Izpiti jesenskega izpitnega obdobja

Rešitve nalog niso popolne in obstaja možnost tipkarskih napak.

UM FKKT | Vpisna številka:
Kemijska tehnologija | Ime priimek:
Visokošolski strokovni program

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
1. 9. 2015

Čas reševanja je **75 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Dana je funkcija $f(x) = \ln(4 - x^2)$.
   (a) Določi naravno definicjsko območje funkcije f.
   (b) Izračunaj in klasificiraj ekstreme funkcije f.
2. **[15]** Izračunaj
$$\int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + x\ln(2x) \right) \mathrm{d}x.$$
3. **[10]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y' - 2y = e^{2x}.$$
4. **[10]** Reši matrično enačbo
$$AX + X = I,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Visokošolski strokovni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del pri predmetu MATEMATIKA I
1. 9. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Vpelji polarni zapis kompleksnega števila ter zapiši in izpelji Moivreovo formulo.
2. **[10]** Dokaži formulo za nedoločeno integriranje:
$$\int (a\,f(x) + b\,g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx\,, \qquad a,b \in \mathbb{R}\,.$$
3. **[15]** Izpelji oz. pojasni postopek za iskanje rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti.
4. **[15]** Zapiši Cramerjevo pravilo in ga dokaži.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
27. 8. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** V kompleksni ravnini natančno skiciraj vsa kompleksna števila z za katera velja
$$\frac{2z-1}{z+i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$
Rešitev: naj bo $z = a + bi$. Dobimo
$$\frac{2z-1}{z+i} = \frac{(2a-1)+2bi}{a+(b+1)i} = \frac{((2a-1)+2bi)(a-(b+1)i)}{a^2+(b+1)^2}.$$
Če želimo, da je $\frac{2z-1}{z+i} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tedaj je $\mathcal{I}m\left(\frac{((2a-1)+2bi)(a-(b+1)i)}{a^2+(b+1)^2}\right) \neq 0$ oziroma $-(2a-1)(b+1)+2ab \neq 0$. Iz tega sledi, da je $b \neq 2a-1$.

2. **[15]** Za katera realna števila x konvergira vrsta
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{n+1}}{(x^2-2)^n}?$$
Vsak korak utemelji!
Rešitev: s pomočjo korenskega kriterija dobimo pogoj $\left|\frac{x}{x^2-2}\right| < 1$. Posledično dobimo, da vrsta konvergira za $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty)$, sicer divergira.

3. **[15]** Izračunaj
(a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-2} - \sqrt[3]{2}}{\ln(2x-7)} =$
(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^2}{(1+4x)^{\frac{1}{2x}}}\right)^{\frac{1}{3x}} =$

Rešitev:

(a) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-2} - \sqrt[3]{2}}{\ln(2x-7)} = \infty$ oz. limita ne obstaja.

(b) $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{e^2}{(1+4x)^{\frac{1}{2x}}} \right)^{\frac{1}{3x}} = e^{\frac{4}{3}}$.

4. **[15]** Preveri, ali se funkciji f, $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$, in g, $g(x) = -2x + \arctan(1-2x)$, razlikujeta le za konstanto na delu definicijskega območja, ki je obema je skupen. Ta del definicijskega območja tudi določi.

Rešitev: $D_f \cap D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ne razlikujeta se le za konstanto.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
27. 8. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Na množici realnih števil $\mathbb{R}$ definiramo binarni operaciji seštevanja $\oplus$ in množenja $\odot$ na sledeč način:

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R} &\ :\ a \oplus b = 2a + b, \\ \forall a, b \in \mathbb{R} &\ :\ a \odot b = 2ab. \end{aligned}$$

Ali je $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ obseg?

2. **[10]** Hiperbolična funkcija tangens je definirana kot kvocient hiperboličnih funkcij sinus in kosinus:

$$f(x) = \tanh x = \frac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x}\,.$$

Pošči zalogo vrednosti funkcije f.

3. **[10]** Izpelji vsa tri pravila računanja z logaritemsko funkcijo.

4. **[10]** Navedi Raabejev kriterij za preverjanje konvergence številskih vrst in podaj primer vrste, kjer ga lahko uporabimo (kriterij tudi uporabi na svojem primeru).

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
27. 8. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Nad množico kompleksnih števil poišči rešitve enačbe

$$z^2 + 2i\bar{z} = \mathcal{I}m\left(\frac{10+5i}{1+3i}\right).$$

Rešitev: naj bo $z = a + bi$. Dobimo

$$a^2 + 2abi - b^2 + 2ai + 2b = \frac{5}{2}.$$

Na podlagi tega dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama $a^2 - b^2 + 2b = \frac{5}{2}$ in $2a(b+1) = 0$. Na podlagi druge enačbe dobimo, da je $a = 0$ ali $b = -1$. Sedaj na podlagi teh dveh možnosti poišči končno rešitev s pomočjo prve enačbe.

2. **[10]** Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{8n^2 - 5}{8n^2 + 3n}\right)^{3n^2}.$$

Ali je zaporedje konvergentno? Utemelji!

Rešitev: ne.

3. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}.$$

(a) Določi definicijsko območje funkcije f.

(b) Ali obstajajo lokalni ekstremi funkcije f? Če obstajajo, jih klasificiraj.

Rešitev: (a) $D_f = (-1, \infty)$; (b) s pomočjo prvega in drugega odvoda dobimo, da je točka $T(0, 0)$ lokalni minimum.

4. **[15]** Izračunaj enačbo normale na graf funkcije f,

$$f(x) = e^{2x} \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right),$$

v točki $T(0, y)$. V kateri točki normala seka ordinatno os?

Rešitev: $k_N = -\frac{1}{f'(0)} = \frac{2}{\pi - 1}$, enačba normale $y = \frac{2}{\pi-1}x + \frac{\pi}{2}$. Iskana točka je $T(0, \frac{\pi}{2})$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
27. 8. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,.$$

Pokaži, da sta -1 in 1 infimum oziroma supremum funkcije f.

2. **[10]** Izpelji vsa tri pravila računanja z logaritemsko funkcijo.

3. **[10]** Navedi in dokaži zadostni pogoj za obstoj lokalnega minimuma vsaj 2-krat odvedljive funkcije.

4. **[10]**

   [5] Definiraj tangento na graf odvedljive funkcije f v točki a.

   [5] Podaj primer funkcije, katere tangenta ima v neki točki a smerni koeficient -4, ter določi a.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
1. 9. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Izračunaj
$$\int \frac{1}{3\tan(x)+2}\mathrm{d}x.$$
Rešitev: integral se izračuna na več načinov.
S pomočjo univerzalne substitucije dobimo
$$\int \frac{1}{3\tan(x)+2}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{3\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x \overset{\text{univ. subs.}}{=} \int \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)(6t+2(1-t^2))}\mathrm{d}t,$$
nato nadaljujemo s pomočjo parcialnih ulomkov.

2. **[15]** Izračunaj
$$\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{|2-x^2|}}\mathrm{d}x.$$
Rešitev: ker je v $\sqrt{2}$ pol, dobimo
$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{|2-x^2|}}\mathrm{d}x &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\uparrow\sqrt{2}}\int_1^b \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x + \lim_{a\downarrow\sqrt{2}}\int_a^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
En od načinov, da izračunamo $\int \frac{1}{x\sqrt{2-x^2}}\mathrm{d}x$ in $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x$, je s pomočjo nove spremenljivke $t = \frac{1}{x}$. Dobimo $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2-\frac{1}{2}}}| + c$ in $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{x} + c$.

3. **[20]** S pomočjo potenčnih vrst poišči rešitev diferencialne enačbe
$$y' - 2xy = 1.$$

Rešitev: naj bo $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Tedaj dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} = 1$$

in to je ekvivalentno

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 a_n x^{n+1} = 1$$

oziroma

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2) a_{n+2} - 2a_n) x^{n+1} - 1 = 0.$$

Iz tega sledi, da je $a_1 = 1$ in $a_{n+2} = \frac{2a_n}{n+1}$. Na podlagi rekuzivno podane formule dobimo različne vrednosti za sode in lihe indekse, $a_{2k+1} = \frac{2^k}{(2k+1)!!}$ in $a_{2k+2} = \frac{2^k}{(2k+2)!!}$, le-to pa upoštevamo pri začetnem nastavku.

4. **[15]** Poišči realna števila a in b za katera je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & a & -1 & 1 \\ 2 & a+4 & 0 & b & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -a & b+1 & -1 \end{bmatrix}$$

obrnljiva. Rešitev predstavi v ravnini.

Rešitev: ko je $\det(A) = 0$. V našem primeru je $\det(A) = -(a+4)(2a-4+b(a+4)) = 0$, če je $a = -4$ ali $b = -\frac{2a-4}{a+4}$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
1. 9. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Podaj primer 4×5 sistema linearnih enačb, ki nima rešitve.
2. **[10]** (V celoti) dokaži trditev, da je vsaka spodnja Riemmanova vsota funkcije f na $[a, b]$ manjša od vsake zgornje Riemanove vsote te iste funkcije na tem intervalu.
3. **[10]** Izpelji oz. pojasni postopek za iskanje rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe tretjega reda s konstantnimi koeficienti.
4. **[10]** Z uporabo nove spremenljivke izračunaj posplošeni integral
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ct} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt\,,$$
pri čemer je c pozitivno število.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
1. 9. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Izračunaj dolžino loka, ki ga določa graf funkcije f, $f(x) = \sqrt{1-2x}$, v prvem kvadrantu.

   Rešitev: izračunati je potrebno integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2-2x}{1-2x} \mathrm{d}x$. Nedoločeni integral izračunamo z uvedbno nove spremenljivke $t = \frac{2-2x}{1-2x}$.

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y''' + 15y = y'' + 7y' + 8e^{-3x}.$$

   Rešitev: homogeni del $y_h = C_1 e^{-3x} + e^{2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$; nastavek za partikularno rešitev $y_P = Axe^{-3x}$.

3. **[20]** Poišči realna števila a in b za katera matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 0 & 1 \\ 2 & a+4 & 0 & b & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -a & b & -1 \end{bmatrix}$$

   ni obrnljiva.

   Rešitev: ko je $\det(A) = 0$. V našem primeru je $\det(A) = -12b - 6ab - a^2 b = 0$, če je $b = 0$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
1. 9. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Podaj primer 4×5 sistema linearnih enačb, ki nima rešitve.
2. **[10]** Navedi in dokaži Cramerjevo pravilo.
3. **[10]** Dokaži formulo za nedoločeno integriranje:

$$\int (a\,f(x) + b\,g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx\,, \qquad a, b \in \mathbb{R}\,.$$

4. **[10]** Izpelji oz. pojasni postopek za iskanje rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
Mathematica, WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
27. 8. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Linearna transformacija je glede na standardni bazi podana takole:

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x], \quad \mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)x^2 + 2x_3x + (x_1 + x_2).$$

   (a) Poišči bazo jedra in bazo slike linearne transformacije $\mathcal{A}$ ter ji priredi matriko.

   (b) Poišči predpis linearne transformacije $\mathcal{A}$ glede na bazi

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1)\} \text{ in } \mathcal{B}_2 = \{1, 1-x, 1-x^2\}.$$

Rešitev: (a) $\mathcal{B}_{\mathcal{K}er\mathcal{A}} = \{(1,-1,0)\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}m\mathcal{A}} = \{(1,-1,0)\}$; (b) glej vaje in si pomagaj z diagramom

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_S \arrow[r, "\mathcal{A}"] & \mathcal{B}'_S \\ \mathcal{B}_1 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "\bar{A}"] & \mathcal{B}_2 \arrow[u, "P_2"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

Pri tem je $\bar{A}$ iskana preslikava, P_1 (P_2) matrika prehoda iz baze $\mathcal{B}_1$ ($\mathcal{B}_2$) v standardno bazo $\mathcal{B}_S$ ($\mathcal{B}'_S$). Posledično je $\bar{A} = P_2^{-1}AP_1$.

2. **[20]** Poišči točko na ploskvi $x = yz - 1$, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču.

Rešitev: vsako točko na ploskvi $x = yz - 1$ lahko zapišemo kot $T(yz-1, y, z)$. Iz tega sledi $d(T,O) = \sqrt{(yz-1-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}$. Skladno z razlago na vajah lahko iščemo ekstrem funkcije, ki je podana s predpisom $f(y,z) = (yz-1)^2 + y^2 + z^2$.

Naloga se lahko reši tudi s pomočjo vezanega ekstrema.

3. **[20]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$y''(t) + x'(t) = t$$
$$y(t) + x''(t) = 1$$

pri pogojih $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 1$ in $y'(0) = 0$.

Rešitev: nalogo rešimo s pomočjo Laplaceove transformacije:

$$z^2Y + zX - z = \frac{1}{z^2}$$
$$Y + z^2X - 1 = \frac{1}{z}.$$

Posledično

$$(z^3 - 1)Y = z^2 + 1$$

oziroma

$$Y = \frac{z^2}{(z-1)(z^2+z+1)} + \frac{1}{(z-1)(z^2+z+1)}.$$

Sedaj s pomočjo parcialnih ulomkov izračunamo inverz Laplaceove transformiranke, nato še analogno postopamo za X.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
27. 8. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[15]**

   a) **[10]** Izpelji Gram-Schmidtov ortogonalizacijski postopek za iskanje ortogonalne baze n-razsežnega vektorskega prostora.

   b) **[5]** Podaj primer nestandardne baze vektorskega prostora kvadratnih matrik reda 2.

2. **[10]** Reši sistem nelinearnih enačb

$$\begin{aligned} x - y^2 &= 3 \\ xy + 2x &= 6 \end{aligned}$$

   tako, da uporabiš samo en iteracijski korak pri katerem upoštevaš, da je začetna točka iteracije v $(1, 1)$.

3. **[15]**

   a) **[5]** Dokaži linearnost Laplaceove transformacije.

   b) **[10]** Izpelji Laplaceovo transformiranko funkcije $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime in priimek:

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
27. 8. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je glede na standardni bazi podana s predpisom
$$\mathcal{A}(x, y, z) = (2x - y, 2x + y).$$
   (a) Preveri, da je $\mathcal{A}$ linearna ter ji priredi matriko.
   (b) Določi bazo jedra in bazo slike od $\mathcal{A}$.

2. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom $f(x, y) = \arctan(x^2 - 2x + y^2)$.
   (a) Izračunaj $f_{xy}(2, 1)$.
   (b) Ali ima funkcija lokalne ekstreme? Če obstajajo, jih poišči.

   Vsak korak utemelji!

3. **[15]** S pomočjo Laplaceove transformacije poišči rešitev enačbe
$$y''(x) - 4y(x) = e^{2x}\text{ch}(x)$$
pri pogojih $y(0) = 2$ in $y'(0) = 0$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime in priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
27. 8. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[15]** Izpelji Gram-Schmidtov ortogonalizacijski postopek za iskanje ortogonalne baze n-razsežnega vektorskega prostora.
2. **[15]**
   a) **[10]** Katere lastnosti mora imeti preslikava, da je skalarni produkt vektorskega prostora?
   b) **[5]** Podaj primer skalarnega produkta vektorskega prostora $\mathbb{R}^4$.
3. **[20]**
   a) **[10]** Dokaži linearnost Laplaceove transformacije.
   b) **[10]** Izračunaj Laplaceovo transformiranko funkcije $f(t) = t^2$.