

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I

Računski del

28. 8. 2018

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, kalkulator, ki ne izrisuje grafov, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Poišči vse $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$, za katera bo $|z| = 1$ in $\frac{z^4+1}{z^2+1} \in \mathbb{R}$. Vsa ta števila predstavi tudi v kompleksni ravnini.

Namig: upoštevaj lastnost $w \in \mathbb{R}$, če je $w = \bar{w}$.

2. [15] Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sh}(x+2)}} & ; \quad x < -2 \\ p(x) & ; \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+4\sqrt{x})}{\sqrt{x^2+4x}} & ; \quad x > 0, \end{cases}$$

kjer je p polinom prve stopnje. Ali obstaja tak p , da bo funkcija f zvezna na množici realnih števil? Če obstaja, poišči predpis polinoma p .

Namig: $\lim_{x \uparrow -2} f(x) = e^{-1}$, $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 2$; nadalje poišči $p(x) = ax + b$.

3. [15] Poišči vsa realna števila x , za katera konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2x-1)^n}.$$

Za vsak tak x izračunaj tudi vsoto vrste.

Namig: geometrijska vrsta; konvergira za vsak $x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$.

4. [15] Naj bosta $a, p > 0$. Lik \mathcal{L} v ravnini je določen s krivuljama $y^2 = 2px$ in $x = 2a$. Poišči pravokotnik z največjo ploščino, ki ga včrtamo lik \mathcal{L} in bosta stranici pravokotnika vzporedni s koordinatnima osema. Ploščino pravokotnika tudi izračunaj.

Namig: pomagaj si skico in funkcijo $f(x) = 2(2a-x)\sqrt{2px}$, kjer je x prva koordinata točke na paraboli.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
28. 8. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Na množici $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je definirana binarna operacija $*$ na sledeč način

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (a, b) * (c, d) = (ad + bc, ac - bd).$$

Poišči enoto za operacijo $*$ in nasprotni element od (a, b) .

2. [10] Naj bo dana množica $B = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Skonstruiraj bijektivno preslikavo $f : B \rightarrow \mathbb{N}$ (podana mora biti s predpisom).

3. [10]

(a) [5] Definiraj limito zaporedja (a_n) .

(b) [5] Podaj primer divergentne vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, če naj bo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ in $a_n \neq \frac{1}{n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

4. [10] Izpelji pravilo za odvod produkta dveh odvedljivih funkcij.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
28. 8. 2018

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, kalkulator, ki ne izrisuje grafov, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Poišči vsa kompleksna števila, ki zadoščajo pogoju

$$|z| = \frac{1}{|z|} = |z - 1|.$$

Namig: $z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. [15] Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n} + \sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2n}}.$$

Ali je zaporedje (a_n) omejeno? Utemelji!

Namig: limita je e^{-2} ; ker je zaporedje konvergetno, zato je tudi omejeno.

3. [15] Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{3}{x}.$$

Določi naravno definicijsko območje funkcije h , ki je definirana s prepisom $h(x) = \sqrt{f(g(f(x)))}$.

Namig: upoštevaj $\frac{4x-5}{x-8} \geq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -1$, $x \neq 0$

4. [15] Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$. Določi lokalne ekstreme funkcije f , intervale naraščanja in padanja funkcije f ter limiti $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$ in $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$.

Namig: f ima minimum pri $x = 2$ in maksimum pri $x = -1$; funkcija je naraščajoča na $(-\infty, 0)$ in $[2, \infty)$ ter je padajoča na $(0, 2]$; $\lim_{x \uparrow 0} f(x) = 0$ in $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \infty$.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
28. 8. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Naj bodo $z_1 = 1 + i$, $z_2 = i$ in $z_3 = 2$ kompleksna števila. Izpelj polarni zapis števila $\frac{z_1}{z_2 z_3}$ in ga nariši v kompleksni ravnini.
2. **[10]** Dokaži trditev:
Zaporedje z več kot enim stekališčem ni konvergentno.
3. **[10]** Izpelji pravilo za odvod razlike dveh odvedljivih funkcij.
4. **[10]**
 - (a) **[5]** Definiraj konveksnost realne funkcije f .
 - (b) **[5]** S predpisom podaj primer funkcije, ki je strogo padajoča in konveksna na celotnem definicijskem območju.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
30. 8. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*
- *Čas reševanja je 75 minut.*

1. [15] Izračunaj

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{e^x} dx.$$

Namig: upoštevaj $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ in formulo, ki je bila dokazana na vajah; $\frac{2}{5}$.

2. [15] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da lik, ki je določen s $4x^2 + y^2 \leq 25$, $y \geq x$ in $y \geq 1$, zavrtimo okoli

- (a) osi x ,
- (b) premice $x = \frac{5}{2}$.

Namig: natančno si nariši sliko in nato upoštevaj nalogo, kjer smo računali volumen torusa.

3. [15] Reši diferencialno enačbo

$$y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0.$$

Namig: Homogena DE; prepoznavaj $y' = \frac{-y}{2\sqrt{\frac{y}{x}} - 1}$.

4. [15] Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{bmatrix}.$$

Namig: $-\frac{n+1}{2}n^{n-1}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
30. 8. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Naj bosta A in B obrnljivi matriki. Dopolni in dokaži zvezo

$$(AB)^{-1} =$$

2. [10] Navedi in dokaži izrek, ki podaja zvezo med določenim in nedoločenim integralom.
3. [10] Dokaži izrek, ki pravi, da je monotona funkcija na zaprtem intervalu tudi integrabilna.
4. [10] V splošni obliki zapiši linearno (1. reda), Bernoullijevo in Riccatijevo diferencialno enačbo ter pri vsaki navedi en primer (ni ga potrebno rešiti).

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
30. 8. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*
 - **Čas reševanja je 75 minut.**
-

1. [15] Izračunaj

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}} dx.$$

Namig: vpelji novo spremenljivko $t^2 = 1 - x$.

2. **[15]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije f , $f(x) = e^{2x} - 3 + 2e^{-2x}$, med ničloma funkcije f .

Namig: ničle poiščemo naslednji način: $e^{2x} - 3 + 2e^{-2x} = 0$ kar je ekvivalentno $e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0$ oziroma $(e^{2x} - 1)(e^{2x} - 2) = 0$. Posledično so ničle 0 in $\frac{\ln 2}{2}$. V nadaljevanju izračunaj $V = \pi \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} (e^{2x} - 3 + 2e^{-2x})^2 dx$.

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Namig: Homogena DE; prepoznavaj $y' = \frac{3y}{2x} - \frac{1}{2} \frac{x}{y}$.

4. **[15]** Reši matrično enačbo

$$AX^T - B = 0,$$

kjer je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešitev: vsaka matrika oblike $X = \begin{bmatrix} 1-e & c & e & -2e \\ -f & d & f & 1-2f \end{bmatrix}$, kjer $c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
30. 8. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] V splošni obliki zapiši homogeno, linearno (1. reda) in Bernoullijevo diferencialno enačbo ter pri vsaki navedi en primer (ni ga potrebno rešiti).
2. [10] Dokaži pravilo:

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

3. [10] Definiraj in geometrijsko prikaži Riemmanovo integralsko vsoto funkcije f , ki je omejena na $[a, b]$.
4. [10] Naj bosta A in B kvadratni matriki reda n . Dopolni in dokaži zvezo

$$(AB)^T =$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
28. 8. 2018

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{xy}+1}.$$

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga natanačno skiciraj.
(b) Lineariziraj funkcijo f v točki $(4, 1)$.

Namig: glej pogoja $x-y \geq 0$, $xy \geq 0$; pomagaj si z Wolfram alpha.

2. [15] S pomočjo razvoja funkcije $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$, v Fourierjevo vrsto izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}.$$

Namig: opazimo, da je funkcija soda; $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos(nx) dx$ (izračunaj s pomočjo per-partesa).

3. [15] Poišči ekstreme funkcije f , ki je podana s predpisom $f(x, y) = \cos^2 x + \sqrt{3} \cos^2 y$, pri pogoju $y - x = \frac{\pi}{4}$.

Namig: vezani ekstrem; $F(x, y, \lambda) = \cos^2 x + \sqrt{3} \cos^2 y - \lambda(y - x - \frac{\pi}{4})$. Sedaj si pomagamo s prvimi odvodi. Za rešitev sistema si pomagaj z adicijskimi izreki.

4. [15] Določi eksplicitni predpis linearne preslikave, ki jo rodi zrcaljenje čez ravnino $x + y - z = 0$ v prostoru \mathbb{R}^3 . Določi tudi bazo jedra in bazo slike te preslikave.

Namig: opazimo, da se vektor $(1, -1, 0)$ slika v $(1, -1, 0)$, vektor $(0, 1, 1)$ v $(0, 1, 1)$ in vektor $(1, 1, -1)$ v $(-1, -1, 1)$. Sedaj ni več težko poiskati eksplicitni predpis zelene preslikave.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
28. 8. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[5]** Podaj konkretni primer vektorskega polja \mathbf{F} ter izračunaj $\text{grad}\langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle$.
2. **[15]** Naj bo \mathcal{V} vektorski prostor.
 - (a) **[5]** Definiraj lastno vrednost in lastni vektor linearne preslikave $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$.
 - (b) **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki povezuje diagonalizabilnost matrike A z lastnimi vrednostmi preslikave f_A .
3. **[10]**
 - (a) **[5]** Definiraj vektorski prostor \mathcal{V} nad obsegom \mathcal{O} .
 - (b) **[5]** Ali je množica $\mathcal{W} = \{(0, y - 2, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ vektorski podprostor prostora \mathbb{R}^3 za običajno seštevanje in množenje s skalarjem? Odgovor utemelji.
4. **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki pove kdaj sta mešana parcialna odvoda funkcije $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ v točki (a, b) enaka.