1} < M$*. Za lažje razumevanje kar predpostavimo, da je* $M = e$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \ln(2 + a_n) < \ln(2 + M) < \ln(M + M) = \ln(2M) \\ &= \ln 2 + \ln M < \ln M + \ln M = 2 \ln M = 2 \ln e \\ &< e. \end{aligned}$$

  Torej je zaporedje navzgor omejeno z e.

- *Konvergenca*
  Zaporedje je konvergentno, ker je naraščajoče in navzgor omejeno.

18. Razišči zaporedje s členi

$$a_n = \underbrace{\sqrt{3\sqrt{3 \ldots \sqrt{3}}}}_{n}.$$

Rešitev. *Preden bomo raziskali zaporedje, zapišimo zaporedje na način* $a_1 = \sqrt{3}$ *in* $a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$. *Vsak lahko sam preveri, da je to dobro definirano.*

- *Monotonost*
  Preverimo, da je zaporedje naraščajoče s pomočjo matematične indukcije. Res velja $a_2 \geq a_1$, *zato predpostavimo, da je* $a_{n+1} \geq a_n$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da je tudi* $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\geq a_{n+1} \\ \sqrt{3a_{n+1}} &\geq \sqrt{3a_n} \\ a_{n+1} &\geq a_n. \end{aligned}$$

- *Omejenost*
  Ker je zaporedje naraščajoče, je navzdol omejeno z $a_1 = \sqrt{3}$. *Dokažimo, da je navzgor omejeno s 3. Za* a_1 *to trivialno velja. Predpostavimo, da je* $a_n < 3$, *kjer je* $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da je tudi* $a_{n+1} < 3$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< 3 \\ \sqrt{3a_n} &< 3 \\ a_n &< 3 \end{aligned}$$

  Torej je zaporedje navzgor omejeno s 3.
- *Limita zaporedja*
  Zaporedje je konvergentno, ker je naraščajoče in navzgor omejeno. Naj bo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. *Tako pridemo do zveze*

$$L = \sqrt{3L}$$

  in edina smiselna rešitev je $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$, *saj je* $a_1 = \sqrt{3}$ *in* (a_n) *je naraščajoče zaporedje.*

19. Dokaži ali ovrzi:

(a) če zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira, potem tudi zaporedje $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira;

(b) če zaporedje $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira, potem tudi zaporedje $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira.

Rešitev.

(a) Naj bo $\varepsilon > 0$ *poljuben. Ker zaporedje s členi* a_n *konvergira, potem obstaja* $n_0 \in \mathbb{N}$, *da za vsak* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, *velja* $|a_n - L| < \varepsilon$, *kjer je* $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. *Ker velja*

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \varepsilon,$$

zaporedje s členi $|a_n|$ *konvergira (razmisli, da za poljubni realni števili* x *in* y *velja ocena* $||x| - |y|| \leq |x - y|$*).*

(b) Ta trditev ne velja. Protiprimer je zaporedje s splošnim členom $a_n = (-1)^n$.

20. Poišči vsa stekališča podanih zaporedij

    (a) $1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$,

    (b) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$,

    (c) $a_n = (-1)^{n+1} + (-1)^n \frac{1}{n}$,

    (d) $a_n = \sin\left(\frac{\pi + (-1)^n \pi}{4}\right)$.

    Rešitev.

    (a) 1,2,3.

    (b) Vsa naravna števila.

    (c) Za lihe n je 1, za sode n pa -1.

    (d) Za lihe n je 0, za sode n pa 1.

2.5.3 Vrste

1. Ugotovi, ali so podane vrste konvergentne. Če so, izračunaj vsoto.

   (a) $1 - 1 + 2 - 2 + 3 - 3 + \ldots$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$,

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$,

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$,

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

   (g) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$,

   (h) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots$,

   (i) $\sum_{n=\lfloor \frac{k}{2}+1 \rfloor}^{\infty} \frac{1}{(2n-k)(2n+k)}$, kjer je k poljubno naravno število,

(j) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\dots$,

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,

(m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{5^n}$.

Rešitev.

(a) Delne vsote so $s_{2n-1}=n$ in $s_{2n}=0$. Limita teh delnih vsot ne obstaja in zato vrsta divergira.

(b) Delne vsote so $s_1=-1$, $s_2=1$, $s_3=-2$, ... Limita teh delnih vsot ne obstaja in zato vrsta divergira.

(c) Delne vsote so $s_0=1$, $s_1=3$, $s_2=7$, ... Limita teh delnih vsot ne obstaja in zato vrsta divergira.

(d) Delne vsote so $s_0=1$, $s_1=\frac{3}{2}$, $s_2=\frac{7}{4}$, ..., $s_n=\dfrac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$. Limita delnih vsot obstaja in zato zračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

(e) Delne vsote so $s_0=\frac{1}{3}$, $s_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}$, $s_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{19}{9}$, ..., $s_n=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$. Limita delnih vsot obstaja in zato izračunajmo vsoto vrste

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{27}+\ldots\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)\\&=1\end{aligned}$$

(f) Vrsta konvergira, saj konvergira vrsta iz primera (d) konvergira (če vrsta

absolutno konvergira potem tudi konvergira). Izračunajmo vsoto vrste

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots\\
&= \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots\right)\\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\\
&= \frac{4}{3}-\frac{2}{3}\\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(g) Iz zaporedja prepoznamo, da je n-ti člen vsote

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Desno stran zgornje enačbe izračunamo tako, da zapišemo nastavek

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},$$

kjer iščemo konstanti A in B. Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned}
A &= 1\\
A+B &= 0
\end{aligned}$$

in iz tega sledi $A=1$ in $B=-1$. Če to upoštevamo pri s_n, dobimo

$$s_n = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

saj je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 1-\dfrac{1}{n+1} = 1.$

(h) Iz zaporedja prepoznamo, da je n-ti člen vsote

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

(glej naslednji splošnejši primer). Če to upoštevamo pri s_n, dobimo

$$\begin{aligned}
s_n &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2},$$

saj je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

(i) *Zapišimo n-ti člen malo drugače. Nastavimo, da je*

$$\frac{1}{(2n-k)(2n+k)} = \frac{A}{2n-k} + \frac{B}{2n+k}.$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 2A + 2B &= 0 \\ kA - kB &= 1 \end{aligned}$$

in iz tega sledi $A = \frac{1}{2k}$ *in* $B = -\frac{1}{2k}$. *Zato je n-ti člen*

$$\frac{1}{(2n-k)(2n+k)} = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2n-k} - \frac{1}{2n+k}\right).$$

Preden povemo, koliko je vsota vrste, si poglejmo $s_n + s_{n+k}$ *(brez konstante* $\frac{1}{2k}$*).*

$$\begin{aligned} s_n + s_{n+k} &= \frac{1}{2n-k} - \frac{1}{2n+k} + \frac{1}{2(n+1)-k} - \frac{1}{2(n+1)+k} + \\ &+ \ldots + \frac{1}{2(n+k)-k} - \frac{1}{2(n+k)+k} \\ &= \frac{1}{2n-k} - \frac{1}{2n+k} + \frac{1}{2(n+1)-k} - \frac{1}{(2(n+1)+k)} + \\ &+ \ldots + \frac{1}{2n+k} - \frac{1}{2n+3k} \end{aligned}$$

Opazimo, da se posamezni elementi pojavijo dvakrat in se odštejejo. Ker je n poljubno naravno število, se nam bo ta situacija vedno ponovila in zato je vsota vrste enaka vsoti končne vrste

$$\sum_{n=\lfloor \frac{k}{2}+1 \rfloor}^{\lfloor \frac{k}{2}+1 \rfloor + k} \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2n-k}.$$

(j) *Poskusimo še na drug način izračunati vsoto vrste (lahko bi podobno kot v prejšnjih dveh primerih izračunali vsoto vrste). Delne vsote so* $s_1 = \frac{1}{4}$, $s_2 = \frac{2}{7}$, $s_3 = \frac{3}{10}$, $\ldots$, $s_n = \frac{n}{3n+1}$. *S pomočjo matematične indukcije lahko vsak dokaže, da je* s_n *res take oblike. Limita delnih vsot obstaja in je enaka* $\frac{1}{3}$ *in zato je vsota vrste enaka* $\frac{1}{3}$.

(k) *Zapišimo n-ti člen malo drugače. Nastavimo, da je*

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{An+B}{n^2} + \frac{Cn+D}{(n+1)^2}.$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 2A + B + D &= 0 \\ A + 2B &= 2 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

in iz tega sledi $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ *in* $D = -1$. *Zato je n-ti člen*

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

in posledično

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1,$$

saj je $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1$.

(l) *Zapišimo n-ti člen malo drugače. Nastavimo, da je*

$$\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{An+B}{(2n-1)^2} + \frac{Cn+D}{(2n+1)^2}.$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} 4A + 4C &= 0 \\ 4A + 4B - 4C + 4D &= 0 \\ A + 4B + C - 4D &= 1 \\ B + D &= 0 \end{aligned}$$

in iz tega sledi $A = 0$, $B = \frac{1}{8}$, $C = 0$ *in* $D = -\frac{1}{8}$. *Zato je n-ti člen*

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

in posledično

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Zato je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{8},$$

saj je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}$.

(m) *Delne vsote so* $s_0 = 2$, $s_1 = \frac{12}{5}$, $s_2 = \frac{73}{25}$, $\ldots$, $s_n = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{5}}$. *Limita delnih vsot obstaja in je enaka* $\frac{25}{6}$ *(kar je tudi vsota vrste). Izračunajmo vsoto vrste še nekoliko drugače*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{25}{6}.$$

2. Pokaži, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}$, če je $a_n = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n}}$.

Rešitev. Izračunajmo limito zaporedja s členi a_n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}} = \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{4}{3}.$$

3. Z uporabo primerjalnega kriterija preuči konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+1}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2$,

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Rešitev.

(a) Ocenimo člen $\dfrac{1}{10n+1}$*:*

$$\frac{1}{10n+1} > \frac{1}{10n+10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Minoranta je divergentna vrsta $\displaystyle\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ *in zato tudi* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$ *divergira.*

(b) Ocenimo člen $\dfrac{1+n}{1+n^2}$*:*

$$\frac{1+n}{1+n^2} > \frac{1+n}{1+2n+n^2} = \frac{1+n}{(1+n)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Minoranta je divergentna vrsta $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ *in zato tudi* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$ *divergira.*

(c) Ocenimo člen $\dfrac{\ln n}{n}$*:*

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \quad \textit{za} \quad n > 3.$$

Minoranta je divergentna vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *in zato tudi* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ *divergira.*

(d) Ocenimo člen $\dfrac{1}{n2^n}$*:*

$$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Majoranta je konvergentna vrsta $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *in zato tudi* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ *konvergira.*

(e) Ocenimo člen $\dfrac{\sin nx}{2^n}$*:*

$$\frac{\sin nx}{2^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Majoranta je konvergentna vrsta $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *in zato tudi* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ *konvergira.*

(f) *Ocenimo člen* $\dfrac{n+\cos n}{n^3+1}$*:*

$$\frac{n+\cos n}{n^3+1} < \frac{n+\cos n}{n^3} < \frac{n+1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}.$$

Majoranta je vsota konvergentnih vrst $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *in zato tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3+1}$ *konvergira.*

(g) *Ocenimo člen* $\left(\dfrac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2$*:*

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2 &< \left(\frac{n^2+1}{n^3}\right)^2 < \left(\frac{n^2+2n+1}{n^3}\right)^2 = \left(\frac{(n+1)^2}{n^3}\right)^2 \\ &< \left(\frac{(n+n)^2}{n^3}\right)^2 = \frac{16n^4}{n^6} = \frac{16}{n^2}.\end{aligned}$$

Majoranta je konvergentna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2}$ *in zato tudi* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3+1}\right)^2$ *konvergira.*

(h) *Ocenimo člen* $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$*:*

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+1)}} = \frac{1}{n+1}.$$

Minoranta je divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ *in zato tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ *divergira.*

4. Upoštevaj potrebni pogoj za konvergenco vrst in preuči konvergenco vrst:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2,$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1},$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n},$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n+1}.$

Rešitev.

(a) *Vrsta divergira, saj* $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty > 0$.

(b) *Vrsta divergira, saj* $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} > 0$.

(c) *Velja sicer, da je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$, *vendar ne konvergira zaporedje delnih vsot* s_n, *saj je*

$$s_n = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1.$$

(d) *Velja sicer, da je* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+n+1} = 0$, *vendar upoštevajmo primerjalni kriterij*

$$\frac{n}{n^2+n+1} > \frac{n}{n^2+n+n} = \frac{n}{n^2+2n} = \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}.$$

Minoranta je divergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, *zato tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n+1}$ *divergira.*

5. Z uporabo kvocientnega ali D'Alembertovega kriterija preuči konvergenco vrst:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, kjer je a pozitivno realno število,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n}{2^n(n+1)}$,

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Rešitev.

(a) *Velja*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

in zato vrsta konvergira.

(b) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

in zato vrsta konvergira.

(c) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{2}(2n-1)} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

in zato vrsta konvergira.

(d) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{n}{-(n+1)}}$$
$$= 3e^{-1} > 1$$

in zato vrsta divergira.

(e) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}(n+2)}}{\frac{3^n n}{2^n(n+1)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{2n(n+2)} = \frac{3}{2} > 1$$

in zato vrsta divergira.

(f) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}}{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}(n+1)}{\sqrt{n}(n+2)} = 1$$

in ta kriterij nam nič ne pove o konvergenci vrste.

6. Z uporabo korenskega ali Cauchyjevega kriterija preuči konvergenco vrst:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2}{3^n}\right)^n$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{4n+5}\right)^n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+3}\right)^n$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Rešitev.

(a) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n^2}{3^n}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0<1$$

in zato vrsta konvergira.

(b) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+3}{4n+5}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{4n+5}=\frac{1}{2}<1$$

in zato vrsta konvergira.

(c) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n}{n+3}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2>1$$

in zato vrsta divergira.

(d) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1$$

in zato vrsta konvergira.

(e) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n(n-1)}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{(n-1)}{2}\cdot 2}=e^2>1$$

in zato vrsta divergira.

(f) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

in ta kriterij nam nič ne pove o konvergenci vrste.

7. Z uporabo Leibnizovega kriterija preuči konvergenco vrst:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$,

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{2^n}$.

   Preveri ali so vrste tudi absolutno konvergentne!

   Rešitev.

   (a) Vrsta ni absolutno konvergentna, saj

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$$

   (minoranta je harmonična vrsta). Preverimo lastnosti Leibnizovega kriterija:

   - *vrsta alternira,*
   - $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
   - *za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *je* $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$,

   zato vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *(pogojno) konvergira.*

   (b) Vrsta ni absolutno konvergentna, saj

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

   in ne zadošča osnovnemu pogoju za konvergenco vrste. Prav tako ne veljajo vse lastnosti Leibnizovega kriterija, saj $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ *in zato vrsta divergira.*

   (c) Vrsta ni absolutno konvergentna, saj

$$\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

   (minoranta je harmonična vrsta). Preverimo lastnosti Leibnizovega kriterija:

- *vrsta alternira,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0,$
- *za vsak* $n \in \mathbb{N}$ *je* $\dfrac{1}{2n+3} < \dfrac{1}{2n+1}$.

Zato vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ *(pogojno) konvergira. Kot zanimivost povejmo, da je to Leibnizova formula za število* π, *in velja*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(d) Vrsta celo absolutno konvergira, saj

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} \right| = \frac{(n+1)^3}{2n^3} = \frac{1}{2} < 1$$

in zato ni potrebno uporabiti Leibnizovega kriterija za konvergenco vrste.

8. Z uporabo Raabejevega kriterija preuči konvergenco vrst:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$,

(c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^\alpha}$,

(d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{4^{n-1} \cdot ((n-1)!)^2}{((2n-1)!!)^2}$

Rešitev.

(a) Velja

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = 1,$$

zato uporabimo Raabejev kriterij.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^{\alpha-1}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^\alpha((1+\frac{1}{n})^\alpha-1)}{n^{\alpha-1}}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1}{\frac{1}{n}}\\ &= \alpha>1\end{aligned}$$

(na limito lahko gledamo kot na limito funkcije) in zato vrsta konvergira.

(b) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^2}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,$$

zato uporabimo Raabejev kriterij.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}{\frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^2}}\right|-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2}\right)=2>1$$

in zato vrsta konvergira.

(c) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(\ln(n+1))^\alpha}}{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^\alpha=1.$$

Preden uporabimo Raabejev kriterij, naredimo naslednjo oceno

$$\frac{(\ln(n+1))^\alpha}{(\ln n)^\alpha}=\left(\frac{\ln n+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^\alpha \doteq \left(1+\frac{\alpha}{n\ln n}\right).$$

Sedaj uporabimo Raabejev kriterij

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{(\ln n)^\alpha}}{\frac{1}{(\ln(n+1))^\alpha}}-1\right) &\doteq \lim_{n\to\infty} n\left(1+\frac{\alpha}{n\ln n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\ln n}\\ &=0<1\end{aligned}$$

in zato vrsta divergira.

(d) Velja

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4^n\cdot(n!)^2}{((2n+1)!!)^2}}{\frac{4^{n-1}\cdot((n-1)!)^2}{((2n-1)!!)^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{(2n+1)^2} = 1,$$

zato uporabimo Raabejev kriterij.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{4^{n-1}\cdot((n-1)!)^2}{((2n-1)!!)^2}}{\frac{4^n\cdot(n!)^2}{((2n+1)!!)^2}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+1)^2-4n^2}{4n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

in s tem kriterijem se ne moremo opredeliti o konvergenci vrste.

9. Dokaži, če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem tudi vrsta s členi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ konvergira.

Rešitev. Uporabili bomo Cauchyjev kriterij za konvergenco vrste: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira natanko tedaj, ko za vsako pozitivno realno število* $\varepsilon > 0$, *obstaja tako naravno število* n_0, *da za vsaki naravni števili* m *in* n, $n_0 \le n \le m$, *velja* $|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon$.

S pomočjo Cauchyjevega kriterija enostavno dokažemo zgornjo trditev, saj

$$\left|\frac{a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} + \ldots + \frac{a_m}{m}\right| < |a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon$$

(glej predpostavke Cauchyjevega kriterija).

10. Naj bo $a_n \ge 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Dokaži:

    (a) če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ konvergira;

    (b) če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ divergira.

Rešitev.

(a) Uporabimo primerjalni kriterij

$$0 \le \frac{a_n}{1+a_n} \le a_n$$

in zato vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ *konvergira.*

(b) *Dokazali bomo ekvivalentno trditev: če konvergira* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$*, potem konvergira* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Recimo, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ *konvergira. Iz tega sledi, da velja potrebni pogoj za konvergenco vrste* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$*. Zato velja* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *in iz tega sledi* $1 \leq 1 + a_n \leq 2$*. Uporabimo primerjalni kriterij*

$$0 \leq \frac{a_n}{2} \leq \frac{a_n}{1+a_n}$$

in zato vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*

11. Dokaži, da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

Rešitev. *Naj bo* $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *in* $t_n = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^n a_{2^n}$.

Recimo, da s_n *konvergira. Za poljuben* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$*, obstaja tak* $k \in \mathbb{N}$*, da velja* $n \geq 2^k$*. Potem*

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \\ &\geq a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^k}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= \frac{1}{2}t_k \end{aligned}$$

in po primerjalnem kriteriju t_k *konvergira, zato tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *konvergira.*

Recimo, da t_n *konvergira. Za poljuben* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$*, obstaja tak* $k \in \mathbb{N}$*, da velja* $n \geq 2^k$*. Potem*

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^k}) \\ &= a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} \\ &= t_k \end{aligned}$$

in po primerjalnem kriteriju s_k *konvergira, tako posledično tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira.*

12. Naj bo $a_n \geq 0$ za vsako naravno število n. Dokaži, če $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ konvergira.

Rešitev. Za dokaz te trditve bomo uporabili izrek Cauchy-Schwarz-Bunjakovski: za poljubni zaporedji a_n, b_n velja

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n b_n\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{m} |a_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{m} |b_n|^2.$$

V našem primeru tako imamo

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{a_n}|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

in trditev je dokazana.

13. Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergirajo naslednje vrste:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^n}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n(n-1)} (x-e)^n$.

Rešitev.

(a) *Uporabimo korenski kriterij*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$*, za katere velja*

$$|x| < \frac{1}{q} = \frac{1}{2}.$$

Iz tega sledi, da vrsta na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *konvergira. Vsak lahko sam preveri, da na robovih intervala divergira.*

(b) *Uporabimo korenski kriterij*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$*, za katere velja*

$$|x-1| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta na intervalu $(0, 2)$ *konvergira. Vsak lahko sam preveri, da na robovih intervala divergira.*

(c) *Uporabimo korenski kriterij*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$*, za katere velja*

$$\left|\frac{1}{x-1}\right| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta na intervalu $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ *konvergira. Vsak lahko sam preveri, da za* $x = 0$ *in* $x = -2$ *vrsta divergira.*

(d) *Uporabimo kvocientni kriterij*

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$*, za katere velja*

$$|x| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta na intervalu $[-1, 1]$ *konvergira (preveri, da konvergira tudi na robu intervala).*

(e) *Uporabimo kvocientni kriterij*

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = 0.$$

Vrsta konvergira za vsa realna števila.

(f) *Uporabimo korenski kriterij*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, *za katere velja*

$$|x| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta na intervalu $(-1,1)$ *konvergira. Vsak lahko sam preveri, da za* $x = 1$ *divergira, za* $x = -1$ *pa konvergira.*

(g) *Uporabimo korenski kriterij*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, *za katere velja*

$$|\ln x| < \frac{1}{q} = \frac{1}{1}.$$

Iz tega sledi, da vrsta na intervalu (e^{-1}, e) *konvergira. Vsak lahko sam preveri, da za* $x = e^{-1}$ *in* $x = e$ *vrsta divergira.*

(h) *Uporabimo korenski kriterij*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n(n-1)}} = e^{-1}.$$

Vrsta konvergira za tiste $x \in \mathbb{R}$, *za katere velja*

$$|(x-e)| < \frac{1}{q} = \frac{1}{e^{-1}} = e.$$

Iz tega sledi, da vrsta na intervalu $(0, 2e)$ *konvergira. Vsak lahko sam preveri, da za* $x = 0$ *in* $x = 2e$ *vrsta divergira.*

2.5.4 Limita in zveznost funkcije

1. Izračunaj naslednje limite funkcij:

   (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 6x - 3}{x^2 + 4x - 1}$,

   (b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$,

   (d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4-4x^3-6x^2+4x+5}{x^4-x^3-3x^2+x+2}$,

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^4-3x^2+1}{3x^4-x^3+5x}$,

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^6-3x^3+x}{7x^7+5x^5+1}$,

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^5-7x^2}{x^4+13x+3}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2x^2-6x-3}{x^2+4x-1} = -1$,

(b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x+1} = 3$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} =$
$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{3}{2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x+1}{x-1} = -\dfrac{3}{2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4-4x^3-6x^2+4x+5}{x^4-x^3-3x^2+x+2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-1)(x-5)(x+1)^2}{(x-1)(x-2)(x+1)^2} =$
$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x-5}{x-2} = 2$,

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^4-3x^2+1}{3x^4-x^3+5x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4(6-3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4})}{x^4(3-\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^3})} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6-3\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{3-\frac{1}{x}+5\frac{1}{x^3}} = 2$,

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6x^6-3x^3+x}{7x^7+5x^5+1} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^6(6-3\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5})}{x^7(7+5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^7})} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{6-3\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{x(7+5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^7})} = 0$,

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^5-7x^2}{x^4+13x+3} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^5(2-7\frac{1}{x^3})}{x^4(1+13\frac{1}{x^3}+3\frac{1}{x^4})} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x(2-7\frac{1}{x^3})}{1+13\frac{1}{x^3}+3\frac{1}{x^4}} = \infty$
ali rečemo, da limita ne obstaja,

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

2. Izračunaj naslednje limite funkcij z iracionalnimi členi:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1}-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}-2\sqrt{x+7}-3\sqrt{x+2}+6}{x\sqrt{4x+1}-2\sqrt{4x+1}-3x+6}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x(x+1)}-x)$,

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

Rešitev.

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4},$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{\sqrt{2x-1}-1} \cdot \frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+1}{\sqrt{2x-1}+1} = \\ = \lim_{x\to 1} \frac{4-x-3}{2x-1-1} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 1} -\frac{x-1}{2(x-1)} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{x+3}} = \\ = \lim_{x\to 1} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{x+3}}\right) = -\frac{1}{4},$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \\ = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1+x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \\ = 1,$$

(d) $$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}-2\sqrt{x+7}-3\sqrt{x+2}+6}{x\sqrt{4x+1}-2\sqrt{4x+1}-3x+6} = \\ = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+7}-3)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}-3)} = \\ = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+7}-3)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} \cdot \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3} = \\ = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2-4)(x+7-9)}{(x-2)(4x+1-9)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \\ = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{4(x-2)^2} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}+3}{(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \\ = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4x+1}+3}{4(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{x+7}+3)} = \frac{1}{16},$$

(e) $$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x(x+1)}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x(x+1)}-x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x(x+1)}+x}{\sqrt{x(x+1)}+x} = \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x(x+1)}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2},$$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} (x + \sqrt[3]{1-x^3}) =$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(x + \sqrt[3]{1-x^3}\right) \cdot \frac{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1-x^3}{x^2 - x\sqrt[3]{1-x^3} + \sqrt[3]{(1-x^3)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1} + \sqrt[3]{\frac{1}{x^6} - 2\frac{1}{x^3}+1}\right)} = 0.$$

3. Samo s pomočjo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ izračunaj naslednje limite:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$,

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x}$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$,

   (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$,

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$,

   (g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} =$
$= 1 \cdot 0 = 0$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} \cdot \frac{a}{a} = a \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = a$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x} \cdot \frac{4x}{4x} = \frac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\cos(t+\frac{\pi}{2})}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$,

(f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\dfrac{1}{2},$

(g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$
$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{\cos x+\sin x}=$
$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

4. Samo s pomočjo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x+1}$,

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x-2}{x^3-1}\right)^{x^2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{\sin(x-1)}}$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1-1}{x+1}\right)^{x+1}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^{(x+1)(-1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^{-(x+1)(-1)}=e^{-1},$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1+1+1}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x\cdot\frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{2}{2}}=$
$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^2,$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x-2}{x^3-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-1+x-1}{x^3-1}\right)^{x^2}=$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)^{x^2\cdot\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+x+1}\right)^{x^2+x+1\cdot\frac{x^2}{x^2+x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x+1}} = e,$$

(d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x+x+1}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}} =$

$$= \lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{2}{x}\cdot\frac{x+1}{x+1}} = \lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x}\cdot\frac{2}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x+1}} = e^2,$$

(e) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{\sin(x-1)}} \overset{t=x-1}{=} \lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{\sin t}\cdot\frac{t}{t}} = \lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{t}{\sin t}} =$

$$= e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sin t}} = e.$$

5. Samo s pomočjo $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ izračunaj naslednje limite:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(\cos x)}{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to0}\cot^2 x\ln(\cos^2 x)$,

(d) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$,

(e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2x-x^2)}{x^2-2x+1}$,

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}\cdot\frac{2}{2} = 2\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x} = 2,$

(b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(\sqrt{1-\sin^2 x})}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\log(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}{x} =$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\log(1-\sin^2 x)}{-\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{2x} = 0,$$

(c) $\lim\limits_{x\to0}\cot^2 x\ln(\cos^2 x) = \lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} =$

$$= \lim_{x\to0}\cos^2 x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x} = 1\cdot(-1) = -1,$$

(d) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)} = \frac{1}{e}\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln\left(\frac{x}{e}\right)}{\left(\frac{x}{e}-1\right)} = \frac{1}{e}.$

(e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(2x-x^2)}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-1+2x-x^2)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1-(x-1)^2)}{(x-1)^2}=1,$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\dfrac{x+1-1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}{(-1)^2\frac{x+1}{x+1}}=$

$=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)}{-\frac{1}{x+1}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1}=-1\cdot 1=-1.$

6. Samo s pomočjo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ izračunaj naslednje limite

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}x^{-1}\sinh x$,

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{\frac{x+1}{x}}-2}{\frac{1}{2x}}$,

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}-1\right)$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{x}\cdot\dfrac{2}{2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{2x}=2\cdot\ln 2,$

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1,$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}x^{-1}\sinh x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1-1-e^{-x}}{2x}=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}+1}{-x}\right)=1,$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1}=e\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-1}{x-1}=e,$

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{\frac{x+1}{x}}-2}{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot 2^{\frac{1}{x}}-2}{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}=4\cdot\ln 2,$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\left(e^{\frac{x}{x^2-1}}-1\right)}{\frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1}{\frac{x}{x^2-1}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\frac{x^2-1}{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{x}{x^2-1}}-1}{\frac{x}{x^2-1}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2-1}=1\cdot 1=1.$

7. Določi realni števili a in b tako, da bo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x+2}-ax-b\right)=0.$$

Rešitev. Za začetek zapišimo na eno ulomkovo črto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x+2}-ax-b\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2-ax^2-bx-2ax-2b}{x+2}\right)\\&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(1-a)x^2-(2a+b)x+2-2b}{x+2}\right).\end{aligned}$$

Ker je limita enaka 0, mora biti stopnja števca strogo manjša od stopnje imenovalca. Tako dobimo sistem

$$\begin{aligned}1-a&=0\\2a+b&=0\end{aligned}$$

in iz tega sledi, da je $a=1$ in $b=-2$.

8. Ali je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}} & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

zvezna v točki $x=0$?

Rešitev. Funkcija f bo zvezna, če $\lim_{x\uparrow 0}f(x)=0$ in $\lim_{x\downarrow 0}f(x)=0$. Toda

$$\lim_{x\uparrow 0}f(x)=\lim_{x\uparrow 0}e^{-\frac{1}{x}}=\infty,$$

saj je $\lim_{x\uparrow 0}\left(-\frac{1}{x}\right)=\infty$ in zato f ni zvezna v 0.

9. Ali je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1} & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$?

Rešitev. Potrebno je preveriti, ali je f zvezna v 0 (glej izrek, ki pravi, da so elementarne funkcije zvezne na svojih naravnih definicijskih območjih). Torej preverimo, ali je $\lim_{x\uparrow 0}f(x)=0$ in $\lim_{x\downarrow 0}f(x)=0$. Razmislimo, kam konvergirajo vrednosti funkcije, ko x narašča k 0, v nekaj korakih. Hitro vidimo, da $\frac{1}{x}\xrightarrow{x\uparrow 0}-\infty$. S tem rezultatom nadaljujemo in tako $e^{\frac{1}{x}}\xrightarrow{x\uparrow 0}0$ in posledično $e^{\frac{1}{x}}-1\xrightarrow{x\uparrow 0}-1$. Sedaj vidimo, da je

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\xrightarrow{x\uparrow 0}-1.$$

in iz tega sledi, da f ni zvezna. Za vajo lahko vsak preveri, da je $\lim_{x\downarrow 0}f(x)=0$.

10. Ali je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{x-1}+x-2}{x-1} & ; \quad x<1\\ 2 & ; \quad x=1\\ x^{\frac{x}{x-1}} & ; \quad x>1\end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$?

Rešitev. Iz samega predpisa funkcije je potrebno preveriti, če je zvezna v 1. Torej je potrebno izračunati levo in desno limito od 1. Najprej levo

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow 1}\frac{e^{x-1}+x-2}{x-1} &= \lim_{x\uparrow 1}\frac{e^{x-1}-1+x-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\uparrow 1}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}\right)\\ &= \lim_{x\uparrow 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\lim_{x\uparrow 0}\frac{x-1}{x-1}\\ &= 1+1\\ &= 2.\end{aligned}$$

Torej leva limita se ujema s funkcijsko vrednostjo. Preverimo še desno

$$\lim_{x\downarrow 1} x^{\frac{x}{x-1}} \overset{t=x-1}{=} \lim_{t\downarrow 0}(1+t)^{\frac{1}{t}\cdot(t+1)} = e^{\lim\limits_{t\downarrow 0}(t+1)} = e.$$

Ker leva in desna limita nista enaki, zato funkcija ni zvezna.

11. Določi $f(0)$ tako, da bo funkcija

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$$

povsod zvezna.

Rešitev. Potrebno je izračunati $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Torej je $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

12. Poišči točke nezveznosti funkcije

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; \quad x \leq 0 \\ x-1 & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ \ln x & ; \quad x > 1 \end{cases} .$$

Rešitev. Potrebno preveriti zveznost v točkah $x_1 = 0$ *in* $x_2 = 1$. *Vidimo, da* $\lim\limits_{x \uparrow 0} e^x = 1$ *in* $\lim\limits_{x \downarrow 0}(x-1) = -1$ *in zato funkcija* f *v* $x_1 = 0$ *ni zvezna. Podobno izračunamo* $\lim\limits_{x \uparrow 1}(x-1) = 0$ *in* $\lim\limits_{x \downarrow 1} \ln x = 0$. *V tem primeru pa vidimo, da je* f *v* $x_2 = 1$ *zvezna.*

13. Določi realno število a, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} a & ; \quad x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

zvezna na množici $\mathbb{R}$.

Rešitev. Potrebno je izračunati $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} \right) \\ &= \lim_{x \to 1} \left(\frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Torej je $a = \dfrac{3}{2}$.

14. Določi realno število a tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & ; \quad x < 1 \\ 4 - ax^2 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

povsod zvezna.

Rešitev. S pomočjo leve in desne limite v $x = 1$ *pridemo do realnega števila* a. *Vidimo, da je* $\lim\limits_{x \uparrow 1}(2^x + 1) = 3$ *in* $\lim\limits_{x \downarrow 1}(4 - ax^2) = 4 - a$. *Torej za* $a = 1$ *bo* f *zvezna.*

15. Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a-x}{x-1} & ; \quad x < -1 \\ bx - 2 & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$.

Rešitev. V $x_1 = 1$ in $x_2 = -1$ je potrebno izračunati leve in desne limite. V $x_1 = -1$ dobimo limiti

$$\lim_{x \uparrow -1} \frac{a-x}{x-1} = \frac{a+1}{-2} \qquad \textit{in} \qquad \lim_{x \downarrow -1} (bx-2) = -b-2,$$

v $x_2 = 1$ pa

$$\lim_{x \uparrow 1} (bx-2) = b-2 \qquad \textit{in} \qquad \lim_{x \downarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \downarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} = 0.$$

Na podlagi tega dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} \frac{a+1}{-2} &= -b-2 \\ b-2 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitvi sistema sta $a = 7$ in $b = 2$.

16. Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & ; \quad x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & ; \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$.

Rešitev. V točkah $-\frac{\pi}{2}$ in $\frac{\pi}{2}$ je potrebno izračunati leve in desne limite. V $-\frac{\pi}{2}$ dobimo

$$\lim_{x \uparrow -\frac{\pi}{2}} (-2\sin x) = 2 \qquad \textit{in} \qquad \lim_{x \downarrow -\frac{\pi}{2}} (a \sin x + b) = -a + b,$$

v $\frac{\pi}{2}$ pa

$$\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} a \sin x + b = a + b \qquad \textit{in} \qquad \lim_{x \downarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0.$$

Tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} -a + b &= 2 \\ a + b &= 0. \end{aligned}$$

Rešitvi sistema sta $b = 1$ in $a = -1$.

17. Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) & ; \quad x < -1 \\ p(x) & ; \quad -1 \le x \le 2 \\ e^{x-2}+3 & ; x > 2. \end{cases}$$

Določi $f(x)$ na intervalu $[-1,2]$ tako, da bo na tem intervalu polinom druge stopnje, ki gre skozi koordinatno izhodišče in bo $f(x)$ zvezna na $\mathbb{R}$.

Rešitev. Določiti je potrebno koeficiente polinoma $p(x) = ax^2+bx+c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, na intervalu $[-1,2]$, da bo f zvezna (razmisli, da je za $x \in \mathbb{R} - (-1,2)$ funkcija zvezna). Iz podatka $p(0) = 0$ dobimo, da je $c = 0$. Nadalje, $\lim\limits_{x\uparrow -1} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1$, $\lim\limits_{x\downarrow 2}(e^{x-2}+3) = 4$, $p(-1) = a-b$ in $p(2) = 4a+2b$ ter tako dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} a+b &= -1 \\ 4a+2b &= 2 \end{aligned}$$

Rešitvi sistema sta $a = \frac{2}{3}$ in $b = \frac{5}{3}$ in zato je polinom $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x$.

Diferencialni račun

V zadnjem poglavju nas bo zanimal odvod funkcije realne spremenljivke in njegova uporaba. V zvezi s tem bomo spoznali vlogo odvoda pri tangenti na graf funkcije, pomen diferenciala, vpliv odvoda na lastnosti funkcije in primer uporabe odvoda v kemiji.

3.1 Odvod funkcije

Definirali bomo odvod in si pogledali pravila odvajanja ter odvode elementarnih funkcij.

Definicija odvoda funkcije

Definicija 3.1. *Naj bo funkcija f definirana na neki okolici točke x. Izrazu*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

pravimo diferenčni kvocient. *Funkcije f je* odvedljiva *v točki x, če obstaja limita diferenčnega kvocienta, ko gre h proti 0. Tej limiti rečemo* odvod *funkcije f v točki x in jo označimo s $f'(x)$:*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

Definicija 3.2. Desni odvod *funkcije f v točki x je enak desni limiti diferenčnega kvocienta,* levi odvod *pa levi limiti.*

Ni težko videti, da je funkcija f odvedljiva v točki a natanko tedaj, ko sta levi in desni odvod enaka.

Definicija 3.3. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je* odvedljiva, *če je odvedljiva v vsaki točki definicijskega območja D. Funkciji, ki x priredi $f'(x)$, pravimo* odvod *funkcije f.*

Zgled 88. *Dana je funkcija $f(x) = x$. Poiščimo njen odvod $f'(x)$.*

Naj bo x poljubna točka iz $D_f = \mathbb{R}$. Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1\,. \end{aligned}$$

Zato je $(x)' = 1\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$

Zgled 89. *Dana je funkcija $f(x) = \sin x$. Poiščimo njen odvod $f'(x)$.*

Izračunajmo limito diferenčnega kvocienta:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{(\cos^2\frac{h}{2} - \sin^2\frac{h}{2}) - (\cos^2\frac{h}{2} + \sin^2\frac{h}{2})}{h} + \cos x \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2\frac{h}{2}\,\frac{1}{2}}{h\,\frac{1}{2}} + \cos x \cdot 1 \\ &= \sin x \lim_{h\to 0}(-\sin\tfrac{h}{2}) \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} + \cos x \\ &= \sin x \cdot 0 \cdot 1 + \cos x \\ &= \cos x\,. \end{aligned}$$

Zato je $(\sin x)' = \cos x\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$

Izrek 3.4. *Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.*

Dokaz. Naj bo x poljubna točka iz definicijskega območja funkcije f in naj bo f odvedljiva v točki x. Definirajmo funkcijo $r(h)$:

$$r(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

oziroma

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h)h\,.$$

Limitirajmo desno stran enakosti:

$$\lim_{h \to 0}(f'(x)h + r(h)h) = 0\,,$$

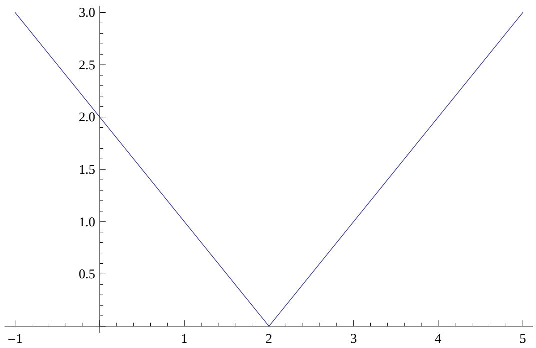
kar pomeni, da je

$$\lim_{h \to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

in f je zvezna v točki x. ∎

Ne velja pa obratno, da bi bila vsaka zvezna funkcija tudi odvedljiva, kar lahko vidimo na zelo preprostem primeru funkcije na Sliki 3.47.



Slika 3.47: Funkcija $f(x) = |x-2|$ je zvezna v točki $x = 2$, ampak v njej ni odvedljiva.

Pravila za odvajanje

Če želimo uporabljati odvod, moramo znati odvajati funkcije in to bo jedro tega razdelka.

Izrek 3.5. *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi funkciji v točki x in c poljubna konstanta iz $\mathbb{R}$, različna od 0. Potem so v x odvedljive tudi funkcije $f+g$, $c\,f$, $f\,g$ in za vsak $g \neq 0$ tudi funkcija $\frac{f}{g}$. Pri tem velja:*

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

(ii) $(c\,f)'(x) = c\,f'(x)$,

(iii) $(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$,

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$.

Dokaz. Vemo že, da je limita vsote/produkta/kvocienta enaka vsoti/produktu/kvocientu limit pri pogoju, da le-te obstajajo.

(i) Odvod vsote:

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)\,.
\end{aligned}$$

(ii) Odvod produkta s konstanto:

$$\begin{aligned}
(c\,f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(c\,f)(x+h) - (c\,f)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c\,f(x+h) - c\,f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c\,\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= c\,f'(x)\,.
\end{aligned}$$

(iii) Odvod produkta funkcij:

$$
\begin{aligned}
(f\,g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\,g)(x+h)-(f\,g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,.
\end{aligned}
$$

(iv) Odvod kvocienta:

Pokažimo najprej $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.

$$
\begin{aligned}
1 &= g(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) \qquad / \text{ odvajamo} \\
0 &= g'(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + g(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \\
\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\,.
\end{aligned}
$$

Izračunajmo sedaj odvod kvocienta funkcij f in g, če je $g \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \\
&= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) \\
&= \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}\,.
\end{aligned}
$$

■

Iz Izreka 3.5 o pravilih za odvajanje v poljubni točki neposredno sledijo pravila za odvod dveh funkcij.

Izrek 3.6. *Naj bosta f in g odvedljivi funkciji in c poljubna konstanta. Tedaj velja:*

(i) $(f+g)' = f' + g'$,

(ii) $(c\,f)' = c\,f'$,

(iii) $(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$,

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}\,, \quad g \neq 0\,.$

Pravilo o odvajanju produkta lahko z indukcijo posplošimo na več faktorjev:

$$(f_1\,f_2\cdots f_n)' = f_1'\,f_2\cdots f_n + f_1\,f_2'\cdots f_n + \cdots + f_1\,f_2\cdots f_n'\,.$$

V primeru, ko je $f_1 = f_2 = \cdots = f_n$, iz zgornje formule sledi

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'\,.$$

Zgled 90. *Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^n$.*

Ker je $x' = 1$, je po zgornji formuli

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}\,x' = n\,x^{n-1}\,.$$

Eno najpomembnejših pravil za odvajanje je odvod kompozituma funkcij oz. *verižno pravilo.*

Izrek 3.7. *(Verižno pravilo) Naj bo funkcija g odvedljiva v točki x in naj bo f odvedljiva v točki $g(x)$. Tedaj je tudi $f\circ g$ odvedljiva v x in velja*

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)\,.$$

Dokaz. Kljub temu, da je dokaz malo zahtevnejši, ga izpeljimo. Označimo $y = g(x)$ in definirajmo funkciji $\alpha(h)$ in $\beta(k)$:

$$\begin{aligned}\alpha(h) &= \frac{g(x+h)-g(x)}{h} - g'(x)\,,\\ \beta(k) &= \frac{f(y+k)-f(y)}{k} - f'(y)\,,\end{aligned}$$

pri čemer je k odvisen od h:

$$k = g(x+h) - g(x) = \alpha(h)\,h + g'(x)\,h\,.$$

Pri tem velja

$$\lim_{h\to 0}\alpha(h) = 0,\ \lim_{k\to 0}\beta(k) = 0\,.$$

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x) &= f(g(x+h)) - f(g(x))\\ &= f(g(x)+k) - f(g(x))\\ &= f(y+k) - f(y)\\ &= f'(y)\,k + \beta(k)\,k\\ &= f'(y)(g(x+h)-g(x)) + \beta(k)\,(g(x+h)-g(x))\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(y)\,(g(x+h)-g(x))}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\beta(k)\,(g(x+h)-g(x))}{h}\\ &= f'(y)\,g'(x) + 0\cdot g'(x)\\ &= f'(g(x))\,g'(x)\,.\end{aligned}$$

∎

Zgled 91. *Poiščimo odvod funkcije* $h(x) = \sin(5x)$.

Funkcija h je kompozitum funkcij $f(x) = \sin\,x$ in $g(x) = 5x$:

$$h(x) = f(g(x)) = \sin(5x)\,.$$

Ker je $f'(x) = \cos x$ in $g'(x) = 5$, je po Izreku 3.7

$$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x) = \cos(5x)\,5\,.$$

Izrek 3.8. *Naj bo f odvedljiva v točki x. Če je $f'(x) \neq 0$ za vsako točko definicijskega območja, tedaj je inverzna funkcija f^{-1} odvedljiva v točki $y = f(x)$ in velja*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,.$$

Dokaz. Naj bo $y = f(x)$, tedaj je $f^{-1}(y) = x$ oziroma $f^{-1}(f(x)) = x$. Uporabimo Izrek 3.7:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)))' &= x' \\ (f^{-1})'(f(x))f'(x) &= 1 \qquad\qquad \Rightarrow \\ (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\,. \end{aligned}$$

∎

Odvodi elementarnih funkcij

V nadaljevanju si poglejmo odvode elementarnih funkcij.

a) *Polinom in racionalna funkcija*

Poglejmo si najprej odvode polinomov:

$$(a_n\, x^n + \cdots + a_1\, x + a_0)' = a_n\, n\, x^{n-1} + \cdots + a_1\,.$$

Racionalno funkcijo odvajamo po pravilu za odvajanje kvocienta funkcij:

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)' = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}\,.$$

b) *Trigonometrične funkcije*

Poznamo že odvod funkcije sinus:

$$(\sin x)' = \cos x\,.$$

Iz zveze

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

dobimo odvod funkcije kosinus

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \big(\sin(\tfrac{\pi}{2} - x)\big)' \\ &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - x)(\tfrac{\pi}{2} - x)' \\ &= \sin x\,(-1) \\ &= -\sin x\,. \end{aligned}$$

Nadalje je odvod funkcije tangens enak:

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\ &= \frac{\cos x\ \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}\,.\end{aligned}$$

Na podoben način izpeljemo odvod funkcije kotangens:

$$\begin{aligned}(\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' \\ &= \frac{-\sin x\ \sin x - \cos x\ \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x}\,.\end{aligned}$$

c) *Ciklometrične funkcije*

Naj bo $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tedaj je $\cos y > 0$ in velja

$$\frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\,.$$

Za $|x| < 1$ je $\operatorname{asin} x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ in zato

$$\frac{1}{\cos(\operatorname{asin} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\operatorname{asin} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Upoštevajmo Izrek 3.8 in izračunajmo odvod funkcije arkus sinus:

$$\begin{aligned}(\operatorname{asin} x)' &= \frac{1}{\cos(\operatorname{asin} x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ |x| < 1\,.\end{aligned}$$

Iz zveze

$$\operatorname{acos} x + \operatorname{asin} x = \frac{\pi}{2}$$

dobimo odvod funkcije arkus kosinus:

$$(\operatorname{acos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\ |x| < 1\,.$$

Poiščimo odvod funkcije arkus tangens. Podobno kot pri funkciji arkus sinus uporabimo Izrek 3.8 in upoštevamo zvezo $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{atan} x)' &= \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{atan} x)}} \\
&= \frac{1}{\tan^2(\operatorname{atan} x) + 1} \\
&= \frac{1}{x^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Iz zveze

$$\operatorname{acot} x + \operatorname{atan} x = \frac{\pi}{2}$$

dobimo odvod funkcije arkus kotangens:

$$(\operatorname{acot} x)' = -\frac{1}{x^2+1}\,.$$

d) *Eksponentna funkcija*

Spomnimo se, da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a\,.$$

Uporabimo definicijo odvoda v točki:

$$\begin{aligned}
(a^x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} \\
&= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \\
&= a^x \ln a\,.
\end{aligned}$$

V posebnem primeru, ko je osnova enaka e, velja:

$$(e^x)' = e^x$$

e) *Logaritemska funkcija*

Za izračun odvoda logaritemske funkcije ponovno uporabimo Izrek 3.8 in upoštevamo zgoraj izpeljan odvod eksponentne funkcije:

$$\begin{aligned}(\log_a x)' &= \frac{1}{a^{\log_a x}\ \ln a} \\ &= \frac{1}{x\ \ln a}\,.\end{aligned}$$

Odvod naravnega logaritma je enak

$$(\ln\, x)' = \frac{1}{x}\,.$$

f) *Potenčna funkcija*

Z uporabo verižnega pravila poiščimo odvod potenčne funkcije $f(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(x^r)' &= \left(e^{\ln x^r}\right)' \\ &= \left(e^{r\ \ln x}\right)' \\ &= e^{r\ \ln x}(r\ \ln x)' \\ &= e^{\ln x^r}(r\ \tfrac{1}{x}) \\ &= x^r\ (r\ \tfrac{1}{x}) \\ &= r\, x^{r-1}\,.\end{aligned}$$

Vidimo, da ta formula ne velja le za naravne eksponente, kot smo to videli pri polinomih, temveč za poljubni realni eksponent.

g) *Hiperbolični funkciji*

Izračunajmo odvod funkcije sinus hiperbolikus:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sh} x)' &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \operatorname{ch} x\,.\end{aligned}$$

Na podoben način izračunamo odvod funkcije kosinus hiperbolikus:

$$\begin{aligned}(\operatorname{ch} x)' &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' \\ &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \operatorname{sh} x\,.\end{aligned}$$

TABELA ODVODOV ELEMENTARNIH FUNKCIJ:

$(x^r)' = r\,x^{r-1}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{asin} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{acos} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{atan} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{acot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$

Zgled 92. *Izračunajmo odvode sestavljenih funkcij.*

1. $f(x) = 10x^4 + 5x^3 - 3x + 9\,.$

   $f'(x) = 40x^3 + 15x^2 - 3\,.$

2. $f(x) = \ln(x + 5x^3)\,.$

   $f'(x) = \dfrac{1}{x + 5x^3}(1 + 15x^2)\,.$

3. $f(x) = \sqrt[3]{asin\, x}\,.$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(asin\, x)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Višji odvodi

Z zaporednim odvajanjem večkrat odvedljive funkcije dobimo tako imenovane *višje odvode.*

Definicija 3.9. *Naj bo f odvedljiva funkcija. Če je f' odvedljiva funkcija, potem njenemu odvodu pravimo* drugi odvod *funkcije f in ga označujemo z f'':*

$$f'' = (f')'\,.$$

Induktivno definiramo n-ti odvod funkcije f:

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'\,,\; n \in \mathbb{N}\,.$$

Po dogovoru je ničelni odvod funkcije enak funkciji sami:

$$f^{(0)} = f\,.$$

Omenimo še, da prve tri odvode običajno zapisujemo s črticami, od tretjega naprej pa kot $f^{(n)}$.

Zgled 93. *Izračunajmo poljuben odvod funkcije $f(x) = x^n$.*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= n\, x^{n-1} \\
f''(x) &= n\,(n-1)\, x^{n-2} \\
f'''(x) &= n\,(n-1)\,(n-2)\, x^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 2\cdot 1\, x^0 = n! \\
f^{(r)}(x) &= 0\,,\; r > n\,.
\end{aligned}$$

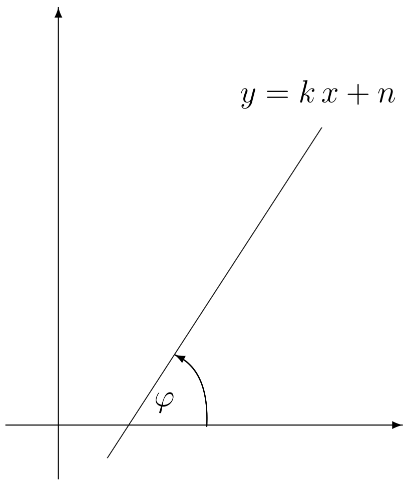
Na Zgledu 93 opazimo, da je n-ti odvod polinoma stopnje n konstanta, zato so vsi višji odvodi enaki nič.

3.2 Geometrijski pomen odvoda

Tangenta na graf funkcije

Preden si bomo pogledali geometrijski pomen odvoda, se spomnimo, da je tangens naklonskega kota φ premice, določene z $y = kx + n$, enak njenemu smernemu koeficientu (*glej Sliko 3.48*) :

$$\tan\varphi = k\,.$$



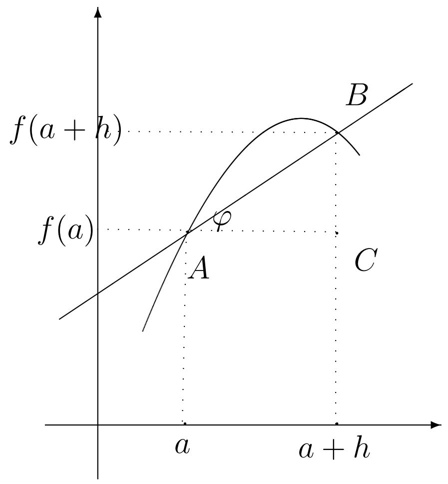
Slika 3.48: Naklonski kot premice.

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki a. Definirajmo točke $A(a, f(a))$, $B(a+h, f(a+h))$ in $C(a+h, f(a))$. Naj bo φ naklonski kot sekante skozi točki A in B, kot je to razvidno na Sliki 3.49. Opazimo, da je smerni koeficient sekante enak diferenčnemu kvocientu:

$$\tan\varphi = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\,.$$

Z manjšanjem h-ja prehajajo smerni koeficienti pripadajočih sekant k limiti diferenčnega kvocienta, sekanta pa limitira k tangenti, kar vidimo na Sliki 3.50.

Definicija 3.10. Tangenta *na graf funkcije f v točki a je premica, ki gre skozi točko $(a, f(a))$ in je njen smerni koeficient enak $f'(a)$.*



Slika 3.49: Sekanta skozi točki $A(a, f(a))$ in $B(a+h, f(a+h))$.

Enačba tangente je

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)\,.$$

Zgled 94. *Dana je funkcija* $f(x) = x^2$. *Poiščimo enačbe tangent v točkah* $0, -1, 2$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

Enačbe tangent so:

$$\begin{aligned} (0,0):&\quad y = 0\,,\\ (-1,1):&\quad y = -2(x+1)+1 = -2x-1\,,\\ (2,4):&\quad y = 4(x-2)+4 = 4x-4\,. \end{aligned}$$

Zgled 95. *Poiščimo odvod in enačbo tangente na graf konstantne funkcije.*

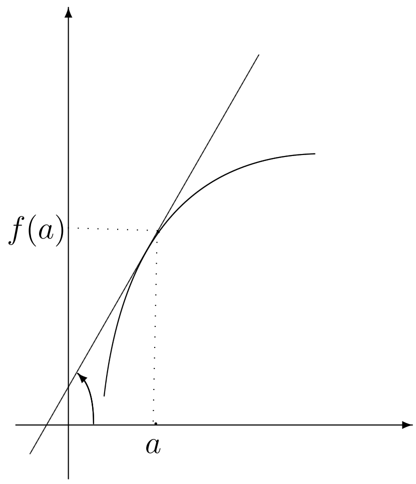
Naj bo $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0\,.$$

Enačba tangente je

$$y = c\,,$$

kar pomeni, da je funkcija sama sebi tangenta.



Slika 3.50: Tangenta na graf funkcije f.

Diferencial funkcije

Odvod funkcije je koristno orodje za obravnavo obnašanja funkcije na neki okolici točke. Diferencial temelji na ideji primerjave spremembe odvisne spremenljivke napram spremembi neodvisne spremenljivke. Vpeljimo diferenciabilnost funkcije ter poglejmo nekaj primerov uporabe diferenciala. Le-ta nam omogoča odvajanje implicitno podanih funkcij.

Definicija 3.11. *Funkcija f je v točki a* diferenciabilna*, če obstajajo tako realno število c, funkcija o in $\delta > 0$, da je*

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + o(x)(x-a)\,, \quad x \in (a-\delta, a+\delta)\,,$$

kjer je $\lim\limits_{x \to a} o(x) = 0$.

Če je funkcija f v okolici točke a diferenciabilna, tedaj jo lahko aproksimiramo z linearno funkcijo

$$y = f(a) + c(x-a)\,, \quad x \in (a-\delta, a+\delta)\,,$$

ki se na majhni okolici točke a dokaj dobro ujema s funkcijo $f(x)$. Pravimo, da smo funkcijo f *linearizirali* v okolici točke a:

$$f(x) \doteq f(a) + c(x-a)\,, \quad x \in (a-\delta, a+\delta)\,.$$

Pri tem mora biti $\delta > 0$ dovolj malo število, da je napaka, ki jo pri tem storimo, po absolutni vrednosti manjša od neke predpisane vrednosti.

Izrek 3.12. *Funkcija f je v točki a diferenciabilna natanko tedaj, ko je v a odvedljiva. Nadalje, za diferenciabilno funkcijo f je $c = f'(a)$.*

Dokaz.

($\Rightarrow$) Ker je f diferenciabilna v a, obstajajo tako realno število c, funkcija o in $\delta > 0$, da je

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + o(x)(x-a)\,, \qquad x \in (a-\delta, a+\delta)\,,$$

kjer je $\lim_{x\to a} o(x) = 0$. Izračunajmo realno število c:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= c(x-a) + o(x)(x-a) \\ c &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - o(x) \\ \lim_{x\to a} c &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} o(x) \\ c &= f'(a)\,. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Ker je f v točki a odvedljiva, obstaja

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

Zato za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \neq a$ velja, če je $|x-a| < \delta$, tedaj je

$$\left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < \varepsilon\,.$$

Naj bo $o(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$. Očitno je tedaj $\lim_{x\to a} o(x) = 0$. Izračunajmo $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + (o(x) + f'(a))(x-a)\,,$$

kar pomeni, da je f diferenciabilna v točki a.

∎

Zgled 96. *Linearizirajmo funkcijo $f(x) = \ln x$ v okolici točke 1.*

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1\,.$$

Ker je f odvedljiva v 1, je tudi diferenciabilna in velja

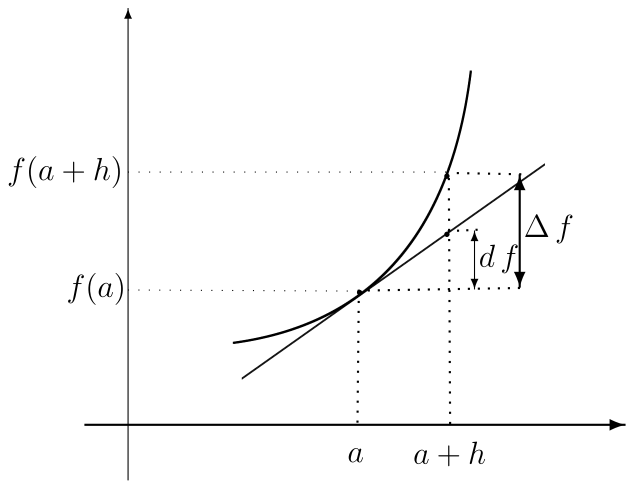
$$\ln x \doteq \ln 1 + 1(x-1) = x - 1\,, \quad x \in (1-\delta, 1+\delta)\,.$$

Zgled 97. *Poiščimo* $\sqrt{98}$.

Nastavimo funkcijo $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$ in $x - a = -2$. Tedaj je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ in

$$\sqrt{98} = f(98) \doteq f(100) + f'(100)(-2) = 9.9000\,.$$

Za primerjavo poglejmo približek zaokrožen na štiri decimalna mesta, ki je enak $\sqrt{98} = 9.8994$.



Slika 3.51: Diferencial funkcije.

Z uporabo diferenciala lahko preposteje dokažemo pomemben Izrek 3.4.

Izrek 3.13. *Če je f v točki a odvedljiva, je v a tudi zvezna.*

Dokaz. Ker je f v točki a odvedljiva, je v a diferenciabilna, torej

$$f(x) = f(a) + c(x-a) + o(x)(x-a)\,,\ x \in (a-\delta, a+\delta)\,,\ \lim_{x\to a} o(x) = 0\,.$$

Zato je

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

in f je zato zvezna v točki a. ∎

Če je funkcija f diferenciabilna v točki a, tedaj je

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\doteq f'(a)(x-a) \\ \Delta f &\doteq f'(a)\Delta x\,. \end{aligned}$$

To pomeni, da če se neodvisna spremenljivka x spremeni za Δx, tedaj se odvisna spremenljivka spremeni približno za Δy.

Definicija 3.14. *Če je funkcija f v točki a odvedljiva, tedaj je $f'(a)\Delta x$* diferencial *funkcije f v točki a in pišemo*

$$df = f'(a)\Delta x\,.$$

Običajno pišemo $\Delta x = h$ in tedaj je

$$\begin{aligned} f(a+h) &\doteq f(a) + df \\ &= f(a) + f'(a)h\,. \end{aligned}$$

Ker je diferencial identitete $f(x) = x$ enak $1 \cdot \Delta x$, uporabljamo zapis

$$\Delta x = dx\,.$$

Zgled 98. *Poiščimo diferencial funkcije $f(x) = \sin x$.*
$d\sin x = \cos x\,dx$.

Odvod implicitno podanih funkcij

Zaenkrat znamo odvajati samo eksplicitno podane funkcije, zato namenimo nekaj pozornosti še računanju odvoda implicitno podanih funkcij. Vemo že, da s predpisom $g(x,y) = 0$ ni nujno določena eksplicitno podana funkcija $y = f(x)$.

Odvod implicitno podane funkcije najkorektneje podamo s tako imenovanimi *parcialnimi odvodi*, ki spadajo na področje funkcij več spremenljivk in jih na tem mestu ne bomo obravnavali. Tako se bomo poslužili uporabe diferenciala funkcije, kar bomo demonstrirali na naslednjem zgledu.

Recimo, da želimo poiskati odvod krivulje, podane z enačbo

$$y^4 + 2x^2y^2 + 6x^2 - 7 = 0\,.$$

Poiščemo diferencial funkcije za vsak člen posebej in upoštevamo že znana pravila za odvajanje:

$$4y^3\,dy + 2(2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy) + 12x\,dx = 0\,.$$

Delimo enačbo z dx:

$$4y^3\,\frac{dy}{dx} + 2(2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx}) + 12x = 0\,.$$

Upoštevamo, da je $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} 4y^3\,y' + 4xy^2 + 4x^2yy' + 12x &= 0 \\ y' &= \frac{-x(y^2+3)}{y(y^2+x^2)}\,. \end{aligned}$$

Zgled 99. *Poiščimo enačbo tangente na graf krivulje*

$$2y + 5 - x^2 - y^3 = 0$$

v točki $(2, -1)$.

$$\begin{aligned} 2y' - 2x - 3y^2\, y' &= 0 \\ y' &= \frac{2x}{2 - 3y^2} \\ y'(2, -1) &= -4 \end{aligned}$$

Enačba tangente je $y = -4(x - 2) - 1 = -4x + 7$.

3.3 Uporaba odvoda

Izreki o srednji vrednosti

V tem razdelku bomo spoznali nekaj pomembnih izrekov v povezavi z odvodom, ki so nujni za razumevanje integralnega računa.

Definicija 3.15. *Funkcija* f *ima v* c lokalni maksimum*, če obstaja tak* $\delta > 0$*, da za vsak* x *iz intervala* $(c - \delta, c + \delta)$ *velja*

$$f(x) \leq f(c)\,.$$

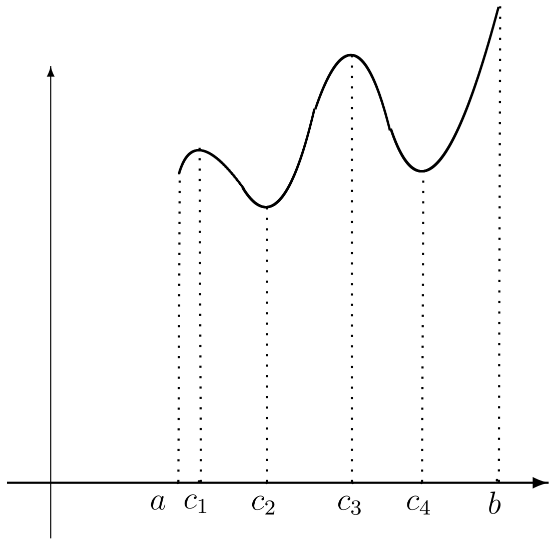
Funkcija ima v točki c lokalni minimum*, če obstaja tak* $\delta > 0$*, da za vsak* x *iz intervala* $(c - \delta, c + \delta)$ *velja*

$$f(x) \geq f(c)\,.$$

Lokalni minimum in lokalni maksimum imenujemo tudi lokalna ekstrema*.*

Na primeru funkcije f na Sliki 3.52 vidimo, da ima funkcija f v točkah c_2 in c_4 lokalna minimuma, v točkah c_1 in c_3 pa lokalna maksimuma. Medtem ko je v c_2 obenem minimum funkcije, je maksimum funkcije dosežen v točki b.

Izrek 3.16. *Naj bo* f *odvedljiva v točki* c *in naj ima v* c *lokalni maksimum ali lokalni minimium. Tedaj je* $f'(c) = 0$.



Slika 3.52: (Lokalni) minimumi in maksimumi.

Dokaz. Recimo, da ima funkcija f v točki c lokalni maksimum. Tedaj za vsako dovolj majhno pozitivno število h velja

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0\,.$$

Izračunajmo desni odvod v točki c ($h > 0$):

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

in še levi odvod v točki c ($h < 0$):

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0\,.$$

Ker je f odvedljiva v točki c, sta levi in desni odvod enaka, zato je edina možnost, da imata oba vrednost 0.

Podobno velja v primeru, ko ima funkcija v točki c lokalni minimum. ∎

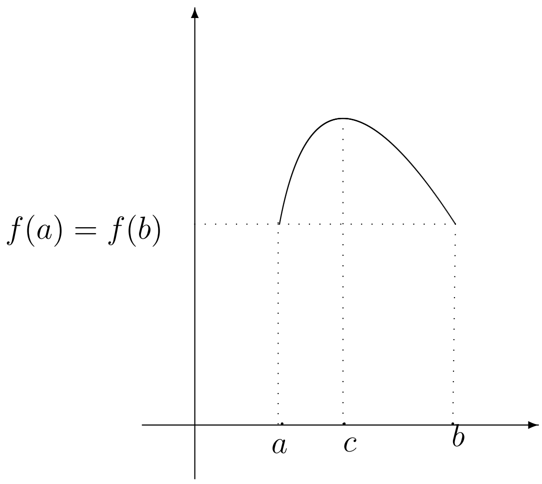
Definicija 3.17. *Točko c, v kateri je $f'(c) = 0$, imenujemo* stacionarna točka.

Vsak lokalni ekstrem odvedljive funkcije je stacionarna točka, medtem ko obratno ne velja, kar vidimo na naslednjem zgledu.

Zgled 100. *Poiščimo stacionarne točke funkcije $f(x) = x^3$ in preverimo, če so lokalni ekstemi.*

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, kar pomeni, da ima f v $x = 0$ stacionarno točko. Ker je za pozitivne vrednosti $f > 0$ in za negativne $f < 0$, v $x = 0$ ni lokalnega ekstrema.

Izrek 3.18. *(Rolleov izrek) Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Če je $f(a) = f(b)$, tedaj obstaja takšna točka $c \in (a, b)$, da je $f'(c) = 0$ (glej Sliko 3.53).*



Slika 3.53: Rolleov izrek.

Dokaz. Ker je f zvezna, po Izreku 2.41 doseže na intervalu $[a, b]$ maksimum in minimum. Ločimo dve možnosti.

(i) Maksimum in minimum sta doseženа v krajiščih intervala.

Ker je $f(a) = f(b)$, maksimum in minimum sovpadata in je funkcija f konstantna, kar pomeni, da je $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a, b)$.

(ii) Vsaj eden od maksimuma ali minimuma je dosežen v notranjosti intervala.

Naj se to zgodi v točki c. Tedaj je po Izreku 3.16 $f'(c) = 0$.

∎

Izrek 3.19. *(Cauchyjev izrek) Naj bosta funkciji $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni na $[a, b]$, odvedljivi na (a, b) in je $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Tedaj obstaja vsaj ena takšna točka $c \in (a, b)$, da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Dokaz. Po Izreku 3.18 je $g(b) \neq g(a)$, saj bi sicer obstajala točka $c \in (a, b)$ taka, da bi veljalo $g'(c) = 0$, kar bi bilo protislovno s predpostavkami izreka.

Definirajmo funkcijo $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ kot:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))\,.$$

Vidimo, da je tudi F zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Izračunajmo $F(a)$ in $F(b)$:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = 0\,, \\ F(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0\,, \end{aligned}$$

Uporabimo Rolleov Izrek 3.18 na funkciji F, kar nam da

$$\exists\, c \in (a, b) :\ F'(c) = 0\,.$$

Odvod funkcije F je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

in vrednost odvoda v točki c je enaka

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

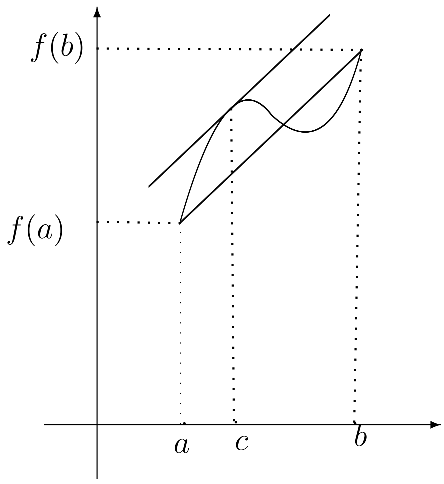
oziroma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

∎

Izrek 3.20. *(Lagrangeov izrek) Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Tedaj obstaja vsaj ena takšna točka $c \in (a, b)$, da je*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,.$$



Slika 3.54: Lagrangeov izrek.

Dokaz. V Cauchyjevem Izreku 3.19 uporabimo funkcijo $g(x) = x$ (*glej Sliko 3.54*). ∎

Lagrangeov Izrek 3.20 pravi, da na intervalu (a, b) obstaja točka c, v kateri je tangenta na graf funkcije f vzporedna daljici skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

Posledica 3.21. *Če je odvod funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ v vsaki točki enak 0, tedaj je funkcija konstantna.*

Dokaz. Izberimo poljubni točki $x_1, x_2 \in (a, b)$ in naj bo $x_1 < x_2$. Tedaj je $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva in po Lagrangeovem Izreku 3.20 obstaja $x_3 \in (x_1, x_2)$ takšna, da velja

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_3)(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\,.$$

∎

Posledica 3.22. *Če imata funkciji $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ v vsaki točki enak odvod, se razlikujeta kvečjemu za konstanto $C \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Odvod razlike funkcij f in g je enak

$$(f - g)' = f' - g' = 0$$

in po Posledici 3.21 je $f - g = C \in \mathbb{R}$. ∎

L'Hospitalovo pravilo

Spoznali bomo pomembno pravilo, ki zelo poenostavi izračun limite funkcije v primerih, ko gre za nedoločene izraze tipa

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty \quad \text{in} \quad 0^0 .$$

a) *Nedoločenost tipa* $\frac{0}{0}$

Obravnavamo $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.

Izrek 3.23. *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke a (razen morda v točki a sami). Naj bosta funkciji g in g' na tej okolici različni od 0 in naj bo $f(a) = g(a) = 0$. Tedaj velja, če obstaja $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tedaj obstaja tudi $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Dokaz. Izberimo poljuben $x > a$. Tedaj funkcija na intervalu $[a, x]$ zadošča pogojem Cauchyjega izreka 3.19, ki pravi, da obstaja taka točka $c_x \in (a, x)$ da velja:

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \underbrace{=}_{f(a)=g(a)=0} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Če obstaja desna limita $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$, ko gre $x \to a$ (torej gre tudi $c_x \to a$), velja

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \uparrow a} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Na analogen način uporabimo Cauchyjev izrek za poljuben $x < a$ oziroma interval $[x, a]$, ter dobimo še levo limito

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Ker sta funkciji f in g odvedljivi in je odvedljiv tudi njun kvocient, sta zgornji limiti enaki, s čimer zaključimo dokaz.

∎

Zgled 101. *Izračunajmo* $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x - x\sin x}\\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Vse ostale v uvodu naštete nedoločenosti lahko z enostavnimi algebrskimi prijemi prevedemo na izraz tipa $\frac{0}{0}$.

b) *Nedoločenost tipa* $\dfrac{\infty}{\infty}$

Obravnavamo $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, kjer je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

Situacijo lahko prevedemo na (i):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\,.$$

Dejansko pa velja analogen izrek kot v u (i) Izrek 3.23, kar poenostavi sam izračun limite.

Zgled 102. *Izračunajmo* $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cot x}{\ln x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\ln x} &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin^2 x}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sin x\cos x}\\ &= -\infty\,.\end{aligned}$$

c) *Nedoločenost tipa* $0 \cdot \infty$

Obravnavamo $\lim\limits_{x \to a}(f(x)g(x))$, kjer je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ in $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

Situacijo lahko prevedemo na (i):

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

ali pa tudi (ii)

$$f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\,.$$

Zgled 103. *Izračunajmo* $\lim\limits_{x \to 0} x \cot x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} x \cot x &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{\cot x}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

d) *Nedoločenost tipa* $\infty - \infty$

Obravnavamo $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x))$, kjer je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ in $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

Situacijo lahko prevedemo na primer (i):

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\frac{1}{f(x)}}\,.$$

Zgled 104. *Izračunajmo* $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\,\sin x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x}\\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

e) *Nedoločenosti tipa* $\infty^0\,, 1^\infty$ *in* 0^0

Obravnavamo $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, kjer f in g v bližini točke a ustrezata zgoraj opisanim situacijam.

Vse tri situacije lahko prevedemo na primer (iii), če iskane limite najprej logaritmiramo, kar nam omogoča Izrek 2.35 (o limiti kompozituma zveznih funkcij):

$$\ln\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}(g(x)\ln f(x))\,.$$

Poglejmo posamezne situacije:

$$\begin{aligned}
\infty^0 &: \ 0\cdot\ln\infty \longmapsto 0\cdot\infty\\
1^\infty &: \ \infty\cdot\ln 1 \longmapsto \infty\cdot 0\\
0^0 &: \ 0\cdot\ln 0 \longmapsto 0\cdot(-\infty)\,.
\end{aligned}$$

Zatem podobno kot v (iii) preoblikujemo limite na primer (i) ali (ii).

Zgled 105. *Izračunajmo* $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$.

To je prvi tip zgoraj naštetih limit. Naj bo $A = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$. Izračunajmo

$\ln A$:

$$\begin{aligned}
\ln \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Rezultat moramo še antilogaritmirati:

$$\ln A = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1\,.$$

Taylorjeva vrsta

Taylorjeva formula nam omogoči, da večkrat odvedljive funkcije, ki so na videz zelo zapletene, aproksimiramo s potenčno vrsto.

Definicija 3.24. *Naj bo f poljubna, večkrat odvedljiva funkcija in $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je*

$$Q_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

n-ti Taylorjev polinom *za funkcijo f.*

Z nekaj premisleka opazimo, da velja:

$$\begin{aligned}
Q_n(a) &= f(a) \\
Q_n'(a) &= f'(a) \\
&\vdots \\
Q_n^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a)
\end{aligned}$$

medtem ko za $Q_n^{(n+1)}(a)$ in $f^{(n+1)}(a)$ ne moremo vedeti, ali sta enaka.

Izrek 3.25. *(Taylorjeva formula) Naj bo funkcija f $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu I in naj bo $a \in I$. Za vsak $x \in I$ obstaja tak $\xi \in I$, ki leži med a in x, da je*

$$f(x) = Q_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} .$$

Dokaz. Definirajmo

$$r_n(x) = f(x) - Q_n(x) \quad \text{in} \quad p(x) = (x-a)^{n+1} .$$

Izberimo poljuben $x \neq a$. Najprej opazimo, da je $r_n(a) = p(a) = 0$. Večkratna zaporedna uporaba Cauchyjevega Izreka 3.19 da obstoj takih točk $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$, da velja

$$\begin{aligned}
\frac{r_n(x)}{p(x)} &= \frac{r_n(x) - r_n(a)}{p(x) - p(a)} = \frac{r_n'(\xi_1)}{p'(\xi_1)} \\
&= \frac{r_n'(\xi_1) - r_n'(a)}{p'(\xi_1) - p'(a)} = \frac{r_n''(\xi_2)}{p''(\xi_2)} \\
&= \cdots \\
&= \frac{r_n^{(n)}(\xi_n) - r_n^{(n)}(a)}{p^{(n)}(\xi_n) - p^{(n)}(a)} = \frac{r_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{p^{(n+1)}(\xi_{n+1})} .
\end{aligned}$$

Označimo $\xi_{n+1} = \xi$ in upoštevajmo, da je $p^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$. Izračunajmo $(n+1)$-vi odvod funkcije r_n v točki ξ:

$$r_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - Q_n^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) .$$

Torej velja

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - Q_n(x)}{(x-a)^{n+1}} &= \frac{r_n(x)}{p(x)} \\
&= \frac{r_n^{(n+1)}(\xi)}{p^{(n+1)}(\xi)} \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} ,
\end{aligned}$$

pri čemer ξ leži med a in x. ∎

Taylorjeva formula torej pravi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots \\ &\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{r_n(x)} . \end{aligned}$$

Funkcijo r_n imenujemo *ostanek Taylorjeve formule.* Če je f polinom stopnje kvečjemu n, je $r_n(x) = 0$. Tedaj je

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .$$

Posebej zanimive so funkcije, za katere velja

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 .$$

Tedaj namesto o Taylorjevi formuli govorimo o *Taylorjevi vrsti* in rečemo, da smo funkcijo f razvili v Taylorjevo vrsto, ki je pravzaprav potenčna vrsta. Iz prejšnjega poglavja pa znamo preverjati konvergenco takšnih vrst. Poglejmo si nekaj primerov.

Zgled 106. *Razvijmo funkcijo e^x v Taylorjevo vrsto v okolici točke* 0.

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^5}{5!} + \ldots + r_n(x) \\ &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6} + \tfrac{x^4}{24} + \tfrac{x^5}{120} + \ldots + r_n(x) . \end{aligned}$$

Poiščimo interval absolutne konvergence te potenčne vrste:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 ,$$

kar pomeni, da je vrsta absolutno konvergentna za vsak x. Ostanek

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \longrightarrow 0 ,$$

ker smo funkcijo razvijali v okolici točke 0.

Zgled 107. *Razvijmo funkciji* $\cos x$ *in* $\sin x$ *v Taylorjevo vrsto v okolici točke* 0.

Razvoja funkcij sta

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \tfrac{x^7}{7!} + \tfrac{x^9}{9!} - \ldots + r_n(x) \quad \text{in} \\ \cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \tfrac{x^6}{6!} + \tfrac{x^8}{8!} - \tfrac{x^{10}}{10!} + \ldots + r_n(x)\,. \end{aligned}$$

Absolutno konvergenco in napako dobimo na podoben način kot v prejšnjem primeru.

Zaenkrat smo se ukvarjali samo z realnimi funkcijami, sedaj pa poglejmo, kaj nam da kompleksna eksponentna funkcija

$$f(z) = e^z = e^{a+ib}\,, a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Razvijmo jo v potenčno vrsto:

$$\begin{aligned} e^{ib} &= 1 + (ib) + \frac{(ib)^2}{2!} + \frac{(ib)^3}{3!} + \frac{(ib)^4}{4!} + \frac{(ib)^5}{5!} + \ldots \\ &= \Big(1 - \tfrac{b^2}{2!} + \tfrac{b^4}{4!} - \tfrac{b^6}{6!} + \ldots\Big) + i\,\Big(b - \tfrac{b^3}{3!} + \tfrac{b^5}{5!} - \ldots\Big) \\ &= \cos b + i\,\sin b\,. \end{aligned}$$

Tako za poljubna $a, b \in \mathbb{R}$ dobimo *Eulerjevo formulo*

$$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i\,\sin b)\,.$$

Zato lahko modificiramo polarni zapis kompleksnega števila v obliko, s katero je še posebej preprosto računati

$$z = a + i\,b = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = r\,e^{i\,\varphi}\,.$$

Monotonost funkcij

Ni težko videti, da so smerni koeficienti tangent naraščajoče funkcije nenegativni in ravno nasprotno velja za padajoče funkcije. To zvezo podaja naslednji izrek.

Izrek 3.26. *Naj bo funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *odvedljiva. Tedaj velja*

(i) $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ *strogo naraščajoča,*

(ii) $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ *naraščajoča,*

(iii) $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ *strogo padajoča,*

(iv) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ *padajoča.*

Dokaz.

(i) Za poljuben par $x_1, x_2 \in (a,b)$, kjer je $x_1 < x_2$, je po Lagrangeovem izreku mogoče najti $x_3 \in (x_1, x_2)$ tak, da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_3)\,.$$

Ker je $f'(x) > 0$ za vsak x, velja

$$f'(x_3) > 0 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0\,,$$

kar pomeni, da je f strogo naraščajoča.

(ii) $(\Rightarrow)$ Pokažemo podobno kot (i).

$(\Leftarrow)$ Pokazati moramo, da če je f naraščajoča, tedaj je $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Poglejmo diferenčni kvocient

$$D = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,.$$

Za $h > 0$ je $D \geq 0$ in enako velja za $h < 0$. V vsakem primeru je diferenčni kvocient večji ali enak 0 in potemtakem tudi njegova limita in s tem odvod.

(iii),(iv) Pokažemo podobno kot prvi dve točki.

∎

Omenimo še primer, ki pokaže, zakaj v točki (i) ne velja ekvivalenca. Za funkcijo $f(x) = x^3$ velja, da je strogo naraščajoča, vendar je $f'(0) = 0$.

Zgled 108. *Pokažimo, da je* $f(x) = \mathrm{sh}\, x$ *strogo naraščajoča funkcija.*

$f'(x) = \mathrm{ch}\, x > 0$, zato je f strogo naraščajoča.

Lokalni ekstremi

Vemo že, da je $f'(a) = 0$ potrebni pogoj za nastop lokalnega ekstrema v točki a, ne pa tudi zadosten. Če je f 2-krat odvedljiva, lahko zadosten pogoj podamo s pomočja drugega odvoda.

Izrek 3.27. *Naj bo* f *2-krat odvedljiva na neki okolici točke* a *in naj bo* $f'(a) = 0$. *Tedaj velja:*

(i) če je $f''(a) < 0$, tedaj ima f v točki a lokalni maksimum,

(ii) če je $f''(a) > 0$, tedaj ima f v točki a lokalni minimum.

Dokaz.

(i) Naj bo $f'(a) = 0$ in $f''(a) < 0$. Zaradi $f''(a) < 0$ je po Izreku 3.26 funkcija f' strogo padajoča na neki okolici točke a, kar pomeni, da obstaja $\delta > 0$ tak, da

$$f'(x) > f'(a) = 0,\ \forall x \in (a - \delta, a) \quad \text{in}$$

$$f'(x) < f'(a) = 0,\ \forall x \in (a, a + \delta)\,.$$

To pomeni, da je na δ-okolici točke a f' na levi strani pozitiven, na desni pa negativen. Sledi, da je f na intervalu $(a - \delta, a)$ strogo naraščajoča, na $(a, a + \delta)$ pa strogo padajoča, kar pomeni, da ima v a lokalni maksimum.

(ii) Pokažemo podobno kot točko (i).

∎

Lahko se zgodi, da je v stacionarni točki tudi drugi odvod enak nič. Tedaj je odgovor na to, ali je v tej točki ekstrem, odvisen od predznaka višjih odvodov, a se pri tem ne bomo spuščali v podrobnosti.

Zgled 109. *Poiščimo lokalne ekstreme funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$.*

$$f'(x) = 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f''(x) = 12x^3 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0\,.$$

S pomočjo Izreka 3.27 ne moremo odločiti, ali je v točki $x = 0$ ekstrem ali pa ga ni.

Zgled 110. *Poiščimo pozitivni števili, katerih vsota je enaka 100, njun produkt pa je največji možen.*

Naj bosta iskani števili x in y. Tedaj iščemo lokalni maksimum funkcije

$$f(x, y) = x\,y\,.$$

Ker je to funkcija dveh spremenljivk, moramo uporabiti znan pogoj $x + y = 100$, s čimer dobimo funkcijo ene spremenljivke:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(100 - x) \\[1em] f'(x) &= 100 - 2x = 0 \\ x &= 50 \\ y &= 50\,. \end{aligned}$$

Omenimo še, kako iščemo minimume in maksimume na zaprtih intervalih. Na odprtem intervalu poiščemo lokalne ekstreme in poleg teh pregledamo še vrednosti v krajiščih intervala. V tem primeru govorimo o *globalnih ekstremih.*

Zgled 111. *Poiščimo globalne ekstreme funkcije* $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \cos x$.

$$f'(x) = \cos x - \sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan x = 1 \Rightarrow x = \tfrac{\pi}{4}$$

$$f''(x) = -\sin x - \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(\tfrac{\pi}{4}) < 0 \Rightarrow \text{lokalni maksimum}$$

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\,.$$

Vrednosti v robovih definicijskega območja sta

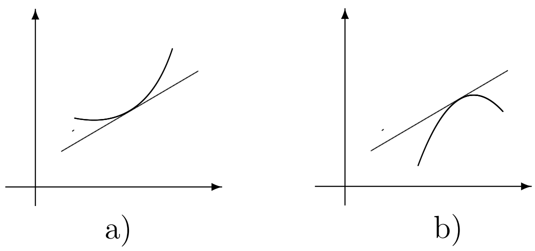
$$f(0) = 1 \quad \text{in} \quad f(\pi) = -1\,,$$

kar pomeni, da imamo v točki π globalni minimum, v točki $\frac{\pi}{4}$ pa globalni maksimum.

Konveksnost in konkavnost funkcij

Nadaljevali bomo v prejšnjem razdelku začeto zgodbo o vplivu odvoda na lastnosti funkcije.

Za uvod v definicijo konveksnosti in konkavnosti funkcije si poglejmo primere grafov funkcij na Sliki 3.55.



Slika 3.55: a) Konveksna in b) konkavna funkcija.

Definicija 3.28. *Funkcija* f *je* konveksna *na* $[a, b]$, *če tangenta v poljubni točki intervala leži pod grafom funkcije oziroma za vsak* $x \in [a, b]$ *velja*

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,,\ x_0 \in [a, b]\,.$$

Funkcija f *je* konkavna *na* $[a, b]$, *če tangenta v poljubni točki intervala leži nad grafom funkcije oziroma za vsak* $x \in [a, b]$ *velja*

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\,,\ x_0 \in [a, b]\,.$$

Očitno velja, da je f konveksna natanko tedaj, ko je $-f$ konkavna.

Izrek 3.29. *(i) Če je $f''(x_0) > 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, je funkcija f na intervalu $[a,b]$ konveksna.*

(ii) Če je $f''(x_0) < 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, je funkcija f na intervalu $[a,b]$ konkavna.

Dokaz.

(i) Ker je $f''(x_0) > 0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$, je f' (strogo) naraščajoča funkcija na (a,b). Izberimo točko x_0 na intervalu (a,b). Tedaj je $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ enačba tangente na graf funkcije f v točki x_0. Nadalje naj bo x poljubna točka na (a,b), različna od x_0. Po Lagrangeovem Izreku 3.20 obstaja med točkama x in x_0 točka x_1, za katero velja

$$f(x) = f'(x_1)(x - x_0) + f(x_0)\,.$$

Če je $x > x_0$, tedaj je $x_1 > x_0$ in ker je f' naraščajoča funkcija, je tudi $f'(x_1) > f'(x_0)$. Zato velja

$$\begin{aligned}
f'(x_1) &> f'(x_0) && / \cdot (x - x_0) > 0\\
f'(x_1)(x - x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) && / + f(x_0)\\
f'(x_1)(x - x_0) + f(x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) &&\\
f(x) &> y(x)\,. &&
\end{aligned}$$

Če pa je $x < x_0$, tedaj je $x_1 < x_0$ in ker je f' naraščajoča funkcija, je tudi $f'(x_1) < f'(x_0)$. Zato velja

$$\begin{aligned}
f'(x_1) &< f'(x_0) && / \cdot (x - x_0) < 0\\
f'(x_1)(x - x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) && / + f(x_0)\\
f'(x_1)(x - x_0) + f(x_0) &> f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) &&\\
f(x) &> y(x)\,. &&
\end{aligned}$$

Podobno velja v primeru, ko je $x_0 = a$ ali $x_0 = b$.

(ii) Dokažemo na analogen način kot točko (i).

∎

Zgled 112. *Preučimo konveksnost oziroma konkavnost funkcij* $f_1(x) = x^3$ *in* $f_2(x) = x^4$.

Izračunajmo drugi odvod obeh funkcij:

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= 6\,x\,, \\ f_2''(x) &= 12\,x^2\,. \end{aligned}$$

To pomeni, da je f_1 za pozitivne vrednosti konveksna in za negativne konkavna, medtem ko je f_2 povsod konveksna.

Definicija 3.30. *Funkcija f ima v točki c* prevoj*, če obstaja taka okolica točke c, da je f na eni strani točke x konveksna, na drugi pa konkavna.*

Izrek 3.31. *Če odvedljiva funkcija v stacionarni točki nima lokalnega ekstrema, ima v njej prevoj.*

Dokaz. Naj obstaja tak $\delta > 0$, da je f konveksna na $(c-\delta, c)$. Ker je $f'(c) = 0$, je tangenta na graf funkcije f v točki c vzporedna z x osjo, in zato je f na $(c-\delta, c)$ nujno padajoča funkcija. Ker v točki c ni lokalnega ekstrema, je f padajoča tudi na desni strani točke c, tj. na intervalu $(c, c+\delta)$. Če je f tudi na $(c, c+\delta)$ konveksna, tangenta v točki c ne more biti vzporedna z x osjo, zatorej ja f na tem intervalu konkavna. ∎

Graf funkcije

Sedaj bomo združili pridobljeno znanje o odvodu in ga uporabili pri risanju grafa funkcije.

Preden se lotimo risanja grafov funkcij, moramo povedati nekaj več o asimptotah funkcije. Asimptota je lahko poljubna funkcija, v primeru, ko je linearna funkcija ali premica, jo lahko dokaj enostavno določimo. Poglejmo najprej asimptote, ki so premice.

Definicija 3.32. *Premica, podana z enačbo $x = a$, je* vertikalna asimptota *ali* pol *funkcije f, če je*

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \textit{ali} \quad \lim_{x\uparrow a} f(x) = \pm\infty\,.$$

Premica, podana z enačbo $y = k\,x+n$, je poševna asimptota *(če je $k \neq 0$) oziroma* horizontalna asimptota *(če je $k = 0$) funkcije f, če je*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx - n) = 0 \quad \textit{ali} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx - n) = 0\,.$$

(Kadar $x \to \infty$, govorimo o desni asimptoti*, za $x \to -\infty$ pa o* levi asimptoti*).*

Poglejmo, kako poiščemo asimptote funkcije.

Trditev 3.33. *(i) Graf funkcije f ima desno poševno oz. horizontalno asimptoto natanko tedaj, ko obstajata limiti*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad in \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-k\,x)=n\,.$$

(ii) Graf funkcije f ima levo poševno oz. horizontalno asimptoto natanko tedaj, ko obstajata limiti

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k \quad in \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k\,x)=n\,.$$

Dokaz.

(i) Naj bo premica z enačbo $y=k\,x+n$ desna poševna (horizonatalna) asimptota funkcije f. Iz definicije asimptote

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-k\,x-n)=0$$

neposredno sledi

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-k\,x)=n\,.$$

Za določitev smernega koeficienta izraz delimo z x, s čimer dobimo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{n}{x}\right)=0\Rightarrow k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\,.$$

(ii) Pokažemo na podoben način.

∎

Zgled 113. *Poiščimo asimptote funkcij.*

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Poiščimo najprej desno asimptoto:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0\\ n &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-0\right)=0\,. \end{aligned}$$

Desna asimptota je tako premica $y=0$ oziroma os x.

Na podoben način izračunamo še levo asimptoto, ki je enaka desni.

2. $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x+1}$.

   Poiščimo desno asimptoto:

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{2x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \\
n &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x}{2x+1} - \frac{x}{2} \right) = \infty
\end{aligned}
$$

   Desna asimptota tako ne obstaja in na podoben način pokažemo, da tudi leva asimptota ne obstaja.

Zaenkrat smo govorili o vertikalni in poševni asimptoti, pri čemer je slednja lahko horizontalna. V vseh teh primerih je asimptota premica. Intuitivno gledano je asimptota premica, ki se ji graf funkcije približuje, ko se premikamo bodisi v pozitivno bodisi v negativno neskončnost.

Poglejmo še primere asimptot, ki niso premice. Graf funkcije f se lahko v neskončnosti približuje neki drugi funkciji y, katere graf ni premica. V tem primeru bomo rekli, da je y asimptota funkcije f. Na take primere naletimo pri ulomljenih racionalnih funkcija, kar kaže Zgled 114.

Naj bo dana ulomljena racionalna funkcija

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}\,,$$

kjer je števec polinom stopnje n in imenovalec polinom stopnje m. Če je $n < m$, tedaj je asimptota funkcije f os x. V nasprotnem že vemo, da lahko polinoma delimo

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = Q(x) + \frac{R_{m-1}(x)}{P_m(x)}\,,$$

kjer sta $Q(x)$ in $R(x)$ polinoma, pri čemer je slednji stopnje kvečjemu $m-1$. Limitiranje funkcije f bodisi v pozitivni ali negativni del neskončnosti pokaže, da se graf funkcije f približuje grafu polinoma Q, saj gre kvocient polinomov R_{m-1} in P_m proti nič. Zatorej je asimptota enaka

$$y(x) = Q(x)\,.$$

Zgled 114. *Poiščimo asimptote funkcije* $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-1}$.

$$f(x) = \frac{x^3-8}{x-1} = x^2+x+1 - \frac{7}{x-1}\,,$$

zato je poševna asimptota $y = x^2+x+1$, vertikalna asimptota oziroma pol pa je določen s predpisom $x = 1$.

Pri risanju grafa funkcije upoštevamo naslednje:

- definicijsko območje in preverimo sodost/lihost ter periodičnost funkcije,
- ničle funkcije in po potrebi nekaj točk na grafu funkcije,
- asimptote funkcije,
- stacionarne točke in lokalne ekstreme,
- območja monotonosti in konveksnosti/konkavnosti funkcije.

Zgled 115. *Skicirajmo graf funkcije $f(x) = xe^x$.*

Definicijsko območje je enako $\mathbb{R}$, ničlo ima v točki $x = 0$. Desne asimptote ni, leva asimptota je os x, kar izračunamo s pomočjo L'Hospitalovega pravila:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ n &= \lim_{x\to-\infty} (xe^x - 0) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0\,. \end{aligned}$$

Nadalje sta prvi in drugi odvod enaka:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x(x+1) \\ f''(x) &= e^x(x+2)\,. \end{aligned}$$

Lokalni minimum je tako v točki $(-1, e^{-1})$, interval naraščanja je $[-1, \infty)$, padanja $(\infty, -1]$, konveksna je na $(-2, \infty)$ in konkavna na $(\infty, -2)$. Na Sliki 3.56 vidimo graf funkcije $f(x) = x\,e^x$.

Uporaba v kemiji

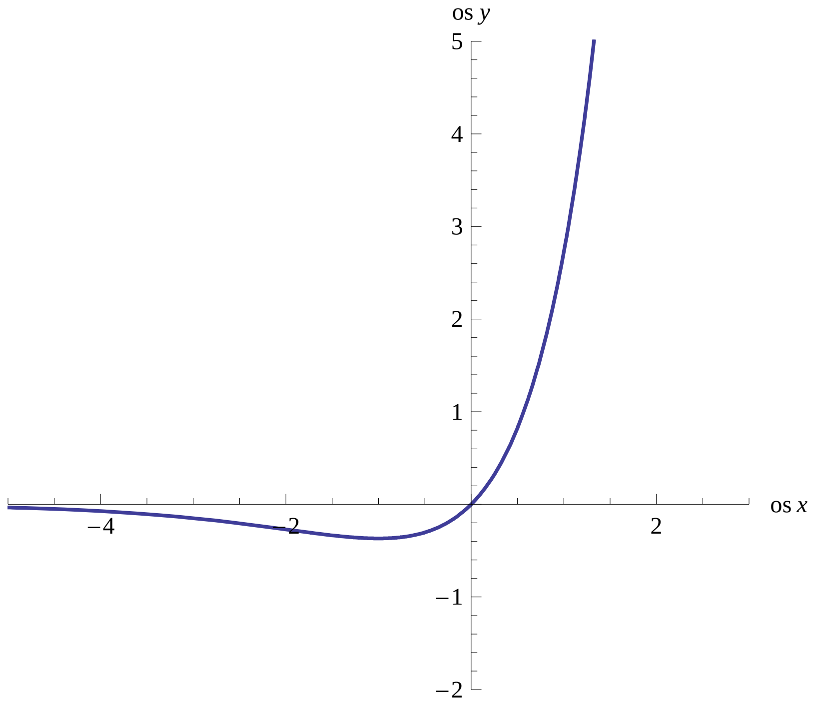
V želji, da osvojeno znanje približamo bralcu, si bomo pogledali konkretni primer uporabe odvoda v kemiji.

Splošna plinska enačba opisuje obnašanje idealnega plina in se glasi

$$pV = nRT\,,$$

pri čemer je

p ... pritisk,
V ... prostornina,
T ... temperatura,
R ... splošna plinska konstanta,
n ... množina snovi.



Slika 3.56: Graf funkcije $f(x) = xe^x$.

O idealnem plinu govorimo, kadar zanemarimo velikost delcev, ki ga sestavljajo in njihovo medsebojno interakcijo. Posplošitev splošne plinske enačbe, ki upošteva velikost delcev in njihovo medsebojno interakcijo, je Van der Waalsova enačba stanja, ki jo je podal Johannes Diderik van der Waals v l. 1873 in opisuje realne pline. Glasi se

$$\left(p + \frac{n^2\, a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT\,,$$

pri čemer

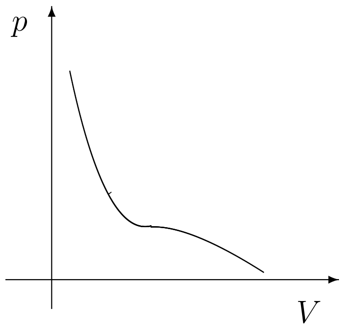
a ... določa interakcijo med delci,
b ... določa prostornino delcev v tekočini.

Parametra a in b sta odvisna od snovi, ki jo opisujemo.

Vsak realni plin lahko utekočinimo. To dosežemo s stiskanjem in/ali ohlajanjem, odvisno od posameznega plina. Za vsak plin obstaja temperatura, nad katero ga ne moremo utekočiniti. To temperaturo imenujemo *kritična temperatura* in jo označujemo T_c. Realni plin lahko utekočinimo le pod ali pri kritični temperaturi. Pritisk, ki ga za to potrebujemo, je *kritični pritisk* p_c in prostornina, ki ustreza T_c ter p_c, je *kritična prostornina* V_c. S skupno besedo T_c, p_c in V_c imenujemo *kritične konstante.*

Obstajajo plini, imenovani stalni plini, ki imajo kritično temperaturo pod sobno temperaturo. Če jih želimo utekočiniti, moramo te pline ohladiti do temperature pod njihovo T_c, kar pomeni pod sobno temperaturo. To so na primer He, H_2, N_2, O_2, Ne, Ar, ... Poznamo pa veliko snovi, ki imajo T_c nad sobno temperaturo. Pri sobni temperaturi so te snovi v tekočem ali celo trdnem agregatnem stanju. Recimo voda ima T_c pri $647,1\,K$ (standardna sobna temperatura je $298,2$ K). Vodo lahko utekočinimo pri poljubni temperaturi nižji od $T_c = 647,1$ K. Nad temperaturo vrelišča vode, ki je $398,2$ K, bi za ohranitev tekočega stanja vode morali delovati s pritiskom, ki bi bil višji od normalnega zračnega pritiska.

Za opis stanja snovi velikokrat uporabljamo $p - V$ diagram, kjer pritisk snovi p prikažemo kot funkcijo prostornine V, pri čemer je temperatura konstantna. To krivuljo imenujemo *izoterma* (*glej Sliko 3.57*).



Slika 3.57: $p - V$ diagram.

Iz $p - V$ diagrama je razvidno, da se plin utekočini v prevoju izoterme pri T_c, saj krivulja prehaja iz konveksne v konkavno. Točko prevoja imenujemo *kritična točka* in ustreza kritičnim konstantam. Računsko to pomeni, da moramo poiskati prvi in drugi odvod funkcije $p(V)$ in rešiti enačbi $p(V)' = 0$ in $p(V)'' = 0$.

Izrazimo najprej p kot funkcijo spremenljivke V:

$$p(V) = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}\,.$$

Izračunamo oba odvoda, ju enačimo z 0 in rešimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} p'(V) &= \frac{-nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3} &= 0 \\ p''(V) &= \frac{2nRT}{(V - nb)^3} - \frac{6an^2}{V^4} &= 0\,. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvo enačbo z $\dfrac{2}{V-nb}$ in obe seštejmo:

$$\begin{aligned}
\frac{4an^2}{V^3(V-nb)} - \frac{6an^2}{V^4} &= 0 \qquad\qquad / \cdot \frac{V^3}{2an^2} \\
\frac{2}{V-nb} &= \frac{3}{V} \\
2V &= 3V - 3nb \\
V_c = V &= 3nb\,.
\end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo T_c in p_c:

$$\begin{aligned}
\frac{-nRT}{(3nb-nb)^2} + \frac{2an^2}{27n^3b^3} &= 0 \\
\frac{RT}{4nb^2} &= \frac{2a}{27nb^3} \\
T_c = T &= \frac{8a}{27bR}\,.
\end{aligned}$$

Ker poznamo kritično prostornino in temperaturo, lahko izračunamo še kritični pritisk:

$$\begin{aligned}
p_c &= \frac{nR\dfrac{8a}{27bR}}{3nb-nb} - \frac{an^2}{9n^2b^2} \\
&= \frac{a}{27b^2}\,.
\end{aligned}$$

3.4 Naloge z rešitvami

3.4.1 Odvod funkcije

1. Po definiciji izračunaj odvode naslednjih funkcij

   (a) $f(x) = x^2$,

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$,

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x > 0$,

   (d) $f(x) = \cos x$.

   Rešitev.

$$(a)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = \lim_{h\to 0} 2x + \lim_{h\to 0} h = 2x,$$

$$(b)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$(c)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{hx^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{x^2(x+h)^2} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x}{x^2(x+h)^2} - \lim_{h\to 0} \frac{h}{x^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x}{x^2(x+h)^2} =$$
$$= \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3},$$

$$(d)\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \sin h}{h}$$
$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$
$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\left(\cos^2 \frac{h}{2} - \sin^2 \frac{h}{2}\right) - \left(\cos^2 \frac{h}{2} + \sin^2 \frac{h}{2}\right)}{h} - \sin x$$
$$= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{2 \cdot \frac{h}{2}} - \sin x = -\cos x \lim_{h\to 0} \sin \frac{h}{2} - \sin x$$
$$= -\cos x \cdot 0 - \sin x = -\sin x.$$

2. Izračunaj odvode eksplicitno podanih funkcij

(a) $f(x) = x^{13} + 2x^2 + x + 4$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 6\dfrac{1}{x^7} + \dfrac{1}{x^{13}}$,

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$,

(d) $f(x) = \left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$,

(e) $f(x) = \ln(\log_5 x)$,

(f) $f(x) = x^3 e^{3x}$,

(g) $f(x) = x2^{x^2+2}$,

(h) $f(x) = \ln(\cos x)\sin 2x$,

(i) $f(x) = \left(\tan(ax) + \dfrac{1}{\cos(ax)}\right)^n$, kjer sta $a, n \in \mathbb{N}$,

(j) $f(x) = \dfrac{\arctan x}{\arcsin(x^2)}$,

(k) $f(x) = \dfrac{\cosh x + e^x}{-\sinh x}$,

(l) $f(x) = x^x$,

(m) $f(x) = (\sin x)^{\ln x}$,

Rešitev. Pri odvajanju bomo uporabljali že znane odvode elementarnih funkcij in lastnosti odvoda (odvod vsote, odvod razlike, odvod produkta, odvod kvocienta in verižno pravilo).

(a) $f'(x) = \left(x^{13} + 2x^2 + x + 4\right)' = 13x^{12} + 4x + 1$,

(b) $$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^{13}}\right)' = \left(x^{-1} + 6x^{-7} + x^{-13}\right)' =$$
$$= -x^{-2} - 42x^{-8} - 13x^{-14} = -\frac{1}{x^2} - 42\frac{1}{x^8} - 13\frac{1}{x^{14}},$$

(c) $$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot \left(x^2+x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot (2x+1),$$

(d) $$f'(x) = \left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^n\right)' =$$
$$= n\left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(2x^{\frac{3}{2}} + (4x+1)^{\frac{1}{4}}\right)' =$$
$$= n\left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(3x^{\frac{1}{2}} + \frac{(4x+1)'}{4(4x+1)^{\frac{3}{4}}}\right) =$$
$$= n\left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(3x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{4(4x+1)^{\frac{3}{4}}}\right) =$$
$$= n\left(\left(2x^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{4x+1}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(3x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(4x+1)^3}}\right),$$

(e) $f'(x) = (\ln(\log_5 x))' = \dfrac{1}{\log_5 x} \cdot (\log_5 x)' = \dfrac{1}{\log_5 x} \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln 5},$

(f) $f'(x) = \left(x^3 e^{3x}\right)' = (x^3)' \cdot e^{3x} + x^3 \cdot \left(e^{3x}\right)' = 3x^2 e^{3x} + x^3 e^{3x} \cdot (3x)' =$
$= 3x^2 e^{3x} + 3x^3 e^{3x},$

(g) $f'(x) = \left(x 2^{x^2+2}\right)' = (x)' \cdot 2^{x^2+2} + x \cdot \left(2^{x^2+2}\right)' =$
$= 2^{x^2+2} + x 2^{x^2+2} \cdot \ln 2 \cdot \left(x^2+2\right)' = \left(1 + 2 \cdot \ln 2 \cdot x^2\right) 2^{x^2+2},$

(h) $f'(x) = (\ln(\cos x) \sin 2x)' = (\ln(\cos x))' \cdot \sin 2x + \ln(\cos x) \cdot (\sin 2x)' =$
$= \dfrac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' \cdot \sin 2x + \ln(\cos x) \cdot \cos 2x \cdot (2x)' =$
$= -\dfrac{\sin x}{\cos x} \sin 2x + 2 \ln(\cos x) \cos 2x,$

(i) $f'(x) = \left(\left(\tan(ax) + \dfrac{1}{\cos(ax)}\right)^n\right)' =$
$= n \left(\tan(ax) + \dfrac{1}{\cos(ax)}\right)^{n-1} \cdot \left(\tan(ax) + \dfrac{1}{\cos(ax)}\right)' =$
$= n \left(\tan(ax) + \dfrac{1}{\cos(ax)}\right)^{n-1} \cdot \left(\dfrac{a}{\cos^2(ax)} - \dfrac{(\cos(ax))'}{\cos^2(ax)}\right) =$
$= n \left(\tan(ax) + \dfrac{1}{\cos(ax)}\right)^{n-1} \cdot \left(\dfrac{a}{\cos^2(ax)} + \dfrac{a \sin(ax)}{\cos^2(ax)}\right) =$
$= n \left(\tan(ax) + \dfrac{1}{\cos(ax)}\right)^{n-1} \cdot \left(\dfrac{a + a\sin(ax)}{\cos^2(ax)}\right),$

(j) $f'(x) = \left(\dfrac{\arctan x}{\arcsin(x^2)}\right)' =$
$= \dfrac{(\arctan x)' \cdot \arcsin(x^2) - \arctan x \cdot \left(\arcsin(x^2)\right)'}{(\arcsin(x^2))^2} =$
$= \dfrac{\frac{1}{1+x^2} \cdot \arcsin(x^2) - \arctan x \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}{\left(\arcsin(x^2)\right)^2},$

(k) $f'(x) = \left(\dfrac{\cosh x + e^x}{-\sinh x}\right)' =$
$= \dfrac{(\cosh x + e^x)' \cdot (-\sinh x) - (\cosh x + e^x) \cdot (-\sinh x)'}{\sinh^2 x} =$
$= \dfrac{(\sinh x + e^x) \cdot (-\sinh x) - (\cosh x + e^x) \cdot (-\cosh x)}{\sinh^2 x} =$
$= \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x - (\sinh x - \cosh x)\, e^x}{\sinh^2 x},$

(l) $f'(x) = (x^x)' = \left(e^{\ln x^x}\right)' = \left(e^{x \ln x}\right)' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' =$
$= x^x \cdot \left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1),$

(m) $f'(x) = \left((\sin x)^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln(\sin x)^{\ln x}}\right)' = \left(e^{\ln x \cdot \ln(\sin x)}\right)' =$
$= \left(e^{\ln x \cdot \ln(\sin x)}\right) \cdot (\ln x \cdot \ln(\sin x))' =$

$$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) =$$
$$= (\sin x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cdot \cot x\right).$$

3. Izračunaj odvode implicitno podanih funkcij

   (a) $x^2 + 2xy + 5 = 0$,

   (b) $(x + xy)y^2 = 0$,

   (c) $\arctan \dfrac{x}{2y} = \ln x + 5y$,

   (d) $\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right) = \cos(xe^y)$,

   (e) $x^y = y^x$,

Rešitev. V vseh primerih y predstavlja $y(x)$. V prvem primeru bomo preverili, da je odvod implicitno podane funkcije enak odvodu eksplicitno podane funkcije.

(a) Odvod implicitno podane funkcije $x^2 + 2xy + 5 = 0$ je

$$2x + 2y + 2xy' = 0.$$

Če eksplicitno izrazimo funkcijo dobimo

$$y = \frac{-x^2 - 5}{2x}$$

in ko to odvajamo v eksplicitni obliki dobimo

$$y' = \frac{-2x^2 + 10}{4x^2} = \frac{-x^2 + 5}{2x^2}.$$

Preverimo, da smo res v obeh primerih dobili enako. Če iz $2x+2y+2xy' = 0$ izrazimo y' in upoštevamo y, dobimo

$$y' = \frac{-2x - 2 \cdot \frac{-x^2-5}{2x}}{2x} = \frac{-2x^2 - 10}{4x^2} = \frac{-x^2 + 5}{2x^2}.$$

Opazimo, da se odvoda res ujemata.

(b) $(1 + y + xy')y^2 + (x + xy) \cdot (2yy') = 0$,

(c) $\dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{2y}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{2y - 2xy'}{4y^2}\right) = \dfrac{1}{x} + 5y'$,

(d) $\cos\left(\dfrac{1}{xy}\right) \cdot \left(-\dfrac{y + xy'}{(xy)^2}\right) = -\sin(xe^y) \cdot \left(e^y + xe^y \cdot y'\right)$,

(e) *Izraz* $x^y = y^x$ *pretvorimo v* $e^{y\ln x} = e^{x\ln y}$ *in sedaj odvajamo*

$$
\begin{aligned}
e^{y\ln x} \cdot \left(y' \ln x + \frac{y}{x}\right) &= e^{x\ln y} \cdot \left(\ln y + \frac{xy'}{y}\right) \\
x^y \cdot \left(y' \ln x + \frac{y}{x}\right) &= y^x \cdot \left(\ln y + \frac{xy'}{y}\right).
\end{aligned}
$$

4. Izračunaj n-ti odvod funkcije $f(x) = x^2 e^x$.

Rešitev. *To nalogo bomo rešili na naslednji način: najprej bomo s pomočjo večkratnega odvajanja prišli do teze, zapisali to tezo in jo nato dokazali s pomočjo matematične indukcije.*

$$
\begin{array}{lcccccc}
f(x) & = & x^2e^x & & & & \\
f'(x) & = & x^2e^x & + & 2xe^x & & \\
f''(x) & = & x^2e^x & + & 4xe^x & + & 2e^x \\
f^{(3)}(x) & = & x^2e^x & + & 6xe^x & + & 6e^x \\
f^{(4)}(x) & = & x^2e^x & + & 8xe^x & + & 12e^x \\
f^{(5)}(x) & = & x^2e^x & + & 10xe^x & + & 20e^x
\end{array}
$$

Na podlagi teh odvodov predpostavimo formulo (glej koeficiente pred členi v odvodih)

$$f^{(n)}(x) = x^2e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x$$

in sedaj dokažimo, da ta formula velja za vsa naravna števila. Za $n = 1$ *to trivialno velja. Predpostavimo indukcijsko predpostavko* $f^{(n)}(x) = x^2e^x + 2nxe^x + n(n-1)e^x$, $n \in \mathbb{N}$, *in dokažimo, da velja tudi*

$$f^{(n+1)}(x) = x^2e^x + 2(n+1)xe^x + (n+1)ne^x.$$

Dokazali bomo tako, da bomo odvajali $f^{(n)}(x)$.

$$
\begin{aligned}
\left(f^{(n)}(x)\right)' &= x^2e^x + 2xe^x + 2nxe^x + 2ne^x + n(n-1)e^x \\
&= x^2e^x + (2n+2)xe^x + (n^2 + 2n - n)e^x \\
&= x^2e^x + 2(n+1)xe^x + (n+1)ne^x.
\end{aligned}
$$

S tem je formula dokazana.

5. Izračunaj n-ti odvod funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.

Rešitev. *Najprej poiščimo takšni realni števili* A *in* B, *da bo veljalo*

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Iz tega posledično dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama

$$
\begin{aligned}
A + B &= 1 \\
2A - 2B &= 1
\end{aligned}
$$

Iz tega sledi, da je $A = \frac{3}{4}$ in $B = \frac{1}{4}$. Torej bomo v nadaljevanju odvajali

$$f(x) = \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)}.$$

Odvajajmo

$$\begin{array}{rcccc}
f(x) & = & \dfrac{3}{4(x-2)} & + & \dfrac{1}{4(x+2)} \\
f'(x) & = & \dfrac{3\cdot(-1)}{4(x-2)^2} & + & \dfrac{-1}{4(x+2)^2} \\
f''(x) & = & \dfrac{3\cdot(-1)\cdot(-2)}{4(x-2)^3} & + & \dfrac{(-1)\cdot(-2)}{4(x+2)^3} \\
f'''(x) & = & \dfrac{3\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{4(x-2)^4} & + & \dfrac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{4(x+2)^4} \\
 & \vdots & & & \\
f^{(n)}(x) & = & \dfrac{3\cdot(-1)^n n!}{4(x-2)^{n+1}} & + & \dfrac{(-1)^n\cdot n!}{4(x+2)^{n+1}}.
\end{array}$$

S pomočjo matematične indukcije dokažimo, da formula res velja. Naredimo zgolj indukcijski korak

$$\begin{array}{rcccc}
\left(f^{(n)}(x)\right)' & = & \left(\dfrac{3\cdot(-1)^n n!}{4(x-2)^{n+1}}\right)' & + & \left(\dfrac{(-1)^n\cdot n!}{4(x+2)^{n+1}}\right)' \\
 & = & \dfrac{3\cdot(-1)^n n!\cdot(-(n+1))}{4(x-2)^{n+2}} & + & \dfrac{(-1)^n\cdot n!\cdot(-(n+1))}{4(x+2)^{n+2}} \\
 & = & \dfrac{3\cdot(-1)^{n+1}(n+1)!}{4(x-2)^{n+2}} & + & \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)!}{4(x+2)^{n+2}}.
\end{array}$$

3.4.2 Geometrijski pomen odvoda

1. Določi enačbo tangente na graf funkcije

$$f(x) = \ln(x^2 + 4x + 1)$$

   v točki $T(0, y)$.

   Rešitev. Smerni koeficient tangente na graf funkcije v $x = 0$ je enak $f'(0)$.

$$f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x+1}$$

   in zato $f'(0) = k_t = 4$. Ker graf poteka skozi točko $(0, f(0)) = (0, 0)$, dobimo enačbo tangente

$$y = 4x.$$

2. Zapiši enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - x + 1$, ki je vzporedna s premico $y = 2x - 1$. Poišči še enačbo pripadajoče normale na graf funkcije.

Rešitev. *Tangente na graf funkcije f so vzporedne z y, ko je $f'(x) = 2$. Tako dobimo enačbo*

$$3x^2 - 1 = 2.$$

Iz tega sledi $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$. Posledično dobimo točki $(-1, f(-1)) = (-1, 1)$ in $(1, f(1)) = (1, 1)$. Sedaj poiščimo enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(-1, 1)$. Smerni koeficient tangente je 2 in zato dobimo enačbo

$$1 = 2 \cdot (-1) + n.$$

Tako dobimo enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(-1, 1)$, ki je enaka

$$y = 2x + 3.$$

Podobno dobimo enačbo tangrente na graf funkcije f v točki $(1, 1)$, ki je enaka

$$y = 2x - 1.$$

Smerni koeficient normale na graf funkcije je $k_n = -\frac{1}{k_t}$, kjer je k_t smerni koeficient tangente na graf funkcije. Tako imamo v našem primeru

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot (-1) + n$$

in enačba normale na graf funkcije f skozi $(-1, 1)$ je enaka

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Podobno poiščemo normalo v $(1, 1)$ in dobimo

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

3. Poišči vse točke, v katerih je smerni koeficient normale na graf funkcije $f(x) = x - \cos x$ enak -1.

   Rešitev. *Odvod funkcije f je $f'(x) = 1 + \sin x$. Če upoštevamo zvezo med smernim koeficientom tangente in normale, dobimo, da je potrebno poiskati tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja*

   $$-\frac{1}{1 + \sin x} = -1$$

   oziroma

   $$\sin x = 0.$$

   Rešitev je tako množica točk $\Big\{(k\pi,\, k\pi - (-1)^k) \mid k \in \mathbb{Z}\Big\}$.

4. Zapiši enačbo vseh tangent na graf funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$, ki so vzporedne s premico $x + 2y + 3 = 0$.

Rešitev. Najprej implicitno obliko enačbo premice $x + 2y + 3 = 0$ preoblikujemo v eksplicitno obliko $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. Tako iščemo tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$\frac{1}{\cos x - 1} = -\frac{1}{2}$$

oziroma

$$\cos x = -1.$$

Rešitev tega je množica $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Ker so vse funkcijske vrednosti množice $\{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ enake 0, dobimo števno enačb

$$0 = -\frac{1}{2}(\pi + 2k\pi) + n, \text{ kjer je } k \in \mathbb{Z}.$$

Tako za vsak $k \in \mathbb{Z}$ dobimo tangento

$$y_{t_k} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\pi + 2k\pi).$$

5. Za katere vrednosti $a \in \mathbb{R}$ je premica $2x + y = 0$ vzporedna tangenti grafa funkcije

$$f(x) = a(x-2)^2$$

v točki $(\frac{3}{2}, y)$?

Rešitev. Tangenta na graf funkcije bo vzporedna s premico $2x + y = 0$, ko bo $f'(\frac{3}{2}) = -2$. Ko odvajamo in vstavimo vrednosti, dobimo

$$2a\left(\frac{3}{2} - 2\right) = -2.$$

Izrazimo a in dobimo, da je $a = 2$. Torej smo dobili, da je $f(x) = 2(x-2)^2$.

6. Določi funkciji $f(x) = ax^2 - 9a$ parameter a tako, da bosta tangenti na graf funkcije v njegovih presečiščih z abscisno osjo pravokotni.

Rešitev. Funkcija f (ne glede na vrednost a) seka abscisno os v $x_0 = -3$ in $x_1 = 3$. Ker morata biti tangenti pravokotni, dobimo

$$6a = \frac{1}{6a}$$

(odvod funkcije f je enak $f'(x) = 2ax$). Tako dobimo, da je $a_1 = -\frac{1}{6}$ in $a_2 = \frac{1}{6}$.

7. Poišči tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere imajo tangente na grafa funkcij $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$ in $g(x) = -x^2 + 5x$ enak smerni koeficient. V teh točkah zapiši tudi enačbo tangente na graf funkcije g.

Rešitev. *Iščemo tiste x, za katere velja $f'(x) = g'(x)$. V našem primeru dobimo enačbo*

$$x^2 + 2x = -2x + 5.$$

Rešitvi te enačbe sta $x_1 = -5$ in $x_2 = 1$ ter tako dobimo točki $T_1(-5, -50)$ in $T_2(1, 4)$. Za računanje enačb tangent izračunamo smerna koeficienta $k_1 = g'(-5) = 15$ in $k_2 = g'(1) = 3$ ter s podobnim računom kot v prejšnjih nalogah dobimo enačbi tangent na graf funkcije g v zahtevanih točkah

$$y_1 = 15x + 25$$
$$y_2 = 3x + 1.$$

8. Dana je funkcija $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$. V katerih točkah tangenta na graf funkcije f oklepa z abscisno osjo kot $\frac{\pi}{4}$?

Rešitev. *Upoštevamo, da je $f'(x) = \tan \varphi$. V našemo primeru dobimo enačbo*

$$3x^2 - 6x + 10 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Ta kvadratna enačba ima rešitvi $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$ ter tako dobimo točki $(1, 1)$ in $(3, -1)$.

9. Preveri, da se funkciji $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ in $g(x) = 2x + \sin x + 1$ sekata v $x_0 = 0$, in nato izračunaj kot med grafoma funkcij v x_0.

Rešitev. *Funkciji se sekata v $x_0 = 0$, saj je $f(0) = g(0) = 1$. Kot med grafoma funkcij izračunamo s formulo $\tan \varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, kjer je φ kot med grafoma funkcij, k_1 in k_2 pa sta smerna koeficienta tangent na graf funkcij v neki točki. V našem primeru $k_1 = f'(0) = \frac{1}{2}$ in $k_2 = g(0) = 3$. Tako dobimo*

$$\tan \varphi = \left|\frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{1}{2} \cdot 3}\right|$$

in zato je $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

10. Naj bo a realno število in $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkciji $f(x) = x^2 - 7x + 6$ in $g(x) = (x - 1)(x^2 + ax - 2)$.

    (a) Za katere vrednosti parametra a se grafa funkcij f in g v točki (1,0) sekata pod kotom $\frac{\pi}{4}$?

    (b) Za katere vrednosti $x_0 \in \mathbb{R}$ tangenta na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ poteka skozi točko (0,2)?

Rešitev. *10*

(a) *Vidimo, da se f in g res sekata v (1,0). Naj bo $k_1 = f'(1)$ in $k_2 = g'(1)$. Če želimo, da se grafa funkcij sekata v točki $(1,0)$ pod kotom $\frac{\pi}{4}$, potem mora veljati $\left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = 1$. V našem primeru dobimo*

$$\left|\frac{a - 1 + 5}{1 - 5(a-1)}\right| = 1.$$

Ko rešimo to enačbo, dobimo rešitvi $a_1 = \frac{1}{3}$ in $a_2 = \frac{5}{2}$.

(b) *Uporabili bomo naslednjo obliko enačbe premice*

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

kjer je k smerni koeficient premice in (x_0, y_0) točka, skozi katero poteka premica.

Smerni koeficient tangente na graf funkcije f v točki (x_0, y_0) je $f'(x_0) = 2x_0 - 7$. Ker vemo, da poteka tangenta na graf funkcije f skozi $(0,2)$ in (x_0, y_0), dobimo

$$2 - y_0 = (2x_0 - 7)(0 - x_0).$$

Upoštevajmo, da je $y_0 = f(x_0)$ in tako dobimo

$$2 - x_0^2 + 7x_0 - 6 = -2x_0^2 + 7x_0.$$

Ničli te kvadratne enačbe sta $x_{0_1} = -2$ in $x_{0_2} = 2$, kar je tudi končna rešitev naše naloge.

11. Določi realni števili a in b tako, da bo imela funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + a \sin x + b \cos x}$$

lokalni ekstrem v točki $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$.

Rešitev. *Ker točka $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ leži na grafu funkcije, dobimo prvo enačbo*

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 + a\frac{\sqrt{3}}{2} + b\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Ker je v $(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3})$ tudi lokalni ekstrem f, je najprej potrebno odvajati f

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x(2 + a\sin x + b\cos x) - \sin x(a\cos x - b\sin x)}{(2 + a\sin x + b\cos x)^2} \\ &= \frac{2\cos x + b}{(2 + a\sin x + b\cos x)^2}. \end{aligned}$$

Iz pogoja $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$ dobimo $1 + b = 0$. Sledi, da je $b = -1$ in posledično $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3.4.3 Uporaba odvoda

1. S pomočjo diferenciala izračunaj približne vrednosti

   (a) $\sqrt{16,16}$,

   (b) $\ln(1,25)$,

   (c) $\tan(\frac{44\pi}{180})$.

   Rešitev. V vseh primerih bomo uporabili formulo $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$. Cilj je prepoznati a, h in f.

   (a) $a = 16$, $h = 0,16$ in $f(x) = \sqrt{x}$,

   $$\sqrt{16,16} \doteq \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,16 = 4,02.$$

   (b) $a = 1$, $h = 0,25$, $f(x) = \ln x$,

   $$\ln(1,25) \doteq \ln(1) + \frac{1}{1} \cdot 0,25 = 0,25.$$

   (c) V tem primeru bomo rezultat izrazili s pomočjo števila π.
   $a = \frac{\pi}{4}$, $h = -\frac{\pi}{180}$, $f(x) = \tan x$,

2. S pomočjo diferenciala dokaži, da za $\varepsilon > 0$, kjer je ε poljubno majhno število, velja

   $$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \doteq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

   Rešitev. Sklicali se bomo na formulo $f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h$. V tem primeru je $a = 0$, $h = \varepsilon$ in $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Ko odvajamo funkcijo f, dobimo $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}$. Izračunane podatke vstavimo v formulo in dobimo

   $$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \doteq \frac{1}{\sqrt{1+0}} - \frac{1}{2\sqrt{(1+0)^3}} \cdot \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. S pomočjo diferenciala dokaži, da za $y, z \in \mathbb{R}$, $|z| < |y|$, velja

   $$\sqrt[3]{y^3 + z} \doteq y + \frac{z}{3y^2}.$$

   Rešitev. Podobno kot v nalogi 2. V tem primeru je $a = y^3$, $h = z$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Uporabimo formulo in dobimo

   $$\sqrt[3]{y^3 + z} \doteq \sqrt[3]{y^3} + \frac{1}{3\sqrt[3]{y^6}} \cdot z = y + \frac{z}{3y^2}.$$

4. S pomočjo Lagrangeovega izreka dokaži, da ima enačba $e^x = x+1$ eno samo rešitev $x = 0$.

   Rešitev. Naj bo $f(x) = e^x - x - 1$. Upoštevajmo Lagrangeovo formulo ($f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, $c \in (a,b)$) na intervalu $[0,x]$:

   $$(e^x - x - 1) - (e^0 - 0 - 1) = (e^c - 1)(x - 0).$$

   Iz tega dobimo enačbo

   $$e^x - 1 = xe^c, \quad 0 < c < 1.$$

   Ker je po predpostavi $e^x = x + 1$, upoštevamo to pri prejšnji enačbi in dobimo

   $$x = xe^c.$$

   Ta enakost velja, ko je $x = 0$.
   Opomba: brez izgube za splošnost smo c izbrali na intervalu $(0,1)$.

5. Dokaži neenakosti

   (a) $\ln(x+1) < x$, za $x \in \mathbb{R}^+$,

   (b) $1 + x \leq e^x$, za $x \in \mathbb{R}$,

   (c) $\sin x < x$, za $x \in \mathbb{R}^+$.

   Rešitev.

   (a) Naj bo $f(x) = x - \ln(x+1)$. Opazimo, da je $f(x) = 0$, ko je $x = 0$. Odvod te funkcije je $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$. Ker je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}^+$, potem je f strogo naraščajoča (nima lokalnega ekstrema) in posledično neenakost res velja.

   (b) Naj bo $f(x) = e^x - x - 1$. Opazimo, da je $f(x) = 0$, ko je $x = 0$. Za vsak x, kjer je $x \in \mathbb{R}^+$, je $f'(x) = e^x - 1 > 0$ in zato neenakost velja (glej primer (a)). Podobno za negativne vrednosti. Natančneje, za vsak x, kjer je $x \in \mathbb{R}^-$, je $f'(x) = e^x - 1 < 0$ kar pomeni, da je f na tem območju padajoča, torej je $x + 1 < e^x$. Torej neenakost velja za poljuben $x \in \mathbb{R}$.

   (c) Trivialno je res, da je $\sin x < x$ za $x > \frac{\pi}{2}$, saj je $\sin x \leq 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, zato preverimo neenakost samo za $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
   Naj bo $f(x) = x - \sin x$. Vidimo, da je $f(x) = 0$, ko je $x = 0$. Ker je $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ za vsak x, kjer je $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, zato neenakost res velja (glej primer (a)).

6. Dokaži enakosti

   (a) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, za $x \in [-1,1]$,

   (b) $\arctan x + \mathrm{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$, za $x \in [-1,1]$.

Rešitev. V tej nalogi bomo uporabili posledico Lagrangeovega izreka (lahko pa med drugim gledamo kot na posledico Rolleovega izreka). Ta pravi, če imamo zvezno odvedljivo funkcijo f na intervalu $[a,b]$ za katero velja, da je $f'(x)=0$ za vsak $x \in (a,b)$, potem je na $[a,b]$ f konstantna funkcija (razmisli).

(a) Najprej odvajajmo $f(x) = \arcsin x + \arccos x$.

$$f'(x) = (\arcsin x + \arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Seveda to res zadošča posledici Lagrangeovega izreka. Do konstante $\frac{\pi}{2}$ pridemo tako, da vstavimo vrednost -1 v $f(x)$.

(b) Podobno v (a) primeru odvajamo funkcijo $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x$. Dobimo

$$f'(x) = (\arctan x + \operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0.$$

Vidmo, da je odvod enak 0. Do konstante $\frac{\pi}{2}$ pridemo tako, da vstavimo vrednost -1 v $f(x)$.

7. Naj bo $[a,b]$ poljuben interval na realni osi in naj bo $f(x) = 2x^2 - x$. Dokaži, da število c, ki nastopa v Lagrangeovi formuli $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, ravno na sredini med a in b.

Rešitev. Izračunamo odvod funkcije f, $f'(x) = 4x - 1$ in izrazimo c iz enačbe

$$2b^2 - b - 2a^2 + a = (4c-1)(b-a).$$

Dobimo, da je $c = \frac{a+b}{2}$.

8. S pomočjo L'Hospitalovega pravila izračunaj naslednje limite

(a) $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x$,

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x}$,

(c) $\lim_{x\to 0} x \cot(2x)$,

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^x - \sin x}{x^2}$,

(e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\cot x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$,

(f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$,

(g) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$,

(h) $\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x^2}$,

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$.

Rešitev.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{-2} = 0,$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x \ln 3 - 2^x \ln 2}{1} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right),$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot(2x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos(2x)}{\sin(2x)} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 2x\sin(2x)}{2\cos(2x)} =$
$= \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2},$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^x - \sin x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + xe^x - \cos x}{2x} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^x + xe^x + \sin x}{2} =$
$= \frac{2+0+0}{2} = 1,$

(e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x\sin x}{\cos x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x\sin x - \pi}{2\cos x}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + 2x\cos x}{-2\sin x} = \frac{2-0}{-2} = -1,$

(f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi - 2x)} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-4\sin x(\pi - 2x)} \stackrel{L'H}{=}$
$\stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-4\cos x(\pi - 2x) + 8\sin x} = \frac{-1}{0+8} = -\frac{1}{8},$

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to \infty} \left(-\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}}\right) =$
$= \lim\limits_{x\to \infty} \left(-\frac{x-1}{x+1}\right) \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \left(-\frac{1}{1}\right) = -1,$

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0,$

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} x^n e^{-x} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \stackrel{L'H}{=}$
$\stackrel{L'H}{=} \ldots \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to \infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}{e^x} = 0,$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$ *oziroma limita ne obstaja.*

9. S pomočjo L' Hospitalovega pravila in lastnosti zveznih funkcij izračunaj naslednje limite

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)^{\frac{1}{x}}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{1-x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{2(x-1)}+x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

Rešitev. V tej nalogi bomo uporabili naslednji izrek iz drugega poglavja: če sta funkciji f in g zvezni funkciji v točki $g(a)$ oziroma a, tedaj je

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

(a) Označimo $L=\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)^{\frac{1}{x}}$. Izračunajmo $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x^2-1)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln(x^2-1)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2x}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Uporabimo izrek in dobimo $\ln L=0$ ter posledično $L=1$.

(b) Označimo $L=\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{1-x}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\ln(\ln x)^{1-x} &= \lim_{x\to 1}(1-x)\ln(\ln x) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{1-x}}\\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x\ln x}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{x\ln x}\\ &\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{-2(1-x)}{\ln x+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{-2(1-x)}{\ln x+1}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Dobimo, da je $\ln L=0$ ter posledično $L=1$.

(c) Označimo $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}}{1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{1-x^2} = 2.\end{aligned}$$

Dobimo, da je $\ln L=2$ ter posledično $L=e^2$.

(d) *Označimo* $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{2x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+x^2} = -1
\end{aligned}$$

Dobimo, da je $\ln L = -1$ *ter posledično* $L = e^{-1}$.

(e) *Označimo* $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-\ln e}{x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dobimo, da je $\ln L = \frac{1}{2}$ *ter posledično* $L = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(f) *Označimo* $L = \lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{2(x-1)}+x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\ln\left(\frac{e^{2(x-1)}+x-1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} &= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\frac{e^{2(x-1)}+x-1}{2x-1}\right)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(e^{2(x-1)}+x-1\right)-\ln(2x-1)}{x-1}\\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2e^{2(x-1)}+1}{e^{2(x-1)}+x-1}-\frac{2}{2x-1}}{1}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Dobimo, da je $\ln L = 1$ *ter posledično* $L = e$.

10. Razvij funkcijo $f(x) = \ln(x+1)\sin x$ v Taylorjev polinom v okolici točke $x = 0$ do členov 3. reda.

Rešitev. *V našem primeru je potrebno funkcijo* f *odvajati do tretjega reda*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sin x}{x+1} + \ln(x+1)\cos x\\
f''(x) &= -\frac{\sin x}{(x+1)^2} + 2\frac{\cos x}{x+1} - \ln(x+1)\sin x\\
f'''(x) &= 2\frac{\sin x}{(x+1)^3} - 3\frac{\cos x}{(x+1)^2} - 3\frac{\sin x}{x+1} - \ln(x+1)\cos x
\end{aligned}$$

Vstavimo vrednosti v Taylorjevo formulo in dobimo

$$f(x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + r(x),$$

kjer je $r(x)$ nek ostanek 4. reda.

11. Razvij funkcijo $f(x) = \sin^2 x$ v Taylorjev polinom v okolici točke $x = 0$ do členov 5. reda in oceni napako za $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Rešitev. Ko zaporedoma odvajamo f, dobimo

$$\begin{array}{lll} f'(x) & = & 2\sin x\cos x = \sin 2x \\ f''(x) & = & 2\cos 2x \\ f'''(x) & = & -4\sin 2x \\ f^{(4)}(x) & = & -8\cos 2x \\ f^{(5)}(x) & = & 16\sin 2x \\ f^{(6)}(x) & = & 32\cos 2x. \end{array}$$

Vstavimo vrednosti v Taylorjevo formulo in dobimo

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + r(x).$$

Ocenimo še $r(x)$ na intervalu $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

$$|r(x)| = \left|\frac{32\cos(2\xi)}{6!}x^6\right| = \frac{32}{720}|\cos(2\xi)| \cdot |x^6| \leq \frac{32}{720}\cos(0) \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^6 < 0,011.$$

12. Razvij funkcijo $f(x) = x^3 \ln x$ v Taylorjev polinom v ničli funkcije do členov 4. reda ter na intervalu $[\frac{9}{10}, \frac{12}{10}]$ oceni napako.

Rešitev. Razvili bomo Taylorjevo polinom do členov 4. reda za $x = 1$. Izračunajmo odvode.

$$\begin{array}{lll} f'(x) & = & 3x^2\ln x + x^2 \\ f''(x) & = & 6x\ln x + 5x \\ f'''(x) & = & 6\ln x + 11 \\ f^{(4)}(x) & = & \dfrac{6}{x} \\ f^{(5)}(x) & = & -\dfrac{6}{x^2} \end{array}$$

Vstavimo vrednosti v Taylorjevo formulo in dobimo

$$f(x) = (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + r(x).$$

Ocenimo še napako $r(x)$ na intervalu $[\frac{9}{10}, \frac{12}{10}]$

$$|r(x)| = \left|\frac{-\frac{6}{\xi^2}}{5!}(x-1)^5\right| = \frac{1}{20\xi^2}|x-1|^5 \leq \frac{1}{20\left(\frac{9}{10}\right)^2}|0,2|^5 < 0,00002.$$

13. Razvij funkcijo $f(x) = xe^{-x}$ v Taylorjevo vrsto okolici točke $x = 0$ in poišči njeno konvergenčno območje.

Rešitev. *Ker je potrebno f razviti v Taylorjevo vrsto, izračunajmo n-ti odvod funkcije f.*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\
f''(x) &= -2e^{-x} + xe^{-x} \\
f'''(x) &= 3e^{-x} - xe^{-x} \\
f^{(4)}(x) &= -4e^{-x} + xe^{-x} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1} n e^{-x} + (-1)^n x e^{-x}.
\end{aligned}$$

Na podlagi odvodov zapišimo Taylorjevo vrsto

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}.$$

Pred obravnavo $r(x)$ določimo konvergenčno območje Taylorjeve vrste.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \right| = 0.$$

Iz tega sledi, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Preverimo še $r(x)$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{((n+1)-\xi)(-1)^n e^{-\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \lim_{n\to\infty} e^{-\xi} \left(\left| \frac{x^{n+1}}{n!} \right| + \left| \frac{x^{n+1}\xi}{(n+1)!} \right| \right) = 0.$$

Torej za vsak $x \in \mathbb{R}$ lahko f zapišemo v Taylorjevo vrsto

$$f(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}.$$

14. Razvij funkcijo $f(x) = \ln x$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x = 1$ in poišči njeno konvergenčno območje.

Rešitev. *Najprej poiščimo n-ti odvod funkcije f.*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}
\end{aligned}$$

Na podlagi odvodov zapišimo Taylorjevo vrsto

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

Pred obravnavo $r(x)$, določimo konvergenčno območje Taylorjeve vrste.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1.$$

Posledično dobimo neenakost

$$|x-1| < 1$$

in zato $0 < x < 2$. S pomočjo Leibnizovega kriterija preverimo, da velja tudi za $x = 2$.

Obravnavajmo še $r(x)$. Torej dokažimo, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{n!}{\xi^{n+1}}}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} \right| = 0$$

v okolici $x = 1$. Tako imamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n \frac{n!}{\xi^{n+1}}}{(n+1)!} (x-1)^{n+1} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{\xi^{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \left(\frac{x-1}{\xi} \right)^{n+1} \right|. \end{aligned}$$

Izraza $1 \leq x < 2$ in $1 < \xi < x$ preoblikujemo v $0 \leq x-1 < 1$ in $1 < \xi$ in zato je $\frac{x-1}{\xi} < 1$. Posledično dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \left(\frac{x-1}{\xi} \right)^{n+1} \right| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot 1 \right| = 0.$$

Za $0 < x < 1$ bomo uporabili

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-a)^n (x-\xi)^n$$

(ena od oblik zapisa ostanka). V našem primeru dobimo

$$r(x) = \frac{x-1}{\xi} \left(1 - \frac{x}{\xi} \right).$$

Ker je $0 < x < \xi < 1$ *je* $0 < 1 - \frac{x}{\xi} < 1$ *je tako*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x-1}{\xi}\left(1-\frac{x}{\xi}\right)^n = \frac{x-1}{\xi}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{\xi}\right)^n = 0.$$

Torej smo dokazali, da za $0 < x \leq 2$ *lahko* f *zapišemo v Taylorjevo vrsto, ki je oblike*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n} + \ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

15. Aproksimiraj funkcijo $f(x) = \sin x$ s prvimi tremi neničelnimi členi Taylorjeve vrste na intervalu $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ in oceni napako aproksimacije.

Rešitev. Razvili bomo v Taylorjev polinom do členov 6. reda za $x = 0$. *Izračunajmo odvode.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \\ f^{(5)}(x) &= \cos x \\ f^{(6)}(x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Zato je

$$f(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + r(x).$$

Ocenimo še napako

$$|r(x)| = \left|\frac{-\sin\xi}{6!}x^6\right| = \left|\frac{\sin\xi}{6!}\right| \cdot |x|^6 \leq \left|\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{6!}\right| \cdot \left|\frac{\pi}{6}\right|^6 < 0,0001.$$

16. Oceni napako aproksimacije $\sqrt[3]{x+1} \doteq 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ na intervalu $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$.

Rešitev. Preverimo, da je $\sqrt[3]{x+1} \doteq 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ *aproksimacija s Taylorjevo vrsto za* $a = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}} \\ f''(x) &= \frac{-2}{9\sqrt[3]{(1+x)^5}} \\ f'''(x) &= \frac{10}{27\sqrt[3]{(1+x)^8}} \end{aligned}$$

Ko vstavimo vrednost $a = 0$, *opazimo, da je res aproksimacija s Taylorjevo formulo. Ocenimo še napako.*

$$|r(x)| = \left|\frac{\frac{10}{27\sqrt[3]{(1+\xi)^8}}}{3!}x^3\right| \leq \frac{5}{81\sqrt[3]{(1-\frac{1}{10})^8}}\left(\frac{1}{10}\right)^3 < 0,012.$$

17. S pomočjo Taylorjeve formule izračunaj $\sqrt{5}$ z natančnostjo do 10^{-4}.

Rešitev. Taylorjeva formula je še posebej uporabna, ko je $a = 0$. Zato bomo $\sqrt{5}$ preoblikovali na naslednji način:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}}.$$

Tako prepoznamo $f(x) = 2\sqrt{1+x}$ in sedaj odvajajmo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x}}\\
f''(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}\\
f'''(x) &= \frac{3}{4\sqrt{(1+x)^5}}\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{8\sqrt{(1+x)^7}}\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{n-1}\sqrt{(1+x)^{2n-1}}}.
\end{aligned}$$

Preverimo, za kateri n je $|r(x)| < 10^{-4}$. Če razpišemo $r(x)$, dobimo

$$\left|\frac{(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^n\sqrt{(1+x)^{2n+1}}}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right| < 10^{-4}.$$

Po nekaj zaporednih računanjih se izkaže, da je $n = 6$. Tako je potrebno izračunati vsoto prvih petih členov Taylorjeve vrste za funkcijo f.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &\doteq 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{2^2}\left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{4!}\frac{3\cdot 5}{2^3}\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \frac{1}{5!}\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\left(\frac{1}{4}\right)^5\\
&= 2,236076
\end{aligned}$$

18. Upoštevaj pomen prvih dveh odvodov in nariši naslednje grafe funkcij:

(a) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$,

(b) $f(x) = \dfrac{1+2x}{2-2x}$,

(c) $f(x) = x\ln^2 x$,

(d) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$,

(e) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$,

(f) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$,

(g) $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$,

(h) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-1}$.

Rešitev. Samo v prvem primeru bomo zelo podrobno opisali vse postopke, v preostalih primerih pa le glavne rezultate.

(a) Narišimo graf funcije $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$.

i. *Naravno definicijsko območje*
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$, *saj imamo racionalno funkcijo.*

ii. *Ničle funkcije*
Iščemo tiste $x \in \mathcal{D}_f$ *za katere je* $f(x) = 0$. *Ker imamo racionalno funkcijo, nas zanima, kdaj je števec enak 0. V našem primeru imamo* $x_{1,2} = 1$.

iii. *Asimptote funkcije*
Določi bomo navpične, vodoravne in poševne asimptote. Navpične asimptote nam določajo kar poli funkcije. V našem primeru imamo eno navpično asimptoto $x_n = 2$ *(običajno si pomagamo z* $\mathcal{D}_f$*).*
Sedaj določimo vodoravne in poševne asimptote. Hitro vidimo, da imamo v našem primeru linearno asimptoto (torej imamo ali vodoravno ali poševno asimptoto). Torej določiti moramo k *in* n *v formule*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - n).$$

Najprej izračunamo k *s pomočjo formule*

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},$$

nato pa še n

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Podobni razmislek je tudi, ko $x \to -\infty$. *V našem primeru je*

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{(x-1)^2}{x-2}}{x} = 1 \quad in \quad n = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-1)^2}{x-2} - x\right) = 0.$$

Tako smo dobili poševno asimptoto $y(x) = x$. *K isti asimptoti konvergira graf, ko* $x \to -\infty$.

iv. *Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji*
Stacionarne točke so tisti $x \in \mathcal{D}_f$, *za katere je* $f'(x) = 0$. *V našem primeru rešujemo*

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0$$

in dobimo stacionarni točki $x_{s,1} = 1$ *in* $x_{s,2} = 3$.

Kandidati za lokalni ekstreme so kar stacionarne točke. V našem primeru sta kandidata za lokalni ekstrem $x_{l,1} = 1$ *in* $x_{l,2} = 3$.
Če želimo določiti, ali imamo v kandidatih za lokalne ekstreme res lokalne ekstreme, je potrebno najprej izračunati $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Sedaj, če je x_0 *kandidat za lokalni ekstrem, potem velja naslednje*

- $f''(x_0) < 0$, *potem je v* x_0 *lokalni maksimum,*
- $f''(x_0) > 0$, *potem je v* x_0 *lokalni minimum,*
- $f''(x_0) = 0$, *potem z drugim odvodom ni mogoče določiti ali je v* x_0 *lokalni ekstrem.*

Tako imamo v našem primeru v $x_{l,1}$ *lokalni maksimum, v* $x_{l,2}$ *pa lokalni minimum.*
S pomočjo drugega odvoda določimo prevoj. To so tisti $x \in \mathcal{D}_f$, *za katere je* $f''(x) = 0$. *V našem primeru takih vrednosti ni.*

v. *Območja naraščanja in padanja*
Za nek interval $(a, b) \subseteq \mathcal{D}_f$ *velja*

- *če za vsak* $x \in (a, b)$, $f'(x) < 0$, *potem je* f *na* (a, b) *padajoča,*
- *če za vsak* $x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$, *potem je* f *na* (a, b) *naraščajoča.*

Prvi odvod smo izračunali že v prejšni točki. S preprostim računanjem dobimo, da je f *na območju* $(1, 2) \cup (2, 3)$ *padajoča, na* $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ *pa naraščajoča.*

vi. *Območja konveksnosti in konkavnosti*
Za nek interval $(a, b) \subseteq \mathcal{D}_f$ *velja*

- *če za vsak* $x \in (a, b)$, $f''(x) < 0$, *potem je* f *na* (a, b) *konkavna,*
- *če za vsak* $x \in (a, b)$, $f''(x) > 0$, *potem je* f *na* (a, b) *konveksna.*

Drugi odvod smo izračunali dve točki nazaj. S preprostim računom dobimo, da je f *na* $(-\infty, 2)$ *konkavna, na* $(2, \infty)$ *pa konveksna.*

Sedaj s pomočjo teh točk narišemo graf funkcije f.

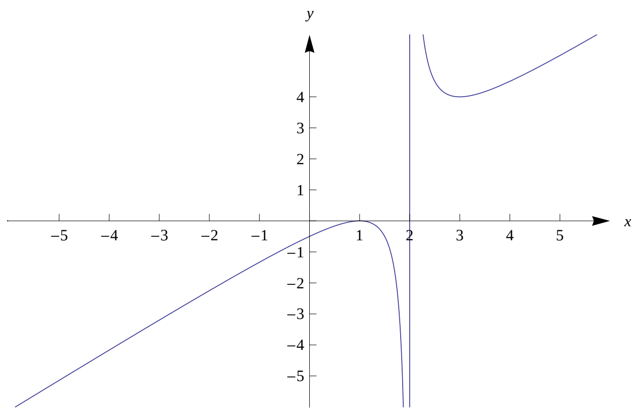
(b) $f(x) = \dfrac{1+2x}{2-2x}$

i. *Naravno definicijsko območje*
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

ii. *Ničle funkcije*
$x_1 = -\frac{1}{2}$.

iii. *Asimptote funkcije*
Navpična asimptota $x_n = 1$, *poševna asimptota* $y(x) = -1$.

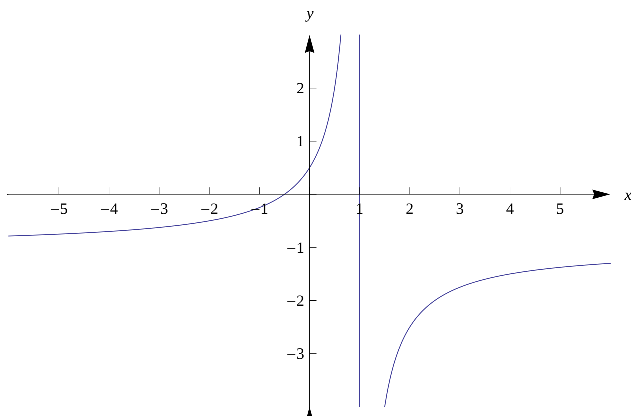
iv. *Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji*
Odvoda funkcije: $f'(x) = \dfrac{3}{2(x-1)^2}$, $f''(x) = -\dfrac{3}{(x-1)^3}$.
Stacionarnih točk ni. Lokalnih ekstremov ni. Prevoja ni.



Slika 3.58: Graf funkcije $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$.

v. *Območja naraščanja in padanja*
Narašča na celotnem $\mathcal{D}_f$.

vi. *Območja konveksnosti in konkavnosti*
Konveksna na $(-\infty, 1)$, konkavna na $(1, \infty)$.



Slika 3.59: Graf funkcije $f(x) = \frac{1+2x}{2-2x}$.

(c) $f(x) = x \ln^2 x$

i. *Naravno definicijsko območje*
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+$.

ii. *Ničle funkcije*
$x_1 = 1$.

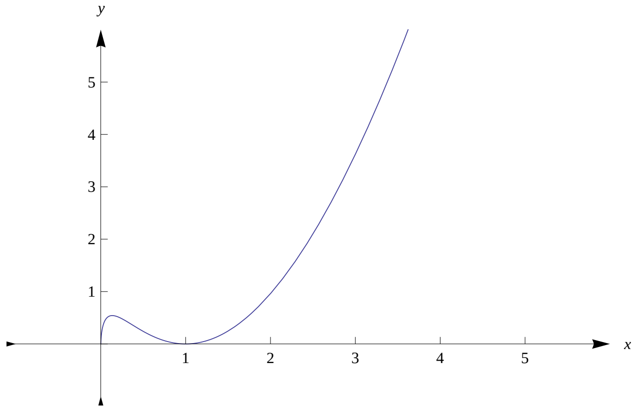
iii. *Asimptote funkcije*
Asimptot ni. Za lažje risanje izračunamo vrednosti na robu $\mathcal{D}_f$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \textit{in} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

iv. *Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji*
Odvoda funkcije: $f'(x) = \ln^2 x + 2\ln x$, $f''(x) = \dfrac{2(\ln x + 1)}{x}$.
Stacionarni točki: $x_{s,1} = e^{-2}$, $x_{s,2} = 1$. *Lokalna ekstrema:* $x_{e,1} = e^{-2}$, *lokalni maksimum;* $x_{e,2} = 1$, *lokalni minimum. Prevoj* $x_p = e^{-1}$.

v. *Območja naraščanja in padanja*
Narašča na $(0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$, *pada na* $(e^{-2}, 1)$.

vi. *Območja konveksnosti in konkavnosti*
Konveksna na (e^{-1}, ∞), *konkavna na* $(0, e^{-1})$.



Slika 3.60: Graf funkcije $f(x) = x\ln^2 x$.

(d) $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

i. *Naravno definicijsko območje*
$\mathcal{D}_f = (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

ii. *Ničle funkcije*
Ničel ni.

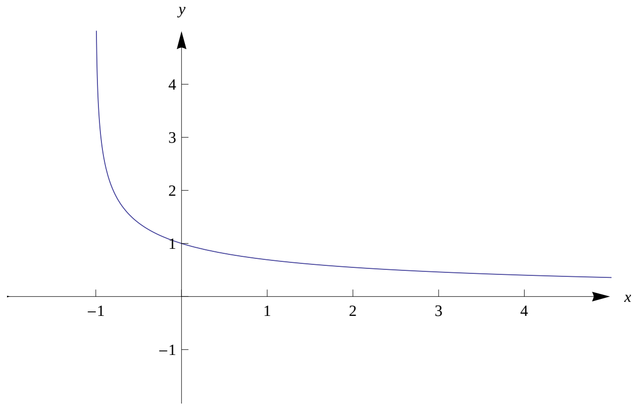
iii. *Asimptote funkcije*
Vodoravna asimptota $y(x) = 0$. *Za lažje risanje izračunamo vrednost na robu* $\mathcal{D}_f$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \infty \quad in \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

iv. *Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji*
Odvoda funkcije: $f'(x) = \dfrac{x - (x+1)\ln(x+1)}{(x+1)x^2}$,
$f''(x) = \dfrac{-3x^2 - 2x + 2(x+1)^2\ln(x+1)}{x^3(x+1)^2}$.
Stacionarnih točk ni (izkaže se, da je $\frac{x}{x+1} \neq \ln(x+1)$*; pomagaj si z grafi elementarnih funkcij). Lokalnih ekstremov ni. Prevoja ni.*

v. *Območja naraščanja in padanja*
Pada na celem $\mathcal{D}_f$.

vi. *Območja konveksnosti in konkavnosti*
Konveksna na celem $\mathcal{D}_f$.



Slika 3.61: Graf funkcije $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

(e) $f(x) = x + \sqrt{1-x}$

i. *Naravno definicijsko območje*
$\mathcal{D}_f = (-\infty, 1]$.

ii. *Ničle funkcije*
$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

iii. *Asimptote funkcije*
Asimptot ni.

iv. *Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji*
Odvoda funkcije: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}}$.
Stacionarna točka: $x_s = \frac{3}{4}$. *Lokalni ekstrem:* $x_e = \frac{3}{4}$, *lokalni maksimum. Prevoja ni.*

v. *Območja naraščanja in padanja*
Pada na celem $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, *narašča na* $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$.

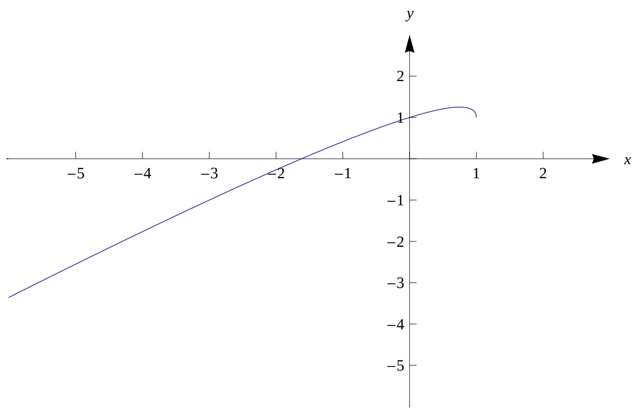
vi. *Območja konveksnosti in konkavnosti*
Konkavna na celem $\mathcal{D}_f$.

(f) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

i. *Naravno definicijsko območje*
$\mathcal{D}_f = [-2, 2]$.

ii. *Ničle funkcije*
$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$.

iii. *Asimptote funkcije*
Asimptot ni.

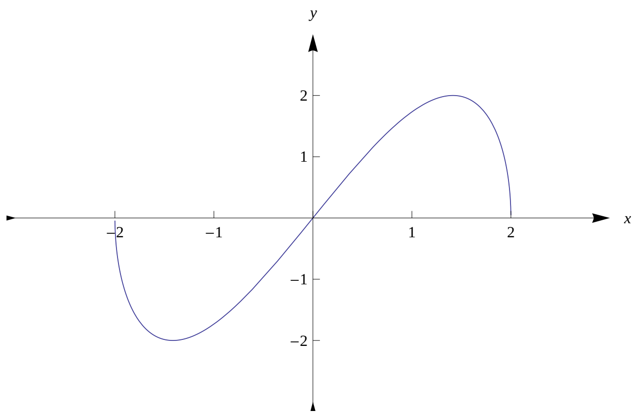


Slika 3.62: Graf funkcije $f(x) = x + \sqrt{1-x}$.

iv. *Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji*
Odvoda funkcije: $f'(x) = -\dfrac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}}$, $f''(x) = \dfrac{2(x^3-6x)}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.
Stacionarni točki: $x_{s,1} = -\sqrt{2}, x_{s,2} = \sqrt{2}$. *Lokalna ekstrema:* $x_{e,1} = -\sqrt{2}$, *lokalni minimum;* $x_{e,2} = \sqrt{2}$ *lokalni maksimum. Prevoj* $x_p = 0$.

v. *Območja naraščanja in padanja*
Pada na $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$, *narašča na* $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

vi. *Območja konveksnosti in konkavnosti*
Konveksna na $(-2, 0)$, *konkavna na* $(0, 2)$.



Slika 3.63: Graf funkcije $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

(g) $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$

i. *Naravno definicijsko območje*
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

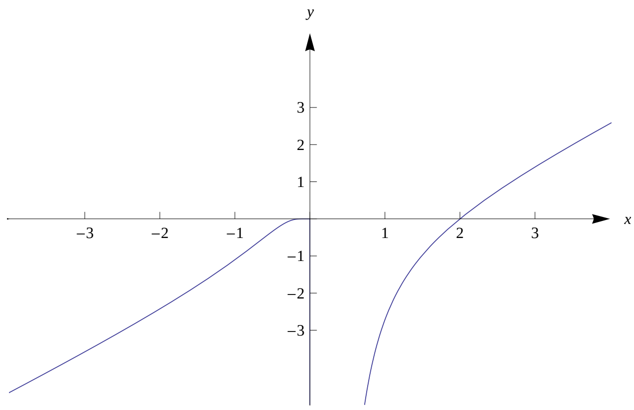
ii. *Ničle funkcije*
$x_1 = 2$.

iii. *Asimptote funkcije*
Navpična asimptota: $x_n = 0$.
Poševna asimptota: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1$,
$n = \lim\limits_{x\to\infty} \left((x-2)e^{\frac{1}{x}} - x\right) = -1$, $y(x) = x - 1$; *podobno za* $x \to -\infty$.
Za natančnejše risanje: $\lim\limits_{x\uparrow 0}(x-2)e^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\downarrow 0}(x-2)e^{\frac{1}{x}} = -\infty$.

iv. *Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji*
Odvoda funkcije: $f'(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, $f''(x) = -\dfrac{3x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$.
Stacionarnih točk ni. Lokalnih ekstremov ni.
Prevoj: $x_p = -\frac{2}{3}$.

v. *Območja naraščanja in padanja*
Narašča na celem $\mathcal{D}_f$.

vi. *Območja konveksnosti in konkavnosti*
Konveksna na $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$; *konkavna na* $\left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0, \infty)$.



Slika 3.64: Graf funkcije $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$.

(h) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-1}$

i. *Naravno definicijsko območje*
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

ii. *Ničle funkcije*
Ni ničel funkcije.

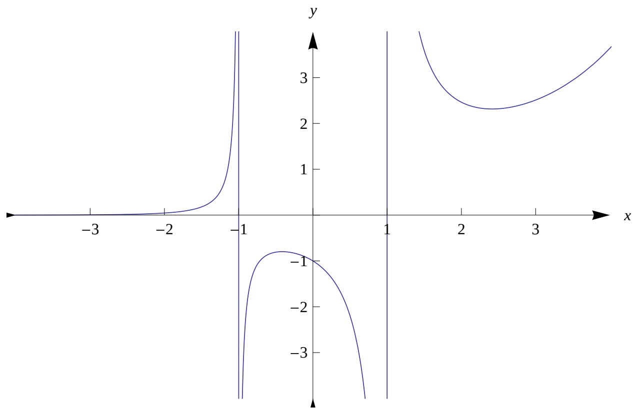
iii. *Asimptote funkcije*
Navpična asimptota: $x_{n,1} = -1, x_{n,2} = 1$.
Poševna asimptota: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{e^x}{x^2-1}}{x} = 0$,
$n = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2-1} = 0$, $y(x) = 0$; *ko* $x \to \infty$, *asimptota ne obstaja.*

Za natančnejše risanje: $\lim\limits_{x\uparrow -1} \dfrac{e^x}{x^2-1} = \infty$, $\lim\limits_{x\downarrow -1} \dfrac{e^x}{x^2-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\uparrow 1} \dfrac{e^x}{x^2-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\downarrow 1} \dfrac{e^x}{x^2-1} = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2-1} = \infty$.

iv. *Stacionarne točke, lokalni ekstremi in prevoji*
Odvoda funkcije: $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2-2x-1)}{(x^2-1)^2}$,
$f''(x) = \dfrac{e^x(x^4-4x^3+4x^2+4x+3)}{(x^2-1)^3}$.
Stacionarni točki: $x_{s,1} = 1-\sqrt{2}, x_{s,2} = 1+\sqrt{2}$. *Lokalna ekstrema:* $x_{e,1} = 1-\sqrt{2}$, *lokalni maksimum;* $x_{e,2} = 1+\sqrt{2}$, *lokalni minimum. Prevoja ni.*

v. *Območja naraščanja in padanja*
Narašča na $(-\infty,-1)\cup(-1,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},\infty)$, *pada na* $(1-\sqrt{2},1)\cup(1,1+\sqrt{2})$.

vi. *Območja konveksnosti in konkavnosti*
Konveksna na $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$; *konkavna na* $(-1,1)$.



Slika 3.65: Graf funkcije $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$.

19. Poišči tisti pozitivni realni števili, katerih vsota je 1000 in imata največji možni produkt.

Rešitev. Iščemo takšna $x, y \in \mathbb{R}$, *da velja*

$$x + y = 1000$$
$$x \cdot y = \max .$$

Sedaj iz prve izrazimo y *in dobimo*

$$f(x) = \max = x(1000-x).$$

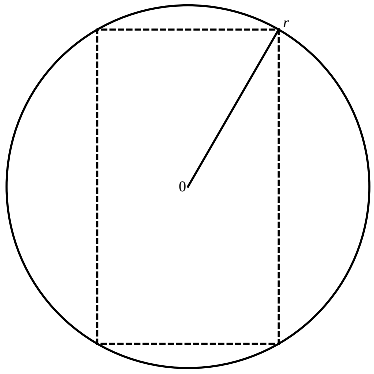
in dobimo funkcijo, ki je odvisna od x. *Ekstrem te funkcije bo končna rešitev.*

$$f'(x) = 100 - 2x$$

in $f'(x) = 0$*, ko je* $x = 500$*. Sedaj pa s pomočjo drugega odvoda preverimo, da je* $x = 500$ *res maksimum funkcije. Ker je* $f''(500) = -2 < 0$*, je v* $x = 500$ *res največji možni produkt in zato* $x = y = 500$*.*

20. Izmed vseh pravokotnikov, ki jih lahko včrtamo v krog s polmerom r, poišči tistega z največjo ploščino.

    Rešitev.



Slika 3.66: V krog včrtani pravokotnik.

Iščemo takšni stranci $x, y \in \mathbb{R}$ *pravokotnega trikotnika, da velja*

$$x \cdot y = \max .$$

Podobno kot v nalogi 19 želimo zapisati funkcijo ene spremenljivke, zato je potrebno dobiti zvezo med x *in* y*. S slike 3.66 je razvidno, da*

$$x^2 + y^2 = (2r)^2.$$

Iz tega dobimo, da je $y = \sqrt{(2r)^2 - x^2}$ *(pozor: gledamo koren s pozitivnim predznakom, saj bi koren z negativnim predznakom pomenil negativno dolžino, kar ni mogoče). Tako dobimo funkcijo*

$$f(x) = x \cdot \sqrt{(2r)^2 - x^2}.$$

Za iskanje ekstremov odvajajmo f*,*

$$f'(x) = \sqrt{(2r)^2 - x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{(2r)^2 - x^2}}$$

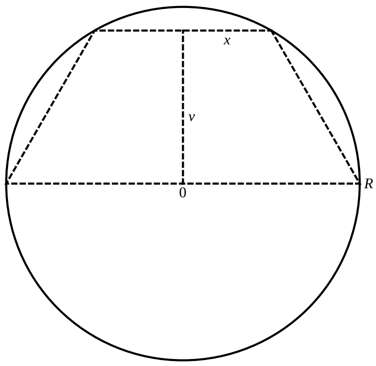
in $f'(x) = 0$*, ko je* $x = \sqrt{2}r$ *(podobno kot y vzamemo pozitivno rešitev). Preverimo, da je res maksimum*

$$f''(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{(2r)^2 - x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{(2r)^2 - x^2}} - \frac{2x^3}{2\sqrt{((2r)^2 - x^2)^3}}.$$

Vidimo, da je $f''(\sqrt{2}r) < 0$ *in zato* $x = y = \sqrt{2}r$*.*

21. Med trapezi, katerih osnovnica je interval $[-R, R]$ na abscisni osi in so včrtani v polkrog
$$x^2 + y^2 \leq R^2, \qquad y \geq 0,$$
poišči tistega z največjo ploščino.

Rešitev.



Slika 3.67: V polkrog včrtani trapez.

Iščemo takšni vrednosti $x, v \in \mathbb{R}$ s slike 3.67, da velja
$$v \cdot \frac{2R + 2x}{2} = \max .$$
Poiščimo zvezo med v in x. S slike 3.67 je razvidno, da $x^2 + v^2 = R^2$ in zato $v = \sqrt{R^2 - x^2}$. Tako dobimo funkcijo
$$f(x) = (R + x) \cdot \sqrt{R^2 - x^2}.$$
Za iskanje ekstremov odvajajmo f,
$$f'(x) = \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x(x + R)}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$
in $f'(x) = 0$, ko je $x = \frac{R}{2}$. Z drugim odvodom preverimo, da je res $f''\left(\frac{R}{2}\right) < 0$ in zato je $x = \frac{R}{2}$ ter $v = R\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22. Dana je funkcija $f(x) = -x^2 + 1$ in na območje med grafom funkcije f in abscisno osjo včrtamo pravokotnik tako, da ena stranica pravokotnika leži na abscisi. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

Rešitev. Ničli funkcije sta $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$. Želimo takšni stranici pravokotnika a in b, da je $\max = a \cdot b$. Ker je graf funkcije simetričen glede na ordinatno *os, se osredotočimo na prvi kvadrant. Naj bo* $c = \frac{a}{2}$ *(c je stranica pravokotnika v prvem kvadrantu). Imamo zvezo* $b = f(c) = -c^2 + 1$ *in zato dobimo*

$$g(c) = c \cdot (-c^2 + 1) = -c^3 + c.$$

Za iskanje ekstremov odvajajmo f*,*

$$g'(c) = -3c^2 + 1$$

in $g'(c) = 0$*, ko je* $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *(prvi kvadrant). Preverimo, da je v* $c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *res maksimum* g*.*

$$g''(c) = -6c$$

in dobimo $f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) < 0$ *ter zato* $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ *in* $b = \frac{2}{3}$*.*

23. Enakokraki trikotnik z obsegom 2 zavrtimo okoli osnovnice. Koliko naj merijo stranice trikotnika, da bo prostornina nastale vrtenine največja?

    Rešitev. Obseg o enakokrakega trikotnika z osnovnico x in krakoma y se izračuna po formuli $o = x + 2y$*. Vrtenino, ki jo dobimo, lahko gledamo tudi drugače. Natančneje, če bi vrteli samo pravokotni trikotnik, ki nam ga določajo višina na osnovnico, polovica osnovnice in krak enakokrakega trikotnika (intuitivno povedano, enakokrak trikotnik prerežemo po višini na osnovnico), potem bi dobili stožec, kar pa pomeni, da je naša vrtenina sestavljena iz dveh stožcev. Volumen stožca s polmerom r in višino h se računa po formuli* $V = \frac{\pi}{3} r h^2$*. Označimo višino trikotnika na x s* v_x*. Tako je naš volumen vrtenine*

    $$V = 2\frac{\pi}{3}\frac{x}{2}v_x^2.$$

    Stranice $\frac{x}{2}$*,* v_x *in* y *tvorijo pravokotni trikotnik, zato* $\left(\frac{x}{2}\right) + v_x^2 = y^2$*. Če še upoštevamo* $o = x + 2y$*, dobimo* $v_x^2 = \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$ *ter tako dobimo funkcijo*

    $$f(x) = V = 2\frac{\pi}{3}\frac{x}{2}\left(\left(\frac{2-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi}{3}(x - x^2)$$

    Za iskanje ekstremov odvajajmo f*,*

    $$f'(x) = \frac{\pi}{3}(1 - 2x)$$

    in $f'(x) = 0$*, ko je* $x = \frac{1}{2}$*. Z drugim odvodom preverimo, da je res maksimum.*

    $$f''(x) = -\frac{2\pi}{3}$$

    in zato je volumen res maksimalen. Tako smo dobili $x = \frac{1}{2}$ *in* $y = \frac{3}{4}$*.*

24. Poišči dimenzije najcenejšega rezervoarja z vodo s kvadratno osnovo in pravokotnimi stranicami, ki bo držal a^3 kubične metre, če kvadratni meter stranice stane 10 evrov, kvadratni meter osnove stane 15 evrov in kvadratni meter pokrova stane 5 evrov.

Rešitev. *Telo, ki je opisano, je kvader. Volumen se tako izračuna*

$$V = x^2 \cdot y,$$

kjer je x stranica kvadrata osnove, y pa preostala stranica kvadra. Če upoštevamo, da je $V = a^3$, lahko izrazimo $y = \frac{a^3}{x^2}$ Cena izdelave se izračuna po formuli

$$cena = 15x^2 + 10 \cdot 4xy + 5 \cdot x^2.$$

Če upoštevamo $y = \frac{a^3}{x^2}$, dobimo

$$f(x) = cena = 20x^2 + 40\frac{a^3}{x}.$$

Odvajajmo f za ekstrem

$$f'(x) = 40x - 40a^3\frac{1}{x^2}$$

in $f'(x) = 0$, ko je $x = a$. Preverimo, da je v $x = a$ res minimum f.

$$f''(x) = 40 + 80a^3\frac{1}{x^3}$$

in enostavno preverimo, da je $f''(a) > 0$. Tako smo dobili stranici kvadra $x = y = a$.

25. Zgraditi želimo silos v obliki valja, ki ima na vrhu polsfero. Volumen silosa je 50π kubičnih metrov. Cena kvadratnega metra pločevine za valj je 10 evrov, za streho pa 15 evrov. Določi dimenzije silosa tako, da bo cena najnižja.

    Rešitev. *Naj bo V volumen in P površina opisanega telesa. Volumen in površina krogle se izračunata*

    $$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad P_K = 4\pi r^2,$$

    kjer je r polmer krogle, volumen in površina valja pa

    $$V_V = \pi r^2 v, \quad P_V = 2\pi r^2 + 2\pi r v,$$

    kjer je r polmer osnovne ploskve in v višina valja. V našem primeru vemo, da je

    $$V = \pi r^2 v + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = 50\pi.$$

    Iz te enačbe izrazimo v

    $$v = \frac{50\pi - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{150 - 2r^3}{3r^2}.$$

    Cena je vsota cen izdelave plašča valja in polovice površine krogle

    $$cena_P = 10 \cdot 2\pi r v + 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 20\pi r v + 30\pi r^2.$$

Ker želimo imeti funkcijo ene spremenljivke upoštevamo v

$$f(r) = cena_P = 20\pi r \frac{150 - 2r^3}{3r^2} + 30\pi r^2 = 20\pi \frac{150 - 2r^3}{3r} + 30\pi r^2.$$

Za iskanje ekstremov odvajajmo f,

$$f'(r) = 20\pi \left(-\frac{50}{r^2} - \frac{4}{3} r \right) + 60\pi r$$

in $f'(r) = 0$, ko je $r = \sqrt[3]{30}$. Preverimo, da je v $r = \sqrt[3]{30}$ res minimum f.

$$f''(x) = 20\pi \left(2\frac{50}{r^3} - \frac{4}{3} \right) + 60\pi$$

in enostavno preverimo, da je $f''(\sqrt[3]{30}) > 0$. Tako smo dobili $r = \sqrt[3]{30}$ in $v = \sqrt[3]{30}$.

26. Dan je trikotnik s stranico $a = 1$ in obsegom $o = 6$. Določi preostali stranici trikotnika tako, da bo ploščina največja.

Rešitev. *Obseg trikotnika se računa po formuli $o = a + b + c$ in v našem primeru primeru dobimo zvezo*

$$b + c = 5$$

ter posledično $c = 5 - b$. Želimo, da je ploščina trikotnika maksimalna in v našem primeru bomo uporabili Heronovo obrazec

$$pl = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kjer je $s = \frac{o}{2}$. V našem primeru tako dobimo funkcijo, ki je odvisna od b

$$f(b) = \sqrt{3(3-1)(3-b)(3-5+b)} = \sqrt{6(-b^2 + 5b - 6)}.$$

Za iskanje ekstremov odvajajmo f,

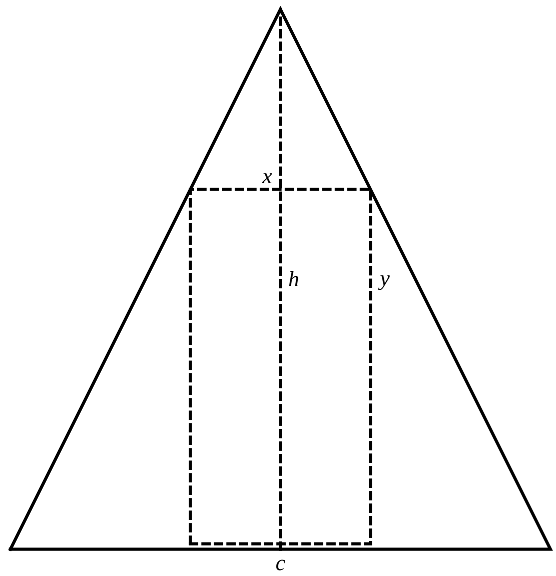
$$f'(b) = \frac{-12b + 30}{2\sqrt{6(-b^2 + 5b - 6)}} = \frac{-6b + 15}{\sqrt{6(-b^2 + 5b - 6)}}$$

in $f'(b) = 0$, ko je $b = \frac{5}{2}$. Z drugim odovodom preverimo, da je res maksimum

$$f''(b) = -\frac{6}{\sqrt{6(-b^2 + 5b - 6)}} - \frac{(-6b + 15)^2}{\sqrt{6(-b^2 + 5b - 6)}}$$

in hitro vidimo, da je $f''(\frac{5}{2}) < 0$. Tako smo dobili $b = c = \frac{5}{2}$ (kar pomeni, da je rešitev ravno enakokrak trikotnik).

27. V enakokraki trikotnik včrtamo pravokotnik tako, da leži ena stranica pravokotnika na osnovnici trikotnika. Izmed vseh takšnih pravokotnikov poišči tistega, ki ima največjo ploščino.



Slika 3.68: V enakokraki trikotnik včrtan pravokotnik.

Rešitev. Upoštevajmo podobnost trikotnikov

$$\frac{c}{2} : h = \frac{x}{2} : (h - y)$$

in iz tega sledi, da je $y = \frac{h(c-x)}{c}$*. Tako dobimo*

$$f(x) = P = x \cdot y = hx - \frac{h}{c}x^2.$$

Za iskanje ekstremov odvajajmo f*,*

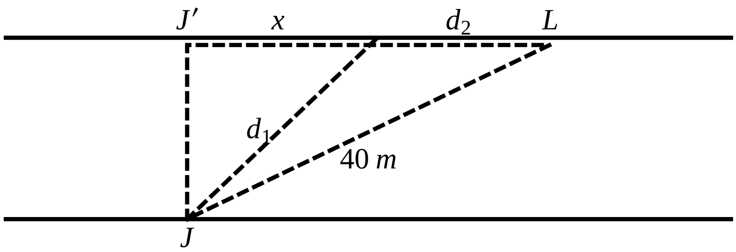
$$f'(x) = h - 2\frac{h}{c}x$$

in $f'(x) = 0$*, ko je* $x = \frac{c}{2}$*. Z drugim odvodom preverimo, da je res maksimum*

$$f''(x) = -\frac{2h}{c}$$

in je res $f''(\frac{c}{2}) < 0$*. Dobili smo* $x = \frac{c}{2}$ *in* $y = \frac{h}{2}$*.*

28. Racak Jaka želi prečkati 20 metrov široko reko tako, da bo prišel do račke Lili čim hitreje, glej Sliko 3.69. Razdalja med njima je 40 metrov. Jakova maksimalna hitrost plavanja je $1\frac{m}{s}$, maksimalna hitrost tekanja pa je $2\frac{m}{s}$. Kako naj Jaka prečka reko, da bo čim hitreje prepotoval pot? Ob tem predpostavimo, da je reka zelo počasna in tok reke zanemarimo.



Slika 3.69: Račka Lili in racak Jaka.

Rešitev. *Naj bo* J' *kraj na drugem bregu reke, ki je nasproti* J*. Potem je* $L'J = \sqrt{40^2 - 20^2}$*. Ker imamo različni hitrosti za plavanje in tekanje, bo potrebno čas potovanja* T *računati*

$$T = \frac{d_1}{1\frac{m}{s}} + \frac{d_2}{2\frac{m}{s}},$$

kjer sta d_1 *in* d_2 *dolžini na sliki. Izračunajmo razdalje*

$$f(x) = T = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{1} + \frac{\sqrt{40^2 - 20^2} - x}{2}.$$

Odvajajmo f *za ekstreme*

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 400}} - \frac{1}{2}$$

in $f'(z) = 0$*, ko je* $x = \frac{20}{\sqrt{3}}$*. Z drugim odvodom preverimo, da je res maksimum*

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 400}} - \frac{2x^2}{2\sqrt{(x^2 + 400)^3}}$$

in hitro vidimo, da je $f''(\frac{20}{\sqrt{3}}) > 0$*. Tako smo dobili* $d_1 = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ *metrov in* $d_2 = 20\sqrt{3} - \frac{20\sqrt{3}}{3} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ *metrov.*

Slike

Stvarno kazalo

Literatura

[1] I. Banič, I. Hrastnik, S. Špacapan, J. Žerovnik, *Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike*, FS, Maribor, 2003.

[2] I. N. Bronštejn, (et al.), *Matematični priročnik*, TZS, Ljubljana, 1997.

[3] B. Butinar, *Matematika 1. in 2. del*, FKKT, Maribor, 2007.

[4] B. Butinar, *Matematika I, naloge z rešitvami*, FKKT, Maribor, 2004.

[5] R. Jamnik, *Matematika*, DMFA, Ljubljana, 1994.

[6] M. Mencinger, *Zbirka rešenih nalog iz matematične analize in algebre*, FG, Maribor, 2006.

[7] I. Vidav, *Matematika 1*, DMFA, Ljubljana, 1990.

[8] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA, Ljubljana 1994.

[9] P. Žigert, *Matematika za študente VS programa*, FKKT, Maribor, 2008.

[10] J. Žerovnik, *Matematika 1.del*, FS, Maribor, 2006.