Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
24. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Zaporedje (a_n) je podano takole
$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}, \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$
Ali je zaporedje (a_n) omejeno? Ali je zaporedje (a_n) konvergentno? Odgovore računsko utemelji.

   Namig: je omejeno (npr. navzgor z 2, navzdol z 0); je konvergetno.

2. **[15]** Določi polinom p prve stopnje tako, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+\sqrt[3]{x-1}} & ; \quad x < 0 \\ p(x) & ; \quad 0 \le x \le 2 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4-2^x}} & ; \quad x > 2, \end{cases}$$
zvezna.

   Rešitev: $p(x) = \frac{e^{-\frac{1}{8\ln 2}} - 3}{2} x + 3$.

3. **[15]** Med vsemi pravokotniki, za katere velja da dve njegovi oglišči ležita na krivulji z enačbo $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$, dve pa na asimptoti te krivulje, poišči tistega, ki ima največjo ploščino. Ploščino tega pravokotnika tudi izračunaj.

   Rešitev: poiščemo ekstrem funkcije $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\left(2 - \frac{2x^2}{x^2+1}\right)$.

4. **[15]** Izračunaj dolžino loka tistega dela grafa funkcije f, $f(x) = \ln(3 - x)$, ki leži v prvem kvadrantu.

   Rešitev: $\ell = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{(3-x)^2}}\, \mathrm{d}x$. Sedaj vpeljemo novo spremenljivko $t = 3 - x$ in nato sledimo nalogi iz učbenika.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
24. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**
   (a) *[5]* Definiraj injektivnost in surjektivnost preslikave $f : A \to B$.
   (b) *[5]* S predpisom podaj primer preslikave $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ki je surjektivna.

2. **[10]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija.
   (a) *[5]* Definiraj lokalni ekstrem funkcije f v točki $c \in \mathcal{D}$.
   (b) *[5]* Definiraj stacionarno točko funkcije f. S predpisom podaj primer funkcije brez stacionarnih točk. Utemelji svojo izbiro.

3. **[10]**
   (a) *[5]* Definiraj Eulerjevo funkcijo Γ.
   (b) *[5]* Dokaži da za vsak $x > 0$ velja zveza $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Če je $B \neq 0$, tedaj je $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
24. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$z^2 + iz = \mathcal{I}m\left(\frac{4i}{1-i}\right).$$

Rešitev: $z_1 = \frac{\sqrt{7}-i}{2}$, $z_2 = \frac{\sqrt{7}+i}{2}$

2. **[15]** Izračunaj limiti

(a) *[7]* $\lim_{n\to\infty}(n + \sqrt[3]{6n^2 - n^3})$,

(b) *[8]* $\lim_{x\to 1} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln x$.

Rešitev: (a) 2; (b) $\frac{2}{\pi}$.

3. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 3x - x^2 & ; \quad x < 2 \\ 1 + \frac{1}{2^x} & ; \quad x \geq 2 \end{cases}.$$

Določi zalogo vrednosti funkcije f in skiciraj graf funkcije $f \circ g$, kjer je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom $g(x) = 2x$.

Rešitev: $Z_f = (-\infty, \frac{5}{4}]$; $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 6x - 4x^2 & ; \quad x < 1 \\ 1 + \frac{1}{4^x} & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$.

4. **[15]** Poišči vse takšne realne parametere n, da bo premica z enačbo $y = x + n$ tangenta na krivuljo z enačbo $y = \frac{x}{x+4}$.

Rešitev: dve rešitvi; $n_1 = 1$, $n_2 = 9$.

Vpisna številka | Priimek, ime | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
24. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**
   (a) *[5]* Kaj mora veljati za preslikavo $f : A \to B$, da je njena kodomena B enaka zalogi vrednosti preslikave f.
   (b) *[5]* S predpisom podaj primer preslikave $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$, ki je injektivna. Utemelji svojo izbiro.
2. **[10]** Naj bo $a > 0$, $a \neq 1$. Izračunaj oz. izpelji limiti:
   (a) **[5]** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
   (b) **[5]** $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x}$.
3. **[10]** Navedi in dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega ekstrema odvedljive funkcije f v točki c.
4. **[10]**
   (a) *[5]* Definiraj limito zaporedja (a_n).
   (b) *[5]* Podaj primer zaporedja, ki ni konvergentno in ima natanko 3 stekališča.

Vpisna številka | Priimek in ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
26. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Naj bo $\langle\cdot,\cdot\rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ preslikava definirana s predpisom:
$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) : \ \langle A, B\rangle = \mathrm{sled}(AB).$$
Ali je $M_n(\mathbb{R})$ skupaj s tako definirano preslikavo evklidski prostor? Utemelji.
Rešitev: ni, glej matriko $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in A^2.

2. **[15]** Dereminanta reda $n \in \mathbb{N}$ je podana takole
$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 4 \end{vmatrix}$$
Izračunaj determinanto reda 2021.
Rešitev: $\frac{7^{2022}-3^{2022}}{10}$

3. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo
$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 3 + \ln x^3.$$
Rešitev: $y_S(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 - \frac{1}{2}\ln x - \frac{17}{12}$.

4. **[15]** Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}(p) = p'(1)x + 2p(1)x^2.$$
Dokaži, da je preslikava $\mathcal{A}$ linearna. Poišči še bazo jedra, bazo slike in matriko preslikave $\mathcal{A}$.
Rešitev: $\mathcal{B}_{\mathcal{K}er}(\mathcal{A}) = \{-x^2 + 2x - 1\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}m}(\mathcal{A}) = \{2x^2, x + 2x^2\}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
26. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Zapiši diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti, katere rešitvi sta funkciji $y_1 = \sin x$ in $y_2 = \cos x$.

2. **[10]**

   (a) *[5]* Definiraj linearno lupino množice S v vektorskem prostoru V.

   (b) *[5]* Poišči linearno lupino množice $S = \{2 - x, x^3 + 1, x\}$ v vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

3. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bo A kvadratna matrika reda n. Če ima A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, tedaj je A diagonalizabilna.

4. **[15]**

   (a) *[5]* Definiraj normo in metriko v unitarnem prostoru V.

   (b) *[10]* Dokaži 3 lastnosti norme v unitarnem prostoru V.

Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Računski del
24. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]**
   (a) *[7]* Poišči Laplaceovo transformiranko za funkcijo f, $f(x) = \operatorname{sh}(x)\sin(x)$.
   (b) *[8]* Poišči inverz Laplaceove transformiranke funkcije F, $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$.

   Rešitev: (a) $\frac{z^2+2}{(z^2-2z+1)(z^2+2z+2)}$; (b) $e^x + xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x$.

2. **[15]** Če obstajajo, poišči lokalne ekstreme funkcije f, ki je podana s predpisom
$$f(x, y) = 4y\sqrt{x} - x - y^2 - 6y.$$
   Nadalje, poišči še globalne ekstreme funkcije f na množici
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \le y \le 9\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 \le x \le 9\}.$$
   Rešitev: nima lokalnih ekstremov; za ekstreme na D glej točki $(0, 0)$ in $(0, -9)$.

3. **[15]** Trojni integral je podan v cilindričnih koordinatah na naslednji način
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \mathrm{d}r \int_{\sqrt{3}r}^{6-r^2} r^3 \mathrm{d}z.$$
   Skiciraj integracijsko območje v kartezičnih koordinatah in integral zapiši v sfernih koordinatah.

   Rešitev: za sliko si pomagaj s ploskvama z enačbama $z^2 = 3(x^2+y^2)$ (to dobimo iz pogoja $z = \sqrt{3}r$) in $z = 6 - x^2 - y^2$ (to pripada pogoju $z = 6 - r^2$) v prvem oktantu. Velja še $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Nadalje, v sfernih koordinatah se integral izraža kot
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{\frac{-\sin\vartheta + \sqrt{\sin^2\vartheta + 24\cos^2\vartheta}}{2\cos^2\vartheta}} r^4 \cos^3\vartheta \, \mathrm{d}r.$$

4. **[15]** Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev z enačbama $x^2 + 4x + y^2 = 0$ in $z = 2x + y$. Krivuljo $\mathcal{K}$ orientiramo tako, da je njena projekcijo na ravnino $z = 0$ orientirana pozitivno. Skiciraj krivuljo $\mathcal{K}$ in izračunaj

$$\int\limits_{\mathcal{K}} z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x.$$

Rešitev: za sliko glej presek valja in ravnine. Intgral lahko izračunamo direktno ($\overrightarrow{F}(x, y, z) = (z, -x, y)$ in $\overrightarrow{r}(\varphi) = (2\cos\varphi - 2, 2\sin\varphi, 4\cos\varphi + 2\sin\varphi - 4)$) ali s pomočjo Stokesovega izreka ($\overrightarrow{F}(x, y, z) = (z, -x, y)$ in $\overrightarrow{N} = (2, 1, -1)$).

Vpsina številka | Priimek, ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Teoretični del
24. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Podaj primer parcialne diferencialne enačbe drugega reda (ni je potrebno rešiti).

2. **[15]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (a) *[5]* Definiraj diferenciabilnost funkcije f v točki $(a, b) \in \mathcal{D}$.

   (b) *[10]* Dokaži trditev:
   Če je funkcija f zvezno parcialno odvedljiva, tedaj je diferenciabilna.

3. **[10]** Definiraj tangentni vektor in poišči enačbo tangente na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki a, če je krivulja $\mathcal{K}$ podana s parametrizacijo $\vec{r}$.

4. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bo $\mathcal{P} = [a, b] \times [c, d]$ in f omejena, integrabilna funkcija na $\mathcal{P}$. Če za vsak $x \in [a, b]$ obstaja integral $\int_c^d f(x, y)\, dy = I(x)$, tedaj je

$$\iint\limits_{\mathcal{P}} f(x, y)\, dS = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy\,.$$

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
26. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Izračunaj
$$\int \frac{2^x}{3-4^x}\,\mathrm{d}x.$$
Rešitev: $\frac{1}{2\sqrt{3}\ln 2}\ln\left|\frac{2^x-\sqrt{3}}{2^x+\sqrt{3}}\right|$.

2. **[15]** Izračunaj ploščino dela ravnine, ki ga omejuje graf funkcije f, $f(x)=\ln(8-x^3)$, v prvem kvadrantu.
Namig: opazuj na intervalu $[0,\sqrt[3]{7}]$ in uporabi per-partes.

3. **[15]** Naj bo $y=y(x)$. Poišči tisto rešitev diferencialne enačbe
$$xyy'+x^2-2y^2=0,$$
ki zadošča pogoju $y(1)=-\sqrt{2}$.
Rešitev: $y_h=-x\sqrt{x^2+1}$.

4. **[20]** Naj bodo $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$ in $x_3=x_3(t)$. Reši sistem diferencialnih enačb
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2+2x_3\\ x_2' &= x_1+x_2+x_3\\ x_3' &= 2x_1+x_2. \end{aligned}$$
Rešitev: $\lambda_1=0$, $\overrightarrow{p}_1=(1,-2,1)^T$, $\lambda_2=3$, $\overrightarrow{p}_2=(1,1,1)^T$, $\lambda_3=-2$, $\overrightarrow{p}_3=(1,0,-1)^T$, rešitev sledi direktno po formulah.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
26. 8. 2021

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Čas reševanja je **40 minut**.

1. **[10]** Navedi 2 lastnosti determinante in ju pokaži na konkretnem primeru matrik reda 3.
2. **[10]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo za izračun določenega integrala.
3. **[10]** V splošnem definiraj homogeno diferencialno enačbo prvega reda in opiši postopek njenega reševanja. Podaj primer take diferencialne enačbe (ni je potrebno rešiti).
4. **[10]** Opiši oz. izpelji metodo variacije konstant za reševanje linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficieti.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
24. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit (vsebine, ki so pri Matematiki B in Matematiki C).*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]**
   (a) *[5]* Poišči Laplaceovo transformiranko za funkcijo f, $f(x) = \operatorname{sh}(x)\sin(x)$.
   (b) *[5]* Poišči inverz Laplaceove transformiranke funkcije F, $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3}$.

2. **[15]** Če obstajajo, poišči lokalne ekstreme funkcije f, ki je podana s predpisom
$$f(x,y) = 4y\sqrt{x} - x - y^2 - 6y.$$
Nadalje, poišči še globalne ekstreme funkcije f na množici
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 \le y \le 9\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0, 0 \le x \le 9\}.$$

3. **[15]** Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev z enačbama $x^2 + 4x + y^2 = 0$ in $z = 2x + y$. Parametriziraj in skiciraj krivuljo $\mathcal{K}$ ter izračunaj enačbo tangente na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki $T(-2, 2, z)$.

4. **[20]** Transformacija $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ je glede na standardni bazi vektorskih prostorov $M_2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ podana s predpisom
$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a-d, b+2c, 2d-2a)$$
   (a) Dokaži, da je transformacija $\mathcal{A}$ linearna ter ji poišči bazo jedra in bazo slike.
   (b) Poišči matriko, ki pripada transformaciji $\mathcal{A}$, če vektorska prostora $M_2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ opremimo z bazama $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ in $\mathcal{C} = \{(1,0,-2), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
24. 8. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Podaj primer parcialne diferencialne enačbe drugega reda (ni je potrebno rešiti).
2. **[15]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) *[5]* Definiraj diferenciabilnost funkcije f v točki $(a, b) \in \mathcal{D}$.
   (b) *[10]* Dokaži trditev:
   Če je funkcija f zvezno parcialno odvedljiva, tedaj je diferenciabilna.
3. **[10]** Dokaži trditev:
   Končna množica vektorjev, ki vsebuje ničelni vektor, je linearno odvisna.
4. **[10]**
   (a) *[5]* Definiraj linearno lupino množice S v vektorskem prostoru V.
   (b) *[5]* Poišči linearno lupino množice $S = \{2 - x, x^3 + 1, x\}$ v vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.