UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
6. 2. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Poišči vsa naravna števila n, za katere velja

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

Resitev: pomagaj si s polarnim zapisom kompleksnih števil $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ in $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

2. **[10]** Ali je zaporedje (a_n), ki je podano rekurzivno

$$a_1 = \frac{9}{4},\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{9}{4}},$$

konvergentno? Utemelji!

Rešitev: je konvergentno, saj je padajoče in omejeno.

3. **[20]** Funkcija je podana s predpisom $f(x) = \sqrt{1 - \ln(4x - x^2)}$.

   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f.

   (b) Izračunaj $f \circ g$, če je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$.

   (c) Določi lokalne ekstreme funkcije f, če obstajajo.

Rešitev: $D_f = (0, 2-\sqrt{4-e}] \cup [2+\sqrt{4-e}, 4)$; $f \circ g : (-2, -\sqrt{2+\sqrt{4-e}}, 2] \cup [-\sqrt{2-\sqrt{4-e}}, 0) \cup (0, \sqrt{2-\sqrt{4-e}}] \cup [\sqrt{2+\sqrt{4-e}}, 2)$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{1-\ln(4x^2-x^4)}$; samo na robu D_f: minimuma $x_1 = 2-\sqrt{4-e}$ in $x_2 = 2+\sqrt{4-e}$, s pomočjo $f'(x) = 0$ dobimo $x = 2$, ampak to v ni D_f.

4. **[15]** Razvij funkcijo $f(x) = x\sin(-x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x = 0$ in določi njeno konvergenčno območje. Rešitev: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-1)!}$, za vsak $x \in \mathbb{R}$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
6. 2. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Naj množici $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0,0)\}$ naj bo definirana operacija množenja $\cdot$ na naslednji način:

$$(a,b) \cdot (c,d) = (bd, ac)\,.$$

   Za $(A, \cdot)$ poišči enoto in nasprotni element.

2. **[10]** Dokaži izrek, ki pravi, da vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu doseže minimum.

3. **[10]** Po definiciji odvoda izpelji odvod funkcije $f(x) = \cos x$.

4. **[10]** Dana je funkcija $f(x) = |-x^2 + 4|$. Računsko določi intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
6. 2. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$|z-1| + (\mathcal{R}e(z-1))^2 i = 4 + 4i.$$

Rešitev: $z_1 = -3, z_2 = 1 + 4i, z_3 = 1 - 4i$.

2. **[10]** Izračunaj limito

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{6}}{\ln(4-x)}.$$

Rešitev: $-\frac{5}{2\sqrt{6}}$.

3. **[20]** Dana je funkcija $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^3 - x}}$.

   (a) Določi naravno deficijsko območje.

   (b) Ali ima funkcija lokalne ekstreme?

Rešitev: $D_f = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$; ni ekstremov.

4. **[15]** Izračunaj enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+x}\right) + 1$ v točki $T(0, y)$.

Rešitev: $y = x + 1$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
6. 2. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dana je množica $A = [-2, 7)$. Poišči naslednje množice
$$A \cap \mathbb{N},\ A \cup \mathbb{N},\ \mathbb{N} - A\,,\ A \cup (\mathbb{N} \cap \emptyset)\,.$$
2. **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki poveže konvergenco zaporedja s številom njegovih stekališč.
3. **[10]** Po definiciji odvoda izpelji odvod funkcije $f(x) = x^3$.
4. **[10]** Dana je funkcija $f(x) = |-x^2 + 4|$. Določi intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
4. 2. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Izračunaj obseg lika, ki ga določata krivulji $x = y^2 - 1$ in $y = x - 1$.

   Rešitev: izračunaj integrala $\int_{-1}^{2} \sqrt{2}\, dy$ in $\int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$.

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y''' - 2y'' + 5y' = 2\sin(3x)\sin(x).$$

   Rešitev: $y_S = y_H + y_P$; $y_H = C_1 + e^x(C_2\cos(2x) + C_3\sin(2x))$; za partikularni del najprej upoštevamo, da je $2\sin(3x)\sin(x) = -\cos(4x) + \cos(2x)$ in zato je nastavek za partikularno rešitev $y_P = A\sin(4x) + B\cos(4x) + C\sin(2x) + D\cos(2x)$.

3. Za katera realna števila a sistem

$$\begin{aligned} x + (a-1)y - z &= a \\ ax + y - 2z &= 0 \\ x - 2y + az &= -1 \\ 2x + y + aw &= 3 - a \end{aligned}$$

   nima enolične rešitve? V teh primerih rešitev tudi poišči.

   Rešitev: $\mathrm{Det}(A) = 0$, ko je $a = 0$ (protisloven sistem), $a = 1$ (protisloven sistem), $a = -1$ (parametrična rešitev).

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
4. 2. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dokaži pravilo:

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C\,.$$

2. **[15]** Za poljubni delitvi $D \subseteq D'$ intervala $[a, b]$ izpelji odnos med obema spodnjima in zgornjima Riemannovima vsotama dane omejene funkcije f (Riemannove vsote uredi po velikosti).

3. **[5]** Podaj primer nehomogene diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti, ki jo lahko rešimo s pomočjo nastavka (poišči tudi pripadajoči nastavek) in pa primer diferencialne enačbe istega tipa, ki se ne da rešiti s pomočjo nastavka.

4. **[10]** Podaj primer homogenega sistema linearnih enačb reda 3, ki ima enoparametrično družino rešitev in ga reši.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
4. 2. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{-x^2+3x-2}{x^2+4}}$ na defincijskem območju funkcije f.

   Rešitev: $\int_1^2 \frac{-x^2+3x-2}{x^2+4} dx = (-x + \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + \arctan\frac{x}{2})|_1^2$.

2. **[20]** Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$$

   pri pogoju $y(1) = 0$.

   Rešitev: Bernoullijeva DE, $z = y^{\frac{1}{2}}$, $z_S = Cx^2 + x^2 \ln x$.

3. **[20]** Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev: $\lambda_1 = 3$, $p_1 = (5,3,5)$, $\lambda_2 = -2$, $p_2 = (0,1,0)$, $\lambda_3 = -1$, $p_3 = (-1,1,3)$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
4. 2. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dokaži pravilo:
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C\,.$$
2. **[15]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo.
3. **[5]** Podaj primer nehomogene diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti, ki jo lahko rešimo s pomočjo nastavka (poišči tudi pripadajoči nastavek) in pa primer diferencialne enačbe istega tipa, ki se ne da rešiti s pomočjo nastavka.
4. **[10]** Podaj primer homogenega sistema linearnih enačb reda 3, ki ima enoparametrično družino rešitev in ga reši.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
Mathematica, WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
6. 2. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(\vec{v}) = \vec{x} \times \vec{v},$$

kjer je $\vec{x} = (1, 0, -1)$.

(a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna.

(b) Poišči jedro in sliko preslikave $\mathcal{A}$.

(c) Preslikava $\mathcal{A}$ je podana glede na standarno bazo. Poišči preslikavo, ki pripada $\mathcal{A}$ glede na bazo $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Rešitev: $\mathcal{A}(v_1, v_2, v_3) = (v_2, -v_1 - v_3, v_2)$; je linearna; $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(f)} = \{(1, 0, -1)\}$, $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(f)} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$; $\overline{\mathcal{A}}(v_1, v_2, v_3) = (2v_2 + v_3, -v_2 - v_3, 3v_2 + v_3)$.

2. **[20]** V $\mathbb{R}^3$ poišči kvader z največjim volumnom, za katerega velja, da ima tri ploskve na koordinatnih ravninah, eno oglišče pa ima na rotacijskem paraboloidu $z = 4 - x^2 - y^2$. Koliko je volumen tega kvadra?

Rešitev: $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$ in volumen je enak 2.

3. **[20]** Funkcijo f,

$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 - x^2 & ; \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \quad ; & \pi \leq x \leq 4, \end{cases},$$

za katero velja $f(-x) = f(x)$ razvij v Fourierjevo vrsto.

Rešitev: $a_0 = \frac{\pi^3}{6}$, $a_n = 16(\frac{4}{n^3\pi^3}\sin(\frac{n\pi^2}{4}) + \frac{1}{n^2\pi}\cos(\frac{n\pi^2}{4}))$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
6. 2. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[15]**
   (a) **[10]** Dokaži izrek ki pravi, da lahko vsaki linearni transformaciji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ priredimo matriko A tako, da je $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
   (b) **[5]** Poišči matriko zrcaljenja čez premico $y = -x$ v $\mathbb{R}^2$.
2. **[10]** Navedi in dokaži pravilo o odvajanju funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$, kjer sta spremenljivki x in y odvisni od parametrov s, t in r.
3. **[5]** Dokaži linearnost operacije divergence na vektorskih poljih.
4. **[10]** S pomočjo Laplaceove transformacije glede na spremenljivko t prevedi dano parcialno diferencialno enačbo na navadno diferencialno enačbo:
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = x + 1\,,$$
   če je $u(x,0) = 2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 3, u(0,t) = 4, u(x,t) < \infty\,.$

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
5. 2. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}(\vec{v}) = \vec{x} \times \vec{v},$$
kjer je $\vec{x} = (1, 0, -1)$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna.
   (b) Preslikava $\mathcal{A}$ je podana glede na standarno bazo. Poišči preslikavo, ki pripada $\mathcal{A}$ glede na bazo $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

   Rešitev: podobno kot 1. naloga pri predmetu Matematika III.

2. **[20]** Dana je funkcija $f(x, y) = \ln(3 - x^2 - 2x - y^2)$.
   (a) Izračunaj naravno defincijsko območje funkcije f in ga skiciraj.
   (b) Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f.

   Rešitev: D_f je odprt krog $(x - 1)^2 + y^2 < 4$; maksimum v $T(1, 0)$.

3. **[15]** Funkcijo f,
$$f(x) = \begin{cases} \pi^2 - x^2 & ; \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \quad ; & \quad \pi \leq x \leq 4, \end{cases},$$
za katero velja $f(-x) = f(x)$ razvij v Fourierjevo vrsto.

   Rešitev: podobno kot 3. naloga pri predmetu Matematika III.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
4. 2. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[15]** Naj bo $\mathcal{V}$ končnorazsežen vektorski prostor dimenzije n in naj bo $\mathcal{V}'$ poljuben vektorski prostor. Dokaži, da če je $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ baza prostora $\mathcal{V}$ in $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ poljubna množica vektorjev iz $\mathcal{V}'$, tedaj obstaja natanko ena linerana transformacija $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ taka, da je
$$f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \; \forall i = 1, \ldots, n\,.$$

2. **[15]** Definiraj lokalni ekstrem funkcije f dveh spremenljivk in dokaži zadostni pogoj za obstoj lokalnega maksimuma (odvedljive) funkcije f v točki (a, b).

3. **[20]** Izpelji naslednji pravili Laplaceove transformacije:

   (a) **[10]** $\mathcal{L}(e^{a\,t} f(t))(z)$

   (b) **[10]** $\mathcal{L}(f''(t))(z)\,.$