

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I

Računski del

27. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, ravnilo, kalkulator, ki ne izrisuje grafov in ne računa simbolno, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*
 - *Čas reševanja je **75 minut**.*
-

1. [15] Skiciraj množico točk

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y - 2x| - |x + y + 1| \leq 1 - x\}.$$

Rešitev: pomagaj si z WA (Reduce Abs[y-2x] - Abs[x+y-1] <= 1-x).

2. [15] Funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x-1} & ; x < 1 \\ 1 - \sqrt{x+3} & ; x \geq 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} -x - 3 & ; x < -1 \\ 1 - x^2 & ; x \geq -1. \end{cases}$$

Izračunaj $f \circ g$ in $g \circ f$. Namig: najprej določi zaloge vrednosti posameznih delov, nato izračunaj predpise kompozitumov (za več razlage glej učbenik).

3. [15] Preuči konvergenco vrst

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^3 + n}{n^3 - 2} \right)^{2n^2},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + 3n^2 + 2n}.$$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: (a) divergira; (b) konvergira, vsota je $\frac{1}{4}$.

4. **[15]** Funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{2x^2}$. Za poljubno tangento t na graf funkcije f označimo z A_t in B_t presečišči tangente t s koordinatnima osema, $A_t \neq B_t$. Med vsemi tangentami t poišči tisto, za katero je dolžina daljice $A_t B_t$ najkrajša možna.

Namig: smerni koeficient tangente v točki na grafu funkcije f dobimo s pomočjo odvoda funkcije f . Zapiši enačbo premice v poljubni točki, nato poglej kje ta premica seka koordinatne osi.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
27. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[5]** Definiraj razliko in kartezični produkt množic A in B .

2. [15]

(a) [10] Dokaži, da za poljubna realna števila a, b, c velja

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|.$$

(b) [5] Kdaj v neenakosti iz točke (a) velja enačaja?

3. [10] Dokaži trditev:

Če sta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama A oz. B , tedaj je limita zaporedja $(a_n b_n)$ enaka AB .

4. **[10]** Naj bo $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ in $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, eksponentna funkcija.

(a) **[5]** Vpelji obratno funkcijo f^{-1} od f in pojasni povezavo med f in f^{-1} .

(b) **[5]** Z uporabo odvoda dokaži monotonost funkcije f v odvisnosti od osnove a .

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
27. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, ravnilo, kalkulator, ki ne izrisuje grafov in ne računa simbolno, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*
 - **Čas reševanja je 75 minut.**
-

1. [10] V množici kompleksnih števil reši enačbo

$$z^2 + 2i\bar{z} = \operatorname{Im} \left(\frac{6}{1+i} \right).$$

Namig: uporabimo $z = a + bi$. Posledično dobimo sistem $a^2 - b^2 - 2b = -3$ in $2a(b+1) = 0$.

2. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{\ln(e^2 - x^2) - 1}.$$

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f .
(b) Izračunaj $g \circ f$, kjer je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 & ; \quad x < 1 \\ 2 & ; \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Namig: (a) poglej pogoje $e^2 - x^2 > 0$ in $\ln(e^2 - x^2) - 1 \neq 0$; (b) najprej reši enačbi $f(x) < 1$ in $f(x) \geq 1$, nato izračunaj kompozitume.

3. [20] Izračunaj limiti.

(a) [10] $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \sqrt[3]{27n^2 - n^3} \right)$

(b) [10] $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1 + 2x)^{\frac{2}{x}}}{e^4} \right)^{\frac{1}{2x}}$

Rešitev: (a) 9; (b) e^{-2} .

4. **[15]** Funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = x^{x^2}$. Poišči vse točke na grafu funkcije f , za katere velja naslednja lastnost: tangenta na graf funkcije f v tej točki je vzporedna z osjo x .

Namig: reši enačbo $f'(x) = 0$.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
27. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- (a) [5] Definiraj presek in razliko množic A in B .
- (b) [5] V ravnini skiciraj množico $\mathbb{Z} \times \{1\}$.

2. [10]

- (a) [5] Navedi trditev o obstoju obratne oz. inverzne preslikave od preslikave f .
- (b) [5] Vpelji obratno preslikavo od preslikave f , ki je podana s predpisom $f(x) = \cos x$.

3. [15]

(a) [10] Dokaži, da za poljubni realni števili a in b velja

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

(b) [5] Kdaj v neenakosti iz točke (a) velja enačaja?

4. [5] Definiraj lokalni ekstrem in stacionarno točko odvedljive funkcije f .

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
29. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, ravnilo, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*
 - **Čas reševanja je 75 minut.**
-

1. [15] Izračunaj

$$\int \frac{\arcsin(\sqrt{1-x^2})}{x^2} dx.$$

Rešitev: upoštevaj per-partes $u = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$, $dv = \frac{dx}{x^2}$.

2. [15] Ali konvergira integral

$$\int_{-1}^1 x^{20} (\ln x^2)^{2019} dx?$$

Če konvergira, ga izračunaj.

Rešitev: da, konvergira. Pomagaj si s funkcijo Gama.

3. [15] Reši diferencialno enačbo

$$y'(\ln y - 2xy) = y^2.$$

Namig: Linearna DE $x'y^2 + 2xy = \ln y$.

4. **[15]** V odvisnosti od realnega parametra a reši matrično enačbo

$$AX = B,$$

kjer je

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Namig: za $a = 2$ dobimo parametrično rešitev, za $a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ pa enolično rešitev.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
29. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Poišči funkcijo f za katero velja $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$.

2. [15]

(a) [10] Dokaži, da za omejeno funkcijo f in delitvi D in D' , $D \subseteq D'$, velja

$$s_D(f) \leq s_{D'}(f) \leq S_{D'}(f) \leq S_D(f).$$

(b) [5] Katera posledica sledi iz te trditve?

3. [10] Dokaži trditev:

Množica obrnljivih matrik je grupa za množenje matrik.

4. **[5]** Podaj konkretni primer Eulerjeve diferencialne enačbe drugega reda in jo prevedi na ustrezno linearno diferencialno enačbo (te ni potrebno rešiti).

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
29. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*
 - **Čas reševanja je 75 minut.**
-

1. [15] Izračunaj

$$\int_0^1 x \arcsin(\sqrt{1-x^2}) dx.$$

Namig: uporabi integriranje po delih $u = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ in $dv = x dx$.

2. [15] Krivulja \mathcal{K} je podana z enačbo $x = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{2} - \ln y \right)$. Poišči dolžino tistega dela loka krivulje \mathcal{K} , ki je med točkama $T_1(x_1, 1)$ in $T_2(x_2, e)$, $T_1, T_2 \in \mathcal{K}$.

Namig: izračunaj integral $\int_1^e \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy = \int_1^e \frac{y^2 + 1}{2y} dy$.

3. [15] Reši diferencialno enačbo

$$y' - \frac{x+2}{3x}y - \frac{e^x}{y^2} = 0.$$

Namig: BDE, $u = y^3$.

4. [15] Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\dot{x} = x + 2y - 2z$$

$$\dot{y} = y + 2z$$

$$\dot{z} = x - y + 2z.$$

Rešitev: lastne vrednosti so $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ in $\lambda_3 = 1 - 2i$. Dovolj je izračunati dva lastna vektorja: za $\lambda_1 = 2$ dobimo $\vec{p}_1 = (2, 2, 1)$ in za $\lambda_2 = 1 + 2i$ dobimo $\vec{p}_2 = (-1 + i, -i, 1)$. Sledi formulam in zapiši rešitev.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
29. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Na primeru pokaži, da je množenje matrik asociativna operacija, ni pa komutativna.

2. [10]

- (a) [5] Definiraj lastno vrednost in lastni vektor kvadratne matrike A .
- (b) [5] Podaj primer matrike reda 2, ki ima samo en lastni vektor.

3. **[10]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo.

4. [10] Navedi in dokaži Cramerjevo pravilo.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
27. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik, dva A4 ročno napisana lista s formulami in pripravljene listi s formulami za prvi letnik.*
 - **Čas reševanja je 75 minut.**
-

1. [10] Koliko je največja vsota koordinat točke $T(x, y)$, če ta točka leži na krivulji z enačbo $x^2 + xy + y^2 = 1$?

Namig: vezani ekstrem funkcije s predpisom $f(x) = x + y$ pri pogoju $x^2 - xy + y^2 = 1$.

2. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 - y^2 + 1}{xy}}.$$

Skiciraj naravno definicijsko območje D_f funkcije f . Nadalje, ali obstaja takšna vrednost a , da bo razširitev funkcije f na $D_f \cup \{(0, 0)\}$ zvezna? Če obstaja, jo poišči.

Namig: pomagaj si z WA (ukaz Reduce); ne obstaja - opazuj prerez $y = x$ (za več glej vaje).

3. **[20]** Transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ je glede na urejeni standardni bazi prostorov podana takole

$$(\mathcal{A}(p))(x) = p(x) + (x + 1)p'(x) + (x^2 - 1)p''(x).$$

- (a) **[5]** Preveri, da je transformacija \mathcal{A} linearna.
- (b) **[15]** Naj bo A matrika, ki pripada transformaciji \mathcal{A} . Ali obstaja baza \mathcal{B} prostora $\mathbb{R}_2[x]$, za katero velja naslednja lastnost: $P^{-1}AP$ je diagonalna, kjer je P pripadajoča matrika prehoda iz baze \mathcal{B} v standardno bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$? Če obstaja, jo poišči.

Namig: (b) obstaja. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje (za več glej zbrano gradivo iz predavanj strani 132–134).

4. [15] Poišči rešitev sistema

$$x(t) = -2 \int_0^t e^{2(t-s)} x(s) ds + \int_0^t y(s) ds$$

$$y(t) = x'(t) + 4 \int_0^t (t-s)^2 y(s) ds + 2t,$$

kjer je $x(0) = 0$. Namig: pomagaj si z Laplaceovo transformacijo in formule za konvolucijo. Dobimo sistem enačb

$$X(z) = -\frac{2}{z-2} X(z) + \frac{1}{z} Y(z)$$

$$Y(z) = zX(z) + \frac{8}{z^3} Y(z) + \frac{2}{z^2}.$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
27. 8. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Točka (a, b) naj bo stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije f dveh spremenljivk. Kaj vemo o obstoju lokalnega ekstrema v točki (a, b) , če je determinanta Hessejeve matrike v (a, b) enaka 0? Odgovor utemelji oz. dokaži.

2. [10] Izpelji enačbo tangentne ravnine na parametrično podano ploskev P .

3. [10] Naj bo \mathcal{V} vektorski prostor.

(a) [5] Kako dokažemo, da je \mathcal{W} vektorski podprostor od \mathcal{V} ? Utemelji odgovor.

(b) [5] Podaj primer vektorskega podprostora \mathcal{W} vektorskega prostora \mathcal{M}_n matrik reda n .

4. [10]

- (a) [5] Definiraj tri operacije na vektorskih oz. skalarnih poljih.
- (b) [5] Izračunaj divergenco gradienta skalarnega polja.