UM FKKT
Kemijska tehnologija
Visokošolski strokovni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
26. 8. 2014

Čas reševanja je **75 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Dana je funkcija $f(x) = \ln(12 - 11x - x^2)$.
   (a) Določi naravno definicjsko območje funkcije f.
   (b) Izračunaj in klasificiraj ekstreme funkcije f.

2. **[10]** Izračunaj
$$\int (1 - x)\ln(x)\, dx.$$

3. **[15]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y''' + 4y' = e^{-x}.$$

4. **[10]** Reši matrično enačbo
$$(XA^T - 2A)^T = AX^T A,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Visokošolski strokovni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del pri predmetu MATEMATIKA I
26. 8. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Definiraj zaporedje, limito zaporedja in stekališče zaporedja. Nato podaj primer zaporedja, ki ima tri stekališča.
2. **[15]** Izpelji pravilo za odvod produkta dveh funkcij.
3. **[15** Zapiši v splošni obliki linearno diferencialno enačbo tretjega reda s konstantnimi koeficienti, podaj primer take diferencialne enačbe ter poišči rešitev njenega homogenega dela.
4. **[10]** Kdaj lahko za reševanje sistema m linearnih enačb z n neznankami uporabimo Cramerjevo pravilo?

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
28. 8. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja
$$z^7 - 2iz^4 - iz^3 - 2 = 0.$$
Rešitev: enačbo v preoblikujemo v $(z^3 - 2i)(z^4 - i) = 0$. S pomočjo polarnega zapisa rešimo enačbi $z^4 = i$ in $z^3 = 2i$.

2. **[10]** Od katerega mesta naprej se členi zaporedja (a_n), ki je podano s splošnim členom $a_n = \frac{2n^2+1}{1-3n^2}$, razlikujejo od limitne vrednosti za manj od $0,05$?
Rešitev: od 12. člena naprej.

3. **[20]** Dana je funkcija
$$f(x) = \frac{x^2 - 8}{\ln(9 - x^2)}.$$
(a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in izračunaj h katerim vrednostim se približujejo funkcijske vrednosti na robovih definicijskega območja.
(b) Izračunaj $g \circ f$ in $f \circ g$, če je
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & ; \quad x > 0 \\ 1 & ; \quad x \leq 0. \end{cases}$$
Rešitev: (a) $D_f = (-3,3)\backslash\{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\uparrow\sqrt{8}} f(x) = -1$, podobno za $x = -\sqrt{8}$, $x = -3$; (b) $(g \circ f)(x) = 1$, za vse $x \in D_f$; $(f \circ g)(x) = \frac{\frac{1}{x^2}-8}{\ln(9-\frac{1}{x^2})}$ za $\frac{1}{x^2} \in D_f$, $(f \circ g)(x) = \frac{-7}{\ln 8}$ za $x = 0$.

4. **[15]** Poišči pravokotnik z največjo ploščino, ki ga včrtaš v enakostranični trikotnik s stranico dolžine 10.
Rešitev: glej nalogo 27. v učbeniku na strani 289.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
28. 8. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Naj bo z kompleksno število in t pozitivno realno število. Izračunaj absolutno vrednost izraza $e^{-z\,t}$.
2. **[10]** Izpelji formulo za izračun absolutne napake produkta dveh izmerjenih količin a in b, katerih napaki sta δ_a in δ_b.
3. **[10]** Definiraj tangento na graf odvedljive funkcije f v točki a in zapiši njeno enačbo. Poišči primer funkcije, katere tengenta v točki $a = 1$ je vzporedna z x-osjo.
4. **[10]** Navedi Cauchyjev izrek in podaj primer izreka, kjer se le-ta uporabi v dokazu.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
28. 8. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Pošči vsa kompleksna števila z, za katera velja
$$z^5 = \frac{-\sqrt{3}i}{1-i}.$$

2. **[15]** Določi naravni definicijski območji funkcij $f(x) = \frac{e^x-1}{\sqrt{4-3x-x^2}}$ in $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ter izračunaj $g \circ f$.

3. **[15]** Izračunaj limiti:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+n}{4n^2+4}\right)^{2n+1} =$

   (b) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{15-x}}{\ln(26-x^2)} =$

4. **[15]** Izračunaj enačbo tangente na krivuljo $x^2 - y^2 = 4$ v točki $(\sqrt{5}, 1)$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
28. 8. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dana je množica $A = \left\{ \frac{2x}{x+3} \mid x \in \mathbb{N} \right\}$. Če obstajajo, poišči supremum, infimum, minimum, maksimum množic $A \cap \mathbb{N}$ in $A \cup \mathbb{N}$.

2. **[10]** Izpelji formulo za izračun absolutne napake razlike dveh izmerjenih količin a in b, katerih napaki sta δ_a in δ_b.

3. **[10]** Definiraj tangento na graf odvedljive funkcije f v točki a. Zapiši enačbo te tangente.

4. **[10]** Dokaži izrek, ki pove, kdaj je odvedljiva funkcija f strogo padajoča.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 8. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena. Rešene naloge oziroma natančni postopki za njihovo reševanje so strogo prepovedani.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor natančno utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]**

   (a) Izračunaj $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos x + 1}}\,dx$.

   (b) Ali konvergira integral

   $$\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3+3x}\,dx?$$

   Odgovor utemelji!

   Rešitev: (a) integral preoblikujemo v

   $$\int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x + \cos x + 1}}\,dx \stackrel{t=\cos x}{=} \int \frac{-(1-t^2)}{\sqrt{-t^2+t+2}}\,dt.$$

   Nadaljuj s postopkom opisanim v skripti.

   (b) Konvergira (pomagaj si s primerjalnim kriterijem).

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

   $$y = -\frac{1}{2}y'(2x+y').$$

   Rešitev: Lagrangeova DE; $x(t) = C\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{t}{3}$, $y(t) = -x(t)t - \frac{1}{2}t^2$.

3. **[20]** Glede na realni parameter a reši matrično enačbo

   $$AX = I,$$

   kjer je

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Rešitev: za $a \neq 2$ čahko izračunamo inverz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a-2} & 0 & \frac{-2}{a-2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{a-2} & 0 & \frac{1}{a-2} \end{bmatrix};$$

za $a = 2$ pridemo do protislovja.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 8. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Kdaj ima sistem m linearnih enačb z n neznankami enolično rešitev?

2. **[10]** Navedi en izrek, pri katerem se v dokazu uporabi izrek o srednji vrednosti določenega integrala.

3. **[10]** Poišči formulo za numerično integriranje na intervalu $[0, 4]$, ki je točna na prostoru polinomov stopnje kvečjemu 2.

4. **[10]** Dokaži izrek, ki pravi, če so funkcije y_i, $i = 1, \ldots, n$, linearno neodvisne rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda, tedaj je tudi njihova linearna kombinacija splošna rešitev te iste diferencialne enačbe.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 8. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena. Rešene naloge oziroma natančni postopki za njihovo reševanje so strogo prepovedani.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor natančno utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Izračunaj ploščino območja, ki je omejeno z grafoma funkcij $f(x) = \ln(5 - x^2)$ in $g(x) = x^2 - 4$. Pomagaj si s skico.

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y''' + 5y'' + 3y' - 9y = 64e^{-3x}.$$

3. **[20]** Reši matrično enačbo
$$(XA^T - 2A)^T = AX^TA,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 8. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Kdaj lahko za reševanje sistema m linearnih enačb z n neznankami uporabimo Cramerjevo pravilo?

2. **[10]** Pojasni oz. izpelji metodo univerzalne substitucije pri nedoločenem integriranju funkcij, ki so sestavljene iz funkcij sinus in kosinus.

3. **[10]** Zapiši v splošni obliki linearno diferencialno enačbo tretjega reda s konstantnimi koeficienti, podaj primer take diferencialne enačbe ter poišči rešitev njenega homogenega dela.

4. **[10]** Dokaži izrek, ki pravi, če sta funkciji y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega reda, tedaj je tudi njuna linearna kombinacija splošna rešitev te iste diferencialne enačbe.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
Mathematica, WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
28. 8. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[25]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana na naslednji način: $\mathcal{A}(0,1,0) = (2,0,1)$, $\mathcal{A}(1,1,0) = (-1,0,1)$, $\mathcal{A}(0,2,-1) = (2,0,0)$.
   (a) Poišči eksplicitni predpis preslikave f ter določi $\mathcal{K}er(f)$ in $\mathcal{I}m(f)$.
   (b) Glede na standardno bazo zapiši matriko, ki pripada $\mathcal{A}$.

2. **[15]** Krivulja $\mathcal{K}$ je podana parametrično
$$\vec{r}(t) = (\ln t, t^2, \frac{t^4}{2}), \quad t > 0.$$
   (a) Zapiši enačbo tangente na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki $A(0,1,\frac{1}{2})$.
   (b) Izračunaj dolžino loka med točkama $A(0,1,\frac{1}{2})$ in $B(\ln 2, 4, 8)$.

3. **[20]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb
$$x' = 2x - y$$
$$y' = x + e^{-t}$$
   pri pogoju $x(1) = 0$ in $y(1) = 1$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
28. 8. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Podaj primer podmnožice vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$ (z običajnim seštevanjem in množenjem s skalarjem), ki je zaprta za seštevanje, ni pa zaprta za množenje s skalarjem in zato ni vektorski podprostor.

2. **[10]** Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormirana baza evklidskega prostora $\mathcal{V}$. Izpelji, kako se potemtakem izraža poljuben vektor iz $\mathcal{V}$ z vektorji iz $\mathcal{B}$.

3. **[10]** Izpelji enačbo tangentne ravnine na implicitno podano ploskev.

4. **[10]** Z metodo najmanjših kvadratov poišči linearno funkcijo, ki se najbolj prilega točkam $(1,0), (2,2), (3,1), (4,3)$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
28. 8. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana na naslednji način: $\mathcal{A}(0,1,0) = (2,0,1)$, $\mathcal{A}(1,1,0) = (-1,0,1)$, $\mathcal{A}(0,2,-1) = (2,0,0)$.
   (a) Poišči eksplicitni predpis preslikave f ter določi $\mathcal{K}er(f)$ in $\mathcal{I}m(f)$.
   (b) Glede na standardno bazo zapiši matriko, ki pripada $\mathcal{A}$.

2. **[15]** Dana je funkcija $f(x,y) = x\ln(1+\frac{x}{y})$.
   (a) Skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f.
   (b) Razvij funkcijo f v Taylorjevo formulo do členov 2. reda v okolici točke $(0,1)$.

3. **[15]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$x' = 2x - y$$
$$y' = x + e^{-t}$$

   pri pogoju $x(1) = 0$ in $y(1) = 1$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
28. 8. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Ali je množica $\mathcal{W} = \{(0, y, z + 1);\ y, z \in \mathbb{R}\}$ vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^3$ za običajno seštevanje in množenje s skalarjem? Odgovor utemelji.
2. **[15]** Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormirana baza evklidskega prostora $\mathcal{V}$. Izpelji, kako se potemtakem izraža poljuben vektor iz $\mathcal{V}$ z vektorji iz $\mathcal{B}$.
3. **[15]** Pojasni kako s totalnim diferencialom lineariziramo funkcijo dveh spremenljivk v okolici točke (a, b). Lineariziraj funkcijo $f(x, y) = x^2 + y^2$ v okolici točke $(1, 1)$.
4. **[10]** Na poljubnem konkretnem primeru uporabi konvolucijo Laplaceove transformacije.