

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
23. 8. 2022

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] V kompleksni ravnini skiciraj množico

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |(3+i)\bar{z} + 1| \geq \sqrt{10} \right\}.$$

Namig: Opazuj območje v ravnini, ki ga določa neenačba $\left(a + \frac{3}{10}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{10}\right)^2 \geq 1$.

2. [15] Preuči konvergenco vrst

(a) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2n - n^2},$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n^2}.$

Če katera od njiju konvergira, izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: (a) konvergira, vsota je $-\frac{3}{4}$; (b) divergira, glej kvocientni kriterij.

3. [15] Graf funkcije f , ki je podana s predpisom $f(x) = \ln(x^3 - 2x)$, skiciraj tako, da predhodno izračunaš naravno definicijsko območje, ničle, pole, lokalne ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter preučiš obnašanje funkcije f na robovih naravnega definicijskega območja.
4. [15] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane pri vrtenju lika \mathcal{L} , ki je podan z množico

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} - \arctan(x) \right\},$$

okoli premice z enačbo $x = 2$.

Namig: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4 - \left(2 - \tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) \right)^2 \right) dy.$

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
23. 8. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- (a) [5] Navedi vse 4 lastnosti množenja kompleksnih števil.
- (b) [5] Izpelji polarni zapis kompleksnega števila.

2. [10] Naj bo f poljubnokrat odvedljiva funkcija na definicijskem območju $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$.

- (a) [5] Definiraj monotonost funkcije f na \mathcal{D} .
- (b) [5] Navedi in dokaži izrek, ki pove, kdaj je funkcija f padajoča na $(a, b) \subset \mathcal{D}$.

3. [10]

- (a) [5] Definiraj nedoločeni integral funkcije $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) [5] Pojasni kako računamo posplošeni integral funkcije f , ki na $[a, b]$ ni omejena.

4. [10] Dokaži pravilo za računanje limite produkta dveh konvergentnih zaporedij.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
23. 8. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je 75 minut.*

1. [15] V kompleksni ravnini skiciraj množico točk

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |i(\bar{z} - 1) + 1| = 2 \right\}.$$

Rešitev: Skiciraj krožnico z enačbo $(a - 1)^2 + (b + 1)^2 = 4$.

2. [15] Ali je zaporedje (a_n) , ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + n + 2} \right)^n,$$

omejeno? Utemelji.

Rešitev: je omejeno (glej konvergenco).

3. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-x-1}}.$$

Določi naravno definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f . Ali ima funkcija f lokalne ekstreme?

Rešitev: Pomagaj si WA.

4. [15] Če obstajajo, poišči vse točke na grafu funkcije f , ki je podana s predpisom $f(x) = x^2 - 3x + 4$, v katerih tangenta na graf funkcije f v tej točki poteka skozi točko $(0, 9)$.

Rešitev: glej nalogo v razdelku Geometrijski pomen odvoda.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
23. 8. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Izpelji formulo za množenje treh kompleksnih števil z_1, z_2, z_3 v polarnem zapisu.
2. **[10]** Navedi in izpelji dve od znanih limit, s katerimi računamo limite preostalih funkcij.
3. **[10]** Naj bo f odvedljiva funkcija na definicijskem območju $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$.
 - (a) *[5]* Zapiši diferencial funkcije f v točki $a \in \mathcal{D}$.
 - (b) *[5]* Zapiši enačbo tangentne na graf funkcije f v točki $a \in \mathcal{D}$.
4. **[10]** Navedi in dokaži trditev, ki pove kdaj je poljubnokrat odvedljiva funkcija konveksna na intervalu $[a, b]$.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
25. 8. 2022

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Izračunaj

(a) $\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx,$

(b) $\int \sin^3(x) \sqrt{1 + \cos x} dx,$

Namig: (a) Uporabi per-partes $u = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $dv = dx$; (b) Vpelji novo spremenljivko $t = 1 + \cos x$.

2. [15] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane pri vrtenju lika \mathcal{L} , ki je določen takole

$$x^2 - 3x + y^2 \leq 0 \quad \text{in} \quad x \geq y^2,$$

okoli osi y . Lik \mathcal{L} tudi skiciraj.

Namig: $V = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} - y^2} \right)^2 - y^4 \right) dy.$

3. [15] Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$2y' + e^{-2x}y^3 = y.$$

Rešitev: Bernoullijeva DE; $y_{1,2} = \frac{1}{C e^{-x} - e^{-2x}}$.

4. [15] V odvisnosti od relanega parametra a reši sistem enačb

$$ax + 2y + z = 1$$

$$x + ay + z = a$$

$$-x + 2y + z = 1$$

Rešitev: Enolična rešitev $x = 0$, $y = \frac{a+1}{a-2}$, $z = \frac{-a}{a-2}$, če je $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$; če je $a = -1$, dobimo parametrično rešitev; če je $a = 2$, ni rešitve.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
25. 8. 2022

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Čas reševanja je **40 minut**.
-

1. **[10]** Definiraj enoto in nasprotno (oz. obratno) matriko za
 - (a) */5/* seštevanje kvadratnih matrik reda n ,
 - (b) */5/* množenje kvadratnih matrik reda n .
2. **[10]** Naj bo A kvadratna matrika. Dokaži trditev:
Če je A obrnljiva, tedaj je njena determinanta različna od 0.
3. **[10]** Naj bosta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi homogenega dela diferencialne enačbe drugega reda.
 - (a) */5/* Kako se potem izraža splošna rešitev te diferencialne enačbe? Zvezo tudi dokaži.
 - (b) */5/* Pojasni zakaj morata biti y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi.
4. **[10]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo.

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B**Računski del****25. 8. 2022****Navodila:**

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n , kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: Izpelji in dokaži

$$A^n = \begin{cases} 2^{k-1} A^2 & ; n = 2k \\ 2^k A & ; n = 2k + 1 \end{cases}$$

2. [15] Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$y' + e^{-x} y^2 = 2e^x.$$

Rešitev: Riccatijeva DE; $y = e^x + \frac{1}{C e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}}$.

3. [15] Poišči bazo jedra, bazo slike in matriko linearne preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, ki je podana takole

$$\mathcal{A}(p_1) = -E_{11} - E_{12} + E_{22}$$

$$\mathcal{A}(p_2) = 2E_{12}$$

$$\mathcal{A}(p_3) = E_{11} - E_{22},$$

kjer so $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 2x$ in $p_3(x) = x^2 - x$, matrike E_{11} , E_{12} , E_{21} in E_{22} pa tvorijo standardno bazo vektorskega prostora $M_2(\mathbb{R})$.

Namig: Najprej poišči eksplicitni predpis $\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} a - c & a + b \\ 0 & c - a \end{bmatrix}$, kjer je $p(x) = ax^2 + bx + c$.

4. [15] Izračunaj Fourierovo vrsto za periodično razširitev funkcije $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - \pi x & ; -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ \pi x & ; -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \pi - \pi x & ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Namig: Ker je funkcija f liha, zato je $a_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$; $b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n\pi x) dx$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
25. 8. 2022

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Čas reševanja je **40 minut**.

1. [10]

- (a) [5] Navedi eksistenčni izrek za obstoj rešitve linearne diferencialne enačbe 1. reda $y' + f(x)y = g(x)$ pri pogoju $y(x_0) = y_0$.
- (b) [5] Poišči interval veljavnosti za začetni problem

$$(x^2 - 1)y' + xy = 3x^2, y(0) = 1.$$

2. [10] Dokaži trditev:

Če je $\det(A) \neq 0$, tedaj je kvadratna matrika A obrnljiva.

3. [10]

- (a) [5] Definiraj skalarni produkt vektorjev \mathbf{u} in \mathbf{v} poljubnega vektorskega prostora V .
- (b) [5] Ugotovi, ali je za vektorja $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ in $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ iz vektorskega prostora \mathbb{R}^3 produkt $*$ tudi skalarni produkt:

$$\mathbf{u} * \mathbf{v} = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 + v_1 \cdot v_2 \cdot v_3.$$

4. [10] Naj bo $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ linearna transformacija in naj bosta $B_u = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ in $B_v = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ bazi vektorskih prostorov U oz. V . Zapiši matriko linearne transformacije \mathcal{A} glede na bazi B_u in B_v .

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C**Računski del****23. 8. 2022****Navodila:**

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalično pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Poišči rešitev enačbe

$$2 \int_0^t \sin(t - \tau)y(\tau)d\tau - y'(t) = \cos t - \sin t,$$

kjer je $y(0) = 0$.

Rešitev: $y(t) = -\frac{2}{\sqrt{z}}e^{-\frac{t}{z}} \sin\left(\frac{\sqrt{z}}{2}t\right)$.

2. [15] Dano je pozitivno realno število a . Zapiši število a kot produkt treh pozitivnih realnih števil tako, da bo njihova vsota najmanjša možna.

Namig: $f(x, y, z, \lambda) = x + y + z - \lambda(xyz - a)$.

3. [15] Krivulja \mathcal{K} je določena kot rob ploskve, ki je podana takole

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad \text{in} \quad x \geq 0, z \geq 0.$$

Skiciraj krivuljo \mathcal{K} in izračunaj

$$\int_{\mathcal{K}} x^4 y^4 ds.$$

Namig: Za sliko si pomaga z GeoGebro ali WolframAlpho. Krivuljni integral izračunaj kot vsoto dveh integralov; $\int_{\mathcal{K}} x^4 y^4 ds = \frac{9\pi}{4 \cdot 4!}$.

4. [15] Telo G je v prostoru \mathbb{R}^3 določeno takole

$$0 \leq z \leq 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 \leq y.$$

Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (xy, 2y, -yz)$, skozi rob telesa G . Pri tem je rob telesa G orientiran v smeri zunanje normale. Telo G tudi skiciraj.

Rešitev: Pomagaj si z Gaussovimi izreki in cilindričnimi koordinatami

$$\int_{\partial G} \vec{F} d\vec{P} = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\sin \varphi} dr \int_0^{1 - \sqrt{1 - r^2}} 2r dz.$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Teoretični del
23. 8. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[5]** Definiraj Eulerjevo funkcijo \mathcal{B} in zapiši osnovno zveza med njo in Eulerjevo funkcijo Γ .
2. **[15]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (a) *[5]* Definiraj parcialni odvod funkcije f po spremenljivki y v točki $(a, b) \in \mathcal{D}$.
 - (b) *[5]* Definiraj totalni diferencial funkcije f v točki $(a, b) \in \mathcal{D}$.
 - (c) *[5]* Podaj konkretni primer funkcije dveh spremenljivk, ki ni diferenciable. Utemelji svojo izbiro.
3. **[10]** Pojasni oz. izpelji formulo za izračun ločne dolžine krivulje \mathcal{K} podane s parametrizacijo $\vec{r} : [a, b] \subset \mathbb{R}^3$.
4. **[10]** Z uporabo formule $\int \int_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$ za izračun površine parametrično podane ploskve izpelji formulo za izračun ploskve, ki je podana eksplisitno.