

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
22. 8. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [10] Preveri, ali za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, velja

$$\frac{1}{1!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{5!} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)!} \leq 2 - \frac{1}{(2n)!}.$$

Odgovor utemelji!

Namig: dokaži matematično indukcijo.

2. [20] Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & ; x < 0 \\ \frac{-2x^2}{x+1} & ; x \geq 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} e^x - e^4 & ; x < 4 \\ 1 - \sqrt{x^2 + 9} & ; x \geq 4 \end{cases}.$$

- (a) Nariši graf funkcije f .
 (b) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x}$.
 (c) Izračunaj oba kompozituma funkcij f in g .

Namig: (a) pomagaj si z WolframAlpha; (b) -1; (c)

$$g(f(x)) = \begin{cases} e^{x+4} - e^4 & ; x < 0 \\ e^{\frac{-2x^2}{x+1}} - e^4 & ; x \geq 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad f(g(x)) = \begin{cases} e^x - e^4 + 4 & ; x < 4 \\ 5 - \sqrt{x^2 + 9} & ; x \geq 4 \end{cases}.$$

3. [15] Določi konvergenčno območje vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n+1)(2x+3)^n}.$$

Rešitev: uporabi korenski kriterij, kasneje še Leibnizov kriterij; konvergira za $x \in (-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$.

4. [15] Ali obstajajo točke krivulji $\mathcal{K} : x^3 + y^3 = 3xy$ v katerih je tangenta vzporedna z abscisno osjo oziroma z ordinatno osjo? Če obstajajo, jih poišči.

Rešitev: obstajajo; pomagaj si z odvodom implicitno podane funkcije.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
22. 8. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Naj bo z kompleksno število, ter r polmer in φ argument od z . Pokaži, da je

$$z = re^{i\varphi}.$$

2. [10]

- (a) [5] Zapiši definicijo limite funkcije f v točki a .
- (b) [5] S predpisom podaj primer funkcije, ki nima limite v točki $a = -1$.

3. [10]

- (a) [5] Zapiši definicijo tangente v točki a na graf odvedljive funkcije f .
- (b) [5] Podaj primer funkcije, ki ima z neko svojo tangento vsaj dve skupni točki.

4. [10] Navedi in dokaži izrek ki pove, kdaj je funkcija konkavna.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
22. 8. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Poišči realne rešitve enačbe

$$|x^2 + 4| - |x - 1| = x^2 + |x + 2|.$$

Rešitev: $x \in \{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$.

2. [15] Izračunaj

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n}{n^2 + 3n + 3} \right)^{2n^2} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{2x - 3}} =$

Rešitev: (a) e^{-6} , (b) $-\sqrt{3}\pi$.

3. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x + 1}}.$$

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f .

(b) Izračunaj in nariši graf $g \circ f$, če je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 & ; x = 0. \\ 2 & ; x > 0 \end{cases}$.

Rešitev: (a) $D_f = [-2, -1) \cup [2, \infty)$; (b) $g(f(x)) = \begin{cases} 1 & ; x \in \{-2, 2\} \\ 2 & ; x \in (-2, -1) \cup (2, \infty) \end{cases}$.

4. [15] Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f , $f(x) = xe^{x-x^2}$.

Rešitev: $x = 1$ maksimum, $x = -\frac{1}{2}$ minimum.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
22. 8. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x - 5 < 0\} \quad \text{in} \quad B = \left\{ \frac{5n-1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pokaži, da je $B \subset A$.

2. [10]

- (a) [5] Definiraj limito zaporedja.
(b) [5] S splošnim členom podaj primer zaporedja, katerega limita je enaka 2.

3. [10]

- (a) [5] Zapiši definicijo tangente v točki a na graf odvedljive funkcije f .
(b) [5] Podaj primer funkcije, ki ima v neki točki tangento vzporedno z osjo x .

4. [10] Navedi in dokaži izrek ki pove, kdaj je funkcija naraščajoča.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II**Računski del****24. 8. 2017****Navodila:**

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Izračunaj

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Namig: nova spremenljivka $t = \frac{1}{x+1}$; dalje glej vaje.2. [15] Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije f , $f(x) = \frac{1+\sin x}{2+\sin x}$, med dvema zaporednima lokalnima minimumoma.Namig: opazujemo na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$; posledično

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{2+\sin x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 1 - \frac{1}{2+\sin x} dx.$$

Nadaljuj z univerzalno substitucijo.

3. [15] Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y' - y^2 e^x + 2e^{-x} = 0.$$

Namig: Riccatijeva DE; opazimo, da je $y_P = e^{-x}$ in posledično je nastavek $y = z + e^{-x}$. Prevedemo na Bernoullijeva DE $z' - 2z = z^2 e^x$.4. [15] Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: za vnaprej izbran $n \in \mathbb{N}$, je $\det(A) = \frac{1}{7}(4^{n+1} + (-3)^{n+1})$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
24. 8. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Na množici pravokotnih matrik reda $n \times m$, M_{nm} , definiramo operacijo seštevanja na sledeč način:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + 2(B^T)_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Ali je $(M_{nm}, +)$ Abelova grupa?

Utemelji odgovor.

2. **[10]** Podaj primer 3×3 sistema linearnih enačb, ki
- (a) **[5]** ima neskončno rešitev,
 - (b) **[5]** nima rešitve.
3. **[10]** Ali je lahko poljubna spodnja Riemannova vsota večja od katere zgornje Riemannove vsote?
Utemelji oz. dokaži odgovor.
4. **[10]** Izpelj metodo variacije konstant za iskanje partikularne rešitve linearne diferencialne enačbe 3. reda s konstantnimi koeficienti.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
24. 8. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Izračunaj

$$\int \frac{\sin(2x)}{1 + \sqrt{1 + \sin x}} dx.$$

Rešitev: $\int \frac{\sin(2x)}{1 + \sqrt{1 + \sin x}} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sqrt{1 + \sin x}} dx = \int \frac{2(t-1)}{1 + \sqrt{t}} dt = \int \frac{2(t-1)(1-\sqrt{t})}{1-t} dt = \int 2(\sqrt{t} - 1) dt = \frac{4}{3}(\sin x + 1)^{\frac{3}{2}} - 2(\sin x + 1).$

2. [15] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem krivulje $y = \sqrt{\ln(4 - x^2)}$ okoli abscisne osi.

Rešitev: $V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2) dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \ln(4 - x^2) dx = -2\sqrt{3} + 4 \ln(2 + \sqrt{3}).$

3. [15] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' = 2x \left(\frac{y}{x^2 + 1} + 4\sqrt{y} \right).$$

Rešitev: Bernoullijeva DE, $y = (C\sqrt{x^2 + 1} + 4(x^2 + 1))^2.$

4. [15] Ali obstajajo realna števila a za katera sistem

$$\begin{aligned} ax - y + z &= 1 \\ -x - y + z &= 1 \\ -2y + az &= -a \end{aligned}$$

nima rešitve? Če obstajajo, jih poišči

Rešitev: če je $a = 2$, tedaj sistem nima rešitve.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
24. 8. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- (a) [5] Definiraj lastno vrednost in lastni vektor kvadratne matrike A .
- (b) [5] Ali lahko ima matrika reda 2 eno samo lastno vrednost? Utemelji odgovor.

2. [10] Podaj primer 3×3 sistema linearnih enačb, ki

- (a) [5] ima neskončno rešitev,
- (b) [5] nima rešitve.

3. [10] Navedi in dokaži pravili za nedoločeno integriranje:

- (a) [5] $\int \frac{1}{x} dx =$
- (b) [5] $\int a^x dx =$

4. [10] Izpelj metodo variacije konstant za iskanje partikularne rešitve linearne diferencialne enačbe 2. reda s konstantnimi koeficienti.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III

Računski del

22. 8. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Med vsemi trikotniki z obsegom 4 poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

Namig: dva možna načina.

S pomočjo vezanega ekstrema

$$f(a, b, c, \lambda) = \sqrt{\frac{\mathcal{O}}{2} \left(\frac{\mathcal{O}}{2} - a\right) \left(\frac{\mathcal{O}}{2} - b\right) \left(\frac{\mathcal{O}}{2} - c\right)} - \lambda(\mathcal{O} - a - b - c),$$

ali pa da v Heronov brazec vstaviš vez in iščeš ekstrema funkcije dveh spremenljiv.

2. [15] S pomočjo definicijskega območja, zaloge vrednosti, nivojnic ter prerezov nad $x = \frac{\epsilon}{2}$ in $y = 0$ osjo nariši graf funkcije f ,

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{e^2}{4} + ex - x^2 - y^2 \right).$$

Če obstaja, poišči tudi zvezno razširitev funkcije f na \mathbb{R}^2 .Namig: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - \frac{\epsilon}{2})^2 + y^2 < \frac{\epsilon^2}{2}\}$, za prereze nariši ustrezne parabole, nivojnice so krožnice oziroma točka (opazuj kdaj je $e^a - \frac{\epsilon^2}{2} \geq 0$), za graf si pomagaj z WolframAlpha. Zvezna razširitev ne obstaja.

3. [15] Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ je glede na standardni bazi podana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) [10] Poišči eksplicitni predpis linearne transformacije \mathcal{A} ter ji poišči bazo jedra in bazo slike ter jima določi dimenzijo.
- (b) [5] Poišči predpis preslikave $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, če je $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}$, kjer je $\vec{a} = (0, -1, 0)$.

Rešitev: (a) $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_3 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \{(2, 1, 2)\}$, $\mathcal{B}_{\text{Im}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$;

(b) $(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_3 \\ -x_1 - x_3 & 0 \end{bmatrix}$.

4. **[15]** Naj bo $z \in \mathbb{C}$. Izračunaj

$$\int_0^{\infty} t (e^{t(3-z)} - e^{t(1-z)}) dt.$$

Rešitev: pomagamo si z Laplaceovo transformacijo

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t (e^{t(3-z)} - e^{t(1-z)}) dt &= \int_0^{\infty} t(e^{3t} - e^t)e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} te^{2t}(e^t - e^{-t})e^{-zt} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} te^{2t} \text{sh}(t) e^{-zt} dt = 2\mathcal{L}(te^{2t} \text{sh}(t))(z) = -2\mathcal{L}'(e^{2t} \text{sh}(t))(z) \\ &= -2 \left(\frac{1}{(z-2)^2 - 1} \right)' \end{aligned}$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
22. 8. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Naj bosta x, y koordinati v kartezičnem koordinatnem sistemu ter r polmer v polarnem koordinatnem sistemu. Izračunaj parcialna odvoda funkcije f , če je $f(r) = \ln(\cos(r^2 + 1))$.
2. **[10]**
 - (a) **[5]** Navedi in dokaži izrek o odvodu v dani točki implicitno podane funkcije.
 - (b) **[5]** Uporabi izrek iz točke a) na konkretnem primeru.
3. **[10]** Izpelji pravilo za Laplaceovo transformacijo drugega odvoda funkcije f .
4. **[10]**
 - (a) **[5]** Zapiši definicijo diagonalizabilnosti kvadratne matrike A reda n .
 - (b) **[5]** Dokaži trditev:
Če ima A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, tedaj je A diagonalizabilna.