Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
7. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Nad množico kompleksnih števil reši enačbo

$$(1+z)^n - i(1-z)^n = 0.$$

Za vsako od rešitev zapiši tudi $\mathcal{R}\mathrm{e}(z)$.

Namig: enačbo preoblikujemo v

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n = i$$

in si pomagamo z uvedbo $w = \frac{1+z}{1-z}$ ter rešimo $w^n = i$.

2. **[15]** Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} & ; \quad x \geq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & ; \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & ; \quad x \geq -1 \\ \sqrt{-x} - 3 & ; \quad x < -1 \end{cases}.$$

(a) Izračunaj $g \circ f$ in $f \circ g$.

(b) Izračunaj $\lim\limits_{x \to -\infty} x(1 - f(x))$.

Namig: (a) glej razlago iz vaj; (b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x(1 - f(x)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -1$.

3. **[15]** Zaporedje delnih vsot (s_n) vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je podano s splošnim členom

$$s_n = 1 + \frac{n^2}{1 + 2 + 3 + \ldots + n}.$$

Določi splošni člen zaporedja (a_n) in ugotovi, ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna. Če je konvergentna, izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: $a_n = s_n - s_{n-1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Torej, $a_1 = 2$ in $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2}{n^2+n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Vrsta konvergira, saj je $\lim_{n\to\infty} s_n = 3$.

4. **[15]** Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = \sqrt[3]{3x - x^3}$.

   (a) Poišči vse točke v katerih je funkcija f zvezna in ni odvedljiva.

   (b) Poišči vse točke na grafu funkcije f, za katere velja, da tangenta na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ poteka skozi koordinatno izhodišče.

Rešitev: (a) poišči točke kjer $f'(x)$ ni definiran: $x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$; (b) glej vaje; reši enačbo $\sqrt[3]{3x - x^3} = \dfrac{x - x^3}{(\sqrt[3]{3x - x^3})^2}$.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
7. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Na množici $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je definirana binarna relacija $\oplus$:

$$\forall (a,b),(c,d) \in A:\ (a,b) \oplus (c,d) = (a+c, |b-d|)\,.$$

Ali je $(A, \oplus)$ grupa? Utemelji odgovor.

2. **[5]** Podaj primer zaporedja (a_n), ki zadošča naslednjim trem pogojem:

(i) (a_n) konvergira k 0,

(ii) za vsak $n \in \mathbb{N}$: $a_n \neq \frac{c}{n}$, $c \in \mathbb{R}$,

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

3. **[10]** Po definiciji odvoda izpelji odvod funkcije f, $f(x) = \cos x$.

4. **[15]** Naj bo p trditev, da je c stacionarna točka odvedljive funkcije f ter q trditev, da ima funkcija f v točki c lokalni ekstrem. Če katera od spodnjih trditev velja jo dokaži, v nasprotnem jo ovrži s protiprimerom.

(a) $\neg q \Rightarrow \neg p$,

(b) $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
7. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Nad množico kompleksnih števil reši enačbo

$$|z^2+1|+i(z+\bar{z})=\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{5i}{1+2i}\right).$$

Rešitev: $z_1=\sqrt{3}i$, $z_2=-\sqrt{3}i$.

2. **[15]** Funkcija g je podana s predpisom

$$g(x)=\begin{cases} x^2-x & ; \quad x\geq 0 \\ 1-e^{2x} & ; \quad x<0 \end{cases}.$$

(a) Skiciraj graf funkcije g.

(b) Izračunaj $g\circ f$, če je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\pi-\arctan(x)$.

(c) Izračunaj $\lim\limits_{x\uparrow 0}\dfrac{g(x)}{x}$.

Rešitev: (a) pomagaj si z WolframAlpha; (b) $g(f(x))=(2\Pi-\arctan x)^2-2\Pi+\arctan x$; (b) $\lim\limits_{x\uparrow 0}\dfrac{g(x)}{x}=-2$.

3. **[10]** Poišči intervale naraščanja in padanja funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x)=\sqrt[3]{x-x^3}$.

Rešitev: narašča na $(-\infty,-\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\infty)$, pada na $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$.

4. **[15]** Izračunaj enačbo tangente na krivuljo

$$(x^2+x+y)^2=x+3y$$

v točki $T(0,3)$. Izračunaj pod katerim kotom le-ta seka os y.

Rešitev: funkcijo odajamo implicitno; smerni koeficient je enak -1.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
7. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Podaj primer zaporedja (a_n), ki zadošča naslednjima pogojema:

   (i) (a_n) konvergira k številu 2,

   (ii) (a_n) ni monotono.

2. **[10]** Navedi vse lastnosti zaradi katerih so realna števila obseg.

3. **[15]**

   (a) **[5]** Definiraj eksponentno funkcijo, poišči njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.

   (b) **[5]** Po definiciji odvoda izpelji odvod eksponentne funkcije.

   (c) **[5]** Ali je eksponentna funkcija konveksna oz. konkavna? Utemelji odgovor.

4. **[10]** Naj bo q trditev, da je c stacionarna točka odvedljive funkcije f ter p trditev, da ima funkcija f v točki c lokalni ekstrem. Dokaži trditev: $p \Rightarrow q$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
13. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Ali konvergira integral
$$\int_0^e \frac{x}{\sqrt{|\ln x - 1|}}\mathrm{d}x?$$
Če konvegira, ga izračunaj, sicer utemelji zakaj divergira.
Rešitev:
$$\int_0^e \frac{x}{\sqrt{|\ln x - 1|}}\mathrm{d}x = \int_0^e \frac{x}{\sqrt{1-\ln x}}\mathrm{d}x \overset{t=1-\ln x}{=} e^2\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-2t}\,\mathrm{d}t.$$
Dalje si pomagaj s funkcijo Γ.

2. **[15]** Krivulja $\mathcal{L}$, ki je podana z enačbo $2x+1=y^2$, razdeli krog $\mathcal{K}$, ki je določen z neenačbo $x^2+y^2\le 4$, na dva dela. Izračunaj razmerje ploščin nastalih delov kroga $\mathcal{K}$ pri delitvi s krivuljo $\mathcal{L}$. Nariši tudi pripadajočo skico.
Namig: izračunaj
$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x.$$

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo
$$y' = y + x(y')^2.$$
Namig: Lagrangeova DE; $y = -x(y')^2 - y'$.

4. **[15]** Naj bo $n\in\mathbb{N}$ in naj bodo $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Izračunaj determinanto matrike $A\in M_n(\mathbb{R})$
$$A = \begin{bmatrix} 1+x_1 & 1+2x_1 & 1+3x_1 & \dots & 1+(n-1)x_1 & 1+nx_1 \\ 1+x_2 & 1+2x_2 & 1+3x_2 & \dots & 1+(n-1)x_2 & 1+nx_2 \\ 1+x_3 & 1+2x_3 & 1+3x_3 & \dots & 1+(n-1)x_3 & 1+nx_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1+x_{n-1} & 1+2x_{n-1} & 1+3x_{n-1} & \dots & 1+(n-1)x_{n-1} & 1+nx_{n-1} \\ 1+x_n & 1+2x_n & 1+3x_n & \dots & 1+(n-1)x_n & 1+nx_n \end{bmatrix}.$$

Rešitev: prvi stolpec odštejemo od vseh preostalih. V odvisnosti od $n \in \mathbb{N}$ dobimo naslednje možnosti:

$$\det(A) = \begin{cases} 1 + x_1 \quad ; & n = 1 \\ x_2 - x_1 \quad ; & n = 2 \\ 0 \quad ; & \text{sicer} \end{cases} .$$

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
13. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Utemelji, zakaj obrnljive matrike ne tvorijo algebrske strukture obsega za običajni operaciji seštevanja in množenja matrik.

2. **[15]**

   (a) **[10]** Dokaži, da za omejeno funkcijo f in delitvi D in D', $D \subseteq D'$, velja

   $$s_D(f) \leq s_{D'}(f) \leq S_{D'}(f) \leq S_D(f)\,.$$

   (b) **[5]** Katera posledica sledi iz te trditve?

3. **[15]** Dana je linearna diferencialna enačba

   $$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2\,.$$

   Dokaži, da če je λ_0 trojna ničla karakterističnega polinoma, tedaj je ena od rešitev diferencialne enačbe oblike $y = e^{\lambda_0 x}x^2$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
13. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj

   (a) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

   Namig: (a) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \overset{t=\cos x}{=} \ldots$; (b) $\displaystyle\int \frac{x-1}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int (x-1)e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ in upoštevamo formulo za per-partes.

2. **[15]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenem grafa funkcije f, $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-4}$, okoli osi x v prvem kvadrantu.

   Namig: pomagaj si s parcialnimi ulomki; $V = \frac{1}{32}(\ln(\frac{5}{3}))$.

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo

   $$y''' + 16y' = \sin x \cos x.$$

   Rešitev: $y_H = C_1 + C_2\cos(4x) + C_3\sin(4x)$, partikularni del si pomagamo z dejstvom, da je $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, ter nastavkom $y_P = A\sin(2x) + B\cos(2x)$.

4. **[15]** Reši matrično enačbo

   $$(XA)^T - 2A = (2X - B)^T,$$

   kjer je

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Namig: glej vaje (poglavje Inverz matrike).

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
13. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dopolni in izpelji formulo, ki velja za obrnljivi matriki A in B:

$$(A\,B)^{-1} =$$

2. **[10]** Opiši univerzalno substitucijo za integracijo funkcij, ki so kombinacija trigonometričnih funkcij sinus in kosinus.

3. **[10]** Navedi in dokaži pravilo za izračun nedoločenega integrala razlike dveh funkcij.

4. **[10]** Navedi primer Bernoullijeve diferencialne enačbe za $\alpha = 3$ in jo z vpeljavo ustrezne nove spremenljivke prevedi na linearno diferencialno enačbo.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
7. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{y}+1}{x}\right).$$

(a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga nariši.

(b) Izračunaj odvod funkcije f v točki $T_1(6,4)$ v smeri točke $T_2(10,1)$.

Namig: (a) reši neenačbo $-1 \leq \frac{\sqrt{y}+1}{x} \leq 1$; (b) glej vaje.

2. **[15]** V kateri točki elipse $x^2+4y^2=1$ njena tangenta oklepa s koordinatnima osema trikotnik najmanjše ploščine?

Rešitev: najprej izračunamo enačbo tangente v točki (x_0,y_0): $y = -\frac{x_0}{4y_0}x + \frac{1}{4x_0}$. Posledično se plošina trikotnika izraža kot $pl = \frac{1}{4x_0y_0}$. Nadalje, gledamo na vezani ekstrem

$$f(x,y,\lambda) = \frac{1}{4xy} - \lambda(x^2+4y^2-1).$$

Na podlagi $x^2 = \frac{1}{2}$ in $8y^2 = 1$ dobimo štiri rešitve.

3. **[20]** Na bo $M_2(\mathbb{R})$ opremljen z bazo $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Linearna tranformacija $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je podana glede na bazo $\mathcal{B}$ na naslednji način

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ glede na

- bazo $\mathcal{B}$,
- standardno bazo $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Izračunaj $\mathcal{F} \circ \mathcal{A}$, če je $\mathcal{F} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$,

$$\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (c-b)x^2 + ax + d - b.$$

Nadalje, za $\mathcal{F} \circ \mathcal{A}$ poišči tudi bazo jedra in bazo slike. (Opomba: $\mathcal{A}$ gledamo glede na bazo $\mathcal{B}$.)

Namig: (a) glej vaje; (b) $(\mathcal{F} \circ \mathcal{A})\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (b-a)x^2 + (c-a)$ in iz tega izpeljemo jedro ter sliko.

4. **[10]** Reši diferencialno enačbo

$$y'(x) = 3x - \int_0^x (x-t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

pri pogoju $y(0) = 0$.

Rešitev: upoštevamo Laplaceovo transformacijo in dobimo

$$zY = \frac{1}{z^2} - \frac{Y}{z^2}$$

oziroma

$$Y = \frac{1}{z^3+1}.$$

S pomočjo parcialnih ulomkov in $\mathcal{L}^{-1}$ dobimo rešitev enačbe.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
7. 2. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
   (a) **[5]** Poišči $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f)$.
   (b) **[5]** Kje ležijo točke v $\mathbb{R}^3$, ki zadoščajo enačbi $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = 0$, če je $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x^2$?

2. **[10]** Izpelji pravili Laplaceove transformacije:
   (a) **[5]** $\mathcal{L}(f(at))(z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))(\frac{z}{a})\,,\ a > 0\,,$
   (b) **[10]** $\mathcal{L}(f''(t))(z) = z^2\mathcal{L}(f(t))(z) - z\,f(0) - f'(0)\,.$

3. **[10]** Izpelji Gram-Schmidtov ortogonalizacijski postopek za iskanje ortogonalne baze n-razsežnega vektorskega prostora.

4. **[10]**
   (a) **[5]** Pojasni kdaj je matrika diagonalizabilna.
   (b) **[5]** Naj bo A nediagonalizabilna matrika reda 4. Kaj lahko poveš o lastnih vrednostih in pripadajočih lastnih vektorjih matrike A?