

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
22. 8. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike A.*
- *Čas reševanja je 75 minut.*

1. [15] V kompleksni ravnini skiciraj množico

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z^3 + \bar{z}) < 0\}.$$

Rešitev: nastavek $z = a+bi$, izpeljemo $\mathcal{I}m(z^3 + \bar{z}) = 3a^2b - b^3 - b < 0$ natanko tedaj, ko je $(3a^2 - b^2 - 1 < 0$ in $b > 0$) ali $(3a^2 - b^2 - 1 > 0$ in $b < 0$).

2. [15] Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \frac{\sqrt{6-x-x^2}}{1-x} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 1+x^2 & ; x \leq 0 \\ 1 & ; x > 0 \end{cases}.$$

- (a) [4] Določi naravno definicijsko območje f .
 (b) [4] Preuči injektivnost in zveznost funkcije g .
 (c) [7] Določi predpis funkcije $g \circ f$ in skiciraj njen graf.

Rešitev: (a) $D_f = [-3, 1) \cup (1, 2]$; (b) je zvezna, ni injektivna; (c) $(g \circ f)(x) = 1$ za vsak $x \in [-3, 1)$ in $(g \circ f)(x) = \frac{7-3x}{(1-x)^2}$ za vsak $x \in (1, 2]$

3. [10] Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e^{-1}}{(2-x)^{\frac{1}{x-1}}} \right)^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

Rešitev: $e^{\frac{1}{2}}$ (za več glej glej <https://press.um.si/index.php/ump/catalog/book/627>, stran 217).

4. [20] Preuči konvergenco integralov

- (a) $\int_0^1 \sqrt{-\log_2(x)} dx,$
 (b) $\int_1^\infty \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$

Če kateri od integralov konvergira, ga izračunaj.

Rešitev: (a) konvergira, pomagaj si z uvedbo nove spremenljivke $t = -\log_2(x)$, nato še enkrat nova spremenljivka in prehod na funkcijo Gama; (b) divergira, pomagaj si s per-partesom poraba per-partesa $u = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$, $dv = dx$, $du = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \frac{-1}{x^2} dx$, $v = x$ oz. z nedoločenim integralom $\int \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx = x \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
22. 8. 2023

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Čas reševanja je **40 minut**.
-

1. [10] Naj bo $z = a + ib$ kompleksno število.

(a) [3] Izpelji polarni zapis kompleksnega števila z .

(b) [7] Izpelji formulo za izračun z^3 v polarnem zapisu in jo uporabi za izračun z^3 za $z = -i$.

2. [10] Naj bo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, pri čemer sta $A, B \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je tedaj

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB.$$

3. [10] Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija in $a \in D$.

(a) [5] Definiraj lokalni minimum funkcije f v točki a .

(b) [5] S predpisom podaj primer pozitivne funkcije na D , ki je zvezna in ni odvedljiva.

4. [10] Naj bo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Izpelji formulo za izračun dolžine loka funkcije f na $[a, b]$.

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
22. 8. 2023

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike I.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Reši enačbo s kompleksnimi števili.

$$(z + i)^2 = \operatorname{Im} \left(\frac{10}{2 - i} \right)$$

Rešitev: $z_1 = \sqrt{2} - i$, $z_2 = -\sqrt{2} - i$.

2. [15] Ali je zaporedje (a_n) , ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{3n + 2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

omejeno? Če je, poišči zgornjo in spodnjo mejo zaporedja (a_n) .

Rešitev: je omejeno, lahko si pomagaš s stekališči.

3. [15] Določi naravno definicijsko območje funkcije f , ki je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{\frac{2 + |x|}{1 - x}}.$$

Nadalje, skiciraj še graf funkcije $g \circ f$, kjer je funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom $g(x) = x^2$.

Rešitev: $D_f = (-\infty, 1)$, skiraj graf funkcije s predpisom $(g \circ f)(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{1-x} & ; x \leq 0 \\ \frac{2+x}{1-x} & ; x \in (0, 1) \end{cases}$.

4. [15] Pod katerim kotom normala na krivuljo z enačbo $x^3 + y^3 = 2(xy)^3$ v točki $(x_0, 1)$ seka os x ?

Rešitev: $-\frac{\pi}{4}$.

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
22. 8. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Dana je množica $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2 - x| < 4\}$.

(a) [5] Poišči elemente množice A .

(b) [5] Če obstajata, poišči $\min(A \cap \mathbb{N})$ in $\max(A \cup \mathbb{N})$.

2. [10] Naj bo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, pri čemer sta $A, B \in \mathbb{R}$. Dokaži, da je tedaj

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

3. [10] Navedi in dokaži Lagrangeov izrek.

4. [10]

(a) [5] Definiraj konkavnost funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na $[a, b]$.

(b) [5] S predpisom podaj konkretni primer funkcije, ki je strogo padajoča in konkavna na $[0, 4]$.

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
24. 8. 2023

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta test/izpit.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [10] Poišči vse realne parametre a za katere sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} ax + y - 2z &= a \\ x - y + 2z &= 1 \\ -x + 2y + az &= 0 \end{aligned}$$

ne bo imel rešitve.

Rešitev: za $a = -4$ sistem ne bo imel rešitve.

2. [15] Dokaži, da je

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

baza vektorskega prostora $M_2(\mathbb{R})$. Nadalje, v bazi \mathcal{B} poišči tisti dve matriki, katerih razdalja med njima je (glede na standardni skalarni produkt) najmanjša oz. največja možna.

Rešitev: za razdaljo za vsak par matrik iz baze izračunaj $\|X - Y\| = \sqrt{\text{sled}((X - Y)^T(X - Y))}$.

3. [15] Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, ki je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(p) = ((x + 1)p(x))' + 2p(x),$$

poišči lastne vrednosti in lastne vektorje. Nadalje, poišči takšno bazo, da bo pripadajoča matrika linearne preslikave diagonalna.

Rešitev: $\lambda_1 = 3$, $\vec{p}_1 = (1, 0, 0)^T$; $\lambda_2 = 4$, $\vec{p}_1 = (1, 1, 0)^T$; $\lambda_3 = 5$, $\vec{p}_1 = (1, 2, 1)^T$. Iskano bazo tvori iz lastnih vektorjev.

4. [20] Reši diferencialno enačbo

$$y' = x^2 y^2 + \frac{2}{x^4}.$$

Namig: Riccatijeve DE, pomagaj si s partikularno rešitvijo $y_p = -\frac{1}{x^3}$; $y_s = \frac{1}{Cx^2 - x^3} - \frac{1}{x^3}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
24. 8. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Navedi 4 lastnosti računske operacije množenja matrike s skalarjem.
2. **[10]** Navedi in dokaži Cramerjevo pravilo.
3. **[10]** Izpelj metodo variacije konstant za iskanje partikularne rešitve linearne diferencialne enačbe 2. reda.
4. **[10]** Naj bo $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ linearna preslikava in $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ baza vektorskega prostora U .
 - (a) **[3]** Ali je poljubna množica vektorjev $S \subset U$, za katero je $|S| > n$, lahko linearno neodvisna množica?
 - (b) **[7]** Ali je $\{\mathcal{A}(\mathbf{u}_1), \mathcal{A}(\mathbf{u}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{u}_n)\} \subset V$ linearno neodvisna množica?

Utemelji oba odgovora.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
24. 8. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike II.*
 - *Čas reševanja je 75 minut.*
-

1. [15] Izračunaj

$$\int \frac{x \cos x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

Namig: per partes $u = x$, $dv = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$.

2. [15] Poišči dolžino loka tistega dela parabole z enačbo
- $y^2 = 2x + 1$
- , ki leži v delu ravnine določen z enačbo
- $x - y \leq 1$
- .

Namig: $\ell = \int_{-1}^3 \sqrt{1 + y^2} dy$.

3. [15] Naj bo
- $y = y(x)$
- . Reši diferencialno enačbo

$$xy^2y' + y^3 = 1.$$

Rešitev: Bernoullijeva DE; $y_s = \sqrt[3]{\frac{C}{x^3} + 1}$

4. [15] Naj bo
- $x_1 = x_1(t)$
- ,
- $x_2 = x_2(t)$
- in
- $x_3 = x_3(t)$
- . Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}x_1' &= 3x_1 + x_2 - x_3 \\x_2' &= 3x_1 + 5x_2 + x_3 \\x_3' &= -6x_1 + 2x_2 + 4x_3.\end{aligned}$$

Rešitev: $\vec{x}(t) = C_1(1, -1, 2)^T + C_2e^{6t}(0, 1, 1)^T + C_3e^{6t}(1, 3, 0)^T$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
24. 8. 2023

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Čas reševanja je **40 minut**.
-

1. **[10]** Definiraj prirejenko kvadratne matrike A reda n in jo poišči za $n = 2$.
2. **[10]** Naj bosta f in g integrabilni funkciji na $[a, b]$ in λ, μ poljubna skalarja. Navedi in dokaži pravilo za izračun določenega integrala funkcije $\lambda f + \mu g$ na $[a, b]$.
3. **[10]**
 - (a) **[5]** Definiraj lastno vrednost in lastni vektor kvadratne matrike A .
 - (b) **[5]** Poišči lastne vektorje enotske matrike reda 3.
4. **[10]** Izpelji metodo variacije konstant za iskanje partikularne rešitve linearne diferencialne enačbe 2. reda s konstantnimi koeficienti.

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C

Računski del

22. 8. 2022

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike C.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Krivulja \mathcal{K} je določena kot presek ploskev z enačbama

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{in} \quad 2z - x = 2$$

in njena projekcija na ravnino z enačbo $z = 0$ je orientirana pozitivno. Skiciraj krivuljo \mathcal{K} in izračunaj

$$\int_{\mathcal{K}} y \, dx + 2z \, dy + x \, dz.$$

Namig: glej presek stožca in ravnine; $\int_{\mathcal{K}} y \, dx + 2z \, dy + x \, dz = 0$.

2. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{x + 1}{x^2 + 4x + 4y^2 - 4y + 1} \right).$$

- (a) [5] Določi in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f .
 (b) [10] Poišči globalne ekstreme funkcije f na delu premice $y = 1 - x$, ki leži v prvem kvadrantu in seka naravno definicijsko območje funkcije f .

Rešitev: (a) pomagaj si z WA. (b) Dva možna načina: vezani ekstrem ali izpelji funkcijo ene spremenljivke.

3. [15] Izračunaj volumen telesa, ki je omejeno s ploskvijo z enačbo

$$(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} = xyz^2.$$

Rešitev: lahko si pomagamo s sfernimi koordinatami.

$$V = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} r^2 \cos \vartheta dr.$$

4. [15] Reši sistem enačb

$$\begin{aligned} x''(t) - y'(t) &= \cos(t) \\ x'(t) + y''(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

pri pogojih $x(0) = y'(0) = 1$, $x'(0) = y(0) = 0$.

Rešitev: Pomagamo si z Laplaceovo transformacijo $y(t) = \sin(t)$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Teoretični del
22. 8. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[5]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definiraj zveznost funkcije f v točki $(a, b) \in \mathcal{D}$.
2. **[15]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (a) **[5]** Definiraj diferenciablelnost funkcije f v točki $(a, b) \in \mathcal{D}$.
 - (b) **[10]** Dokaži trditev:
Če je funkcija f zvezno parcialno odvedljiva, tedaj je f diferenciablelna.
3. **[10]**
 - (a) **[5]** Definiraj Eulerjevi funkciji Γ in \mathcal{B} .
 - (b) **[5]** Z uporabo obeh Eulerjevih funkcij izračunaj $\Gamma(\frac{1}{2})$.
4. **[10]** Naj bo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija eksponentnega tipa. Kdaj potem obstaja njena Laplaceova transformiranka $F(z)$? Utemelji odgovor.