

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I  
29. 8. 2013

Čas reševanja je **75 minut**. Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.

1. [20] Dana je funkcija  $f(x) = \sqrt{10 - 9x - x^2}$ .

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije.
- (b) Izračunaj in klasificiraj ekstreme funkcije.

2. [15] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da krivuljo grafa funkcije  $f(x) = \sqrt{\sin x \sin(2x)}$  zavrtimo okoli  $x$  osi med dvema zaporednima ničloma funkcije  $f$ .

3. [15] V odvisnosti od realnega parametra  $a$  reši sistem enačb

$$ax + 2y = -a$$

$$ay - z = -a$$

$$2y - 2z = 0.$$

Teoretični del pri predmetu MATEMATIKA I  
29. 8. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- Dovoljeni pripomočki so: pisala.

1. **[15]** Navedi in izpelji pravilo za odvod produkta dveh odvedljivih funkcij  $f$  in  $g$ .
2. **[20]** Dokaži povezavo med določenim in nedoločenim integralom ki pravi, da je določeni integral  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  odvedljiva funkcija, pri čemer je  $F'(x) = f(x)$ .
3. **[15]** Za obrnljivo matriko  $A$  (reda  $n$ ) velja zveza:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T .$$

Na poljubni obrnljivi matriki reda 3 preveri zgornjo zvezo.

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I  
27. 8. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.

1. [20] V kompleksni ravnini skiciraj presek množic

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 4iz| \leq 2\sqrt{17}\}$$

in

$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 = 0\}.$$

Vse rezultate računsko utemelji.

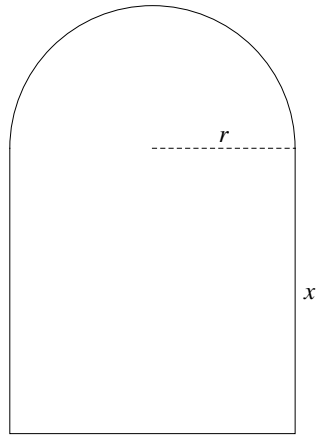
2. [20]

- (a) Brez uporabe L'Hospitalovega pravila izračunaj:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3^{x-4} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{3}} =$$

- (b) Poišči vsa realna števila  $x$ , za katera konvergira vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 5^n}$ .

3. [20] Za pevski nastop želimo oblikovati oder tako, da bo imel za osnovno ploskev kvadrat, zaključeval pa ga bo polkrog (glej spodnjo sliko). Organizator je dal pogoj, da je obseg odra 100 metrov. Koliko naj merita  $x$  in  $r$ , da bo ploščina odra največja?



Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I  
27. 8. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- Dovoljeni pripomočki so: pisala.

1. **[15]** Dana je množica  $G = \{1, a, b, c\}$  in operacija  $\circ$ :

$\circ$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	a	b	1

- (a) **[10]** Ali je množica  $G$  za operacijo  $\circ$  grupa? Utemelji odgovor.
- (b) **[5]** Ali je operacija  $\circ$  v množici  $G$  komutativna? Utemelji odgovor.
2. **[10]** Dana je funkcije  $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$ . Vpelji obratno funkcijo od  $f$  in sicer podaj njen predpis, definicijsko območje, zalogo vrednosti in skiciraj graf.
3. **[15]** Izpelji pravilo za odvod kvocienta dveh odvedljivih funkcij  $f$  in  $g$ , pri čemer naj bo  $g \neq 0$ .

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I  
27. 8. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*

1. [20] Poišči vse realne rešitve neenačbe

$$4x - |x^2 - 4x| \geq 4.$$

2. [20] Dano je zaporedje  $(a_n)$  s splošnim členom

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1}.$$

- (a) Ali je zaporedje konvergentno? Če je, izračunaj limito!  
(b) Ali je zaporedje monotono in omejeno? Utemelji!  
(c) V primeru, da limita obstaja, preveri, od katerega člena naprej se vsi členi zaporedja razlikujejo od limitne vrednosti za manj od  $\frac{1}{10}$ .

3. [20] Dana je funkcija  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}$ .

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije  $f$ .  
(b) Poišči vse tiste točke na grafu funkcije  $f$ , v katerih je tangenta na graf funkcije  $f$  vzporedna z  $x$ -osjo.

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I  
27. 8. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dana je množica  $A = \left\{ \frac{6}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ . Če obstajajo, poišči infimum, supremum, maksimum in minimum množice  $A$ .
2. **[15]** Dana je funkcije  $f : \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$ ,  $f(x) = \sin x$ . Vpelji obratno funkcijo od  $f$  in sicer podaj njen predpis, definicijsko območje, zalogo vrednosti in skiciraj graf.
3. **[15]** Izpelji pravilo za odvod produkta dveh odvedljivih funkcij  $f$  in  $g$ .

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II  
29. 8. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*

1. **[20]** Poišči volumen območja, ki ga dobimo pri vrtenju grafa funkcije  $f(x) = x\sqrt{e^{-x^2}}$  okoli osi  $x$  za nenegativne  $x$ -e. Vse izpelji in računsko utemelji.
2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = -x^5 + \frac{y}{x} + x^3y^2.$$

3. **[20]** V odvisnosti od realnega parametra  $a$  reši sistem enačb

$$\begin{aligned}(a - 1)x - y + 2z &= 1 \\ -x + ay + z &= a \\ x - 2y + az &= 0.\end{aligned}$$



Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II  
29. 8. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- Dovoljeni pripomočki so: pisala.

1. **[15]** Navedi in dokaži izrek, ki podaja povezavo med nedoločenim in določenim integralom.  
(Opomba: Leibniz-Newtonova formula je posledica zahtevanega izreka.)
2. **[10]** V splošnem opiši postopek reševanja Riccattijeve diferencialne enačbe in podaj primer take diferencialne enačbe.
3. **[5]** Za obrnljivo matriko  $A$  (reda  $n$ ) velja zveza:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T .$$

Dokaži jo za  $n = 2$ .

4. **[10]** Podaj primer homogenega sistema 5 linearnih enačb s 5 neznančkami, ki ima parametrično rešitev.

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II  
29. 8. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*

1. **[20]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da graf funkcije  $f(x) = \sqrt{\sin x \sin(2x) \cos(\frac{x}{2})}$  zavrtimo okoli  $x$  osi med dvema zaporednima ničloma funkcije  $f$ .
2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$xy' = y(2 + \frac{y^2}{x^2}).$$

3. **[20]** V odvisnosti od realnega parametra  $a$  reši sistem enačb

$$ax + 2y = -a$$

$$ay - z = -a$$

$$2y - 2z = 0.$$

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II  
29. 8. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[15]** Dokaži povezavo med določenim in nedoločenim integralom ki pravi, da je določeni integral  $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  odvedljiva funkcija, pri čemer je  $F'(x) = f(x)$ .
2. **[15]** Podaj primer homogene diferencialne enačbe tretjega reda s konstantnimi koeficienti, kjer ima pripadajoči karakteristični polinom dve kompleksni in eno realno ničlo. Diferencialno enačbo tudi reši.
3. **[10]** Za obrnljivo matriko  $A$  (reda  $n$ ) velja zveza:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T .$$

Na konkretni matriki reda 3 preveri zgornjo zvezo.

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III  
27. 8. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*

1. **[20]** Dani so vektorji  $v_1 = (-2, 0, -1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  in  $v_3 = (2, 1, 1)$ .

(a) Preveri, da vektorji  $v_1$ ,  $v_2$  in  $v_3$  tvorijo bazo prostora  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Določi eksplicitni predpis preslikave  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , če je  $f(v_1) = (1, 0)$ ,  $f(v_2) = (0, 2)$  in  $f(v_3) = (-1, 1)$ . Ali je  $f$  injektivna?

2. **[20]** Dana je funkcija  $f(x, y) = \sqrt{x + \sin y}$  in točka  $T(0, \frac{\pi}{2})$ .

(a) Zapiši Taylorjev polinom druge stopnje funkcije  $f$  v okolici točke  $T$ .

(b) V kateri smeri je odvod funkcije  $f$  v točki  $T$  največji?

3. **[20]** Poišči splošno rešitev sistema diferencialnih enačb

$$x'_1 = x_2$$

$$x'_2 = -x_1 + 2x_2$$

$$x'_3 = -2x_2 + 2x_3.$$

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III  
27. 8. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Naj bo  $\mathcal{V}$  unitarni prostor in  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  poljubna vektorja iz  $\mathcal{V}$ . Dokaži Cauchy-Schwarzovo neenakost

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| .$$

2. **[15]** Definiraj lokalni ekstrem funkcije  $f$  dveh spremenljivk in dokaži zadostni pogoj za obstoj lokalnega maksimuma (odvedljive) funkcije  $f$  v točki  $(a, b)$ .

3. **[15]** Izpeljži naslednji pravili Laplaceove transformacije:

(a) **[5]**  $\mathcal{L}(f'(t))(z) = z\mathcal{L}(f(t))(z) - f(0),$

(b) **[10]**  $\mathcal{L}(t^n f(t))(z) = (-1)^n \mathcal{L}^{(n)}(f(t))(z), n \in \mathbb{N}.$

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II  
27. 8. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.

1. **[20]** Dani so vektorji  $v_1 = (-2, 0, -1)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  in  $v_3 = (2, 1, 1)$ .

(a) Preveri, da vektorji  $v_1$ ,  $v_2$  in  $v_3$  tvorijo bazo prostora  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Zapiši matriko prehoda iz standardne baze prostora  $\mathbb{R}^3$  v bazo  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ .

2. **[15]** Zapiši Taylorjev polinom druge stopnje funkcije  $f(x, y) = \sqrt{x + \sin(xy)}$  v okolici točke  $T(1, 0)$ .

3. **[15]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}x_1' &= 2x_1 - 3x_2 \\x_2' &= -2x_1 + x_2\end{aligned}$$

pri pogoju  $x_1(0) = 8$  in  $x_2(0) = 3$ .

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II  
27. 8. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[15]** Naj bo  $\mathcal{V}$  unitarni prostor in  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  poljubna vektorja iz  $\mathcal{V}$ . Dokaži Schwarzovo neenakost

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| .$$

2. **[15]** Definiraj lokalni ekstrem funkcije  $f$  dveh spremenljivk in dokaži zadostni pogoj za obstoj lokalnega maksimuma (odvedljive) funkcije  $f$  v točki  $(a, b)$ .
3. **[20]** Izpeljži naslednji pravili Laplaceove transformacije:

(a) **[10]**  $\mathcal{L}(e^{at} f(t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z - a),$

(b) **[10]**  $\mathcal{L}(f'(t))(z) = z \mathcal{L}(f(t))(z) - f(0).$