Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
7. 2. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Poišči vse kompleksne rešitve enačbe
$$z^8 - 4z^7 + 5z^6 + 8z^2 - 32z + 40 = 0.$$
Rešitev: za $k = 0, \dots, 5$, $z_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\right)$, $z_6 = 2 - i$, $z_7 = 2 + i$.

2. **[10]** Zaporedje (a_n) je podano na naslednji način:
$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{n + a_n}.$$
Ali je zaporedje konvergentno? Utemelji!
Rešitev: ne.

3. **[20]** Funkciji f in g sta podani s predpisoma
$$f(x) = -1 - \sqrt{\frac{x}{x^4-4}} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \ln(x^2+8) & ; \quad x \geq -1 \\ \frac{4}{\pi}\arctan(\frac{1}{x^2}) + 2 & ; \quad x < -1 \end{cases}.$$
   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f.
   (b) Skiciraj graf funkcije g
   (c) Če obstajata, izračunaj $g \circ f$ in $f \circ g$.

   Rešitev: (a) $D_f = (-\sqrt{2}, 0] \cup (\sqrt{2}, \infty)$; (b) pomagaj si z Wolfram Alpha;
   (c) $(g \circ f)(x) = \begin{cases} \ln 8 & ; \quad x = 0 \\ \frac{4}{\pi}\arctan(\frac{1}{(-1-\sqrt{\frac{x}{x^4-4}})^2}) + 2 & ; \quad \text{sicer} \end{cases}$

4. **[15]** Med vsemi tangentami na graf funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, poišči enačbe vseh tisti, katere oklepajo z osjo x največji možni kot. Ta kot tudi izračunaj.
Rešitev: točki v katerih je izpolnjen pogoj sta $T_1(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ in $T_2(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$; smerna koeficienta pa sta $k_{1,2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{16}$; za izračunaj kota si pomagaj s $\tan(\varphi_{1,2}) = k_{1,2}$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
7. 2. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj injektivnost in surjektivnost preslikave $f : A \to B$.

   (b) **[5]** S predpisom podaj primer surjektivne preslikave $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

2. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj limito zaporedja in podaj primer konvergentnega zeporedja.

   (b) **[5]** Definiraj stekališče zaporedja in podaj primer zaporedja s tremi stekališči.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Navedi Lagrangeov izrek.

   (b) **[5]** Navedi dve trditvi, ki se dokažeta z uporabo Lagrangeovega izreka. (Opomba: izrekov oz. trditev ni potrebno dokazat.)

4. **[10]** Naj bo q trditev, da je $f(x)'' < 0$ za vsak $x \in I$ ter p trditev, da je funkcija f konkavna na I. Ena od naslednjih dveh izjav je resnična:

   (i) $p \Rightarrow q$,

   (ii) $q \Rightarrow p$.

   Dokaži tisto izjavo, ki je resnična.

Vpisna številka   Priimek, ime   WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
7. 2. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Naj bo $z \in \mathbb{C}$. Reši enačbo
$$|1+iz| + (z+i)^2 = 0.$$
Rešitev: $z = 0$.

2. **[15]** Funkciji f in g sta podani s predpisoma
$$f(x) = \begin{cases} -2 & ; \quad x \geq 3 \\ -\sqrt{3-x} - 3 & ; \quad x < 3 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad x \geq -1 \\ \frac{3x-1}{x} & ; \quad x < -1 \end{cases}.$$
Izračunaj $g \circ f$ in $f \circ g$ ter skiciraj $f \circ g$.
Rešitev: $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -5 & ; \quad x \geq -1 \\ -2 & ; \quad x < -1 \end{cases}$ $(g \circ f)(x) = \begin{cases} \frac{7}{2} & ; \quad x \geq 3 \\ \frac{3(-\sqrt{3-x}-3)-1}{-\sqrt{3-x}-3} & ; \quad x < -1 \end{cases}$

3. **[20]** S pomočjo prvega odvoda skiciraj graf funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2+x}$ (določi naravno definicijsko območje, ničle, obnašanje na robu naravnega definicijskega območja, ekstreme, intervale naraščanja in padanja).
Rešitev: $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1, 0\}$, ničel ni, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\uparrow -1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\downarrow -1} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$; lokalni maksimum $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, lokalni minimum $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; naraščajoča na intervalih $(-\infty, 0), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}], [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$, padajoča na intervalih $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

4. **[10]** Izračunaj enačbo normale na krivuljo, ki je podana z enačbo
$$(x+y)^{10} = x - y,$$
v točki $T(1,0)$. Izračunaj pod katerim kotom le-ta seka os x.
Rešitev: pomagamo si z odvodom implicitno podane funkcije: $10(x+y)^9(1+y') - 1 + y' = 0$. Sledi $y' = \frac{1-10(x+y)^9}{1+10(x+y)^9}$ in posledično je smerni koeficient tangente v točki $T(1,0)$ enak $-\frac{9}{11}$. Zato je smerni koeficient normale v točki $T(1,0)$ enak $\frac{11}{9}$ (normala in kot sledita direktno).

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
7. 2. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bo z kompleksno število.

   (a) **[5]** Izpelji polarni zapis števila z.

   (b) **[5]** Poišči polarni zapis števila $z\overline{z}^3$.

2. **[10]**

   (a) **[5]** Podaj primer konvergentnega zeporedja katerega limita je enaka -2.

   (b) **[5]** Definiraj stekališče zaporedja in podaj primer zaporedja z dvema stekališčema.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Naj bo $f(x) = a^x$ eksponentna funkcija. Vpelji njej inverzno oz. obratno funkcijo f^{-1} (poišči predpis, definicijsko območje in zalogo vrednosti).

   (b) **[5]** Za katere a je f^{-1} padajoča funkcija? Utemelji odgovor.

4. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bo f dvakrat odvedljiva funkcija in c njena stacionarna točka. Če je $f''(c) < 0$, tedaj ima f v točki c lokalni maksimum.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
31. 1. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}\mathrm{d}x.$$

Namig: pomagaj si z novo spremenljivko $t^2 = \frac{x-1}{x}$.

2. **[15]** Izračunaj

$$\int_0^\infty x^2 \cdot 3^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Namig: $\int_0^\infty x^2 \cdot 3^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x^2 \ln 3}\mathrm{d}x$; vpelji novo spremenljivko $t = x^2 \ln 3$ in uporabi funkcijo Gama.

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo

$$xy' = x^4(y-x)^2 + y.$$

Rešitev: Riccatijeva DE; $y_P = x$; $y_S = x + \frac{5x}{5C - x^5}$, kjer je $C \in \mathbb{R}$.

4. **[15]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Namig: pomagamo si z rekurzijo (npr. najprej razvijemo po prvi vrstici, nato še po prvem stolpcu); $D_n = \det(A) = -3D_{n-1} + 10D_{n-2}$. Nato rešimo enačbo $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$ in dobimo nastavek $D_n a(-5)^n + b2^n$. Opazimo $D_1 = -3$ in $D_2 = 19$, zato je $\det A = \frac{(-1)^n 5^{n+1} + 2^{n+1}}{7}$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
31. 1. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Podaj primer linearne diferencialne enačbe drugega reda z nekonstantnimi koeficienti in na kratko opiši postopek njenega reševanja (ni potrebno rešiti diferencialne enačbe).

2. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj nedoločeni integral omejene funkcije f.

   (b) **[5]** Naj bo $a > 0$. Dokaži formulo za nedoločeno integriranje:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

3. **[10]** Izpelji formulo za računanje ločne dolžine omejene funkcije f na intervalu $[a, b]$.

4. **[10]** Ob upoštevanju zveze $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$, kjer sta X in Y obrnljivi matriki, pokaži, da za poljubno matriko A reda n in diagonalno matriko D z diagonalnimi elementi $(D)_{ii} = d_i$, $i = 1, \ldots, n$, velja zveza:

$$((AD)^{-1})_{ij} = \frac{1}{d_i}(A^{-1})_{ij}\,,\ i, j = 1, \ldots, n\,.$$

UM FKKT, Bolonjski visokošolski program Kemijska tehnologija

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
31. 1. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Izračunaj

   (a) $\displaystyle\int \ln(x^3+4x)\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}\,\mathrm{d}x$.

   Namig: (a) per-partes: $\int \ln(x^3+4x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x^3+4x) - \int \frac{x(3x^2+4)}{x(x^2+4)}\mathrm{d}x = x\ln(x^3+4x) - \int \frac{3(x^2+4)-8}{x^2+4}\mathrm{d}x = x\ln(x^3+4x) - 3x + 4\arctan\frac{x}{2} + C$, kjer je $C \in \mathbb{R}$;

   (b) več možnosti: ena od teh je nova spremenljivka $t = e^{-x}$.

2. **[10]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije f, $f(x) = \sqrt{1-x^2} + x$.

   Rešitev: $V = 2\pi\int_0^1(\sqrt{1-x^2}+x)^2\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1(1+2x\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x = \frac{10}{3}\pi$.

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo

$$2xyy' - y^2 + x^2\sin^2 x = 0.$$

   Namig: Bernoullijeva DE; $u = y^2$.

4. **[15]** V odvisnosti od parametra $a \in \mathbb{R}$ reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax + y - z &= 1 \\ -x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= a. \end{aligned}$$

   Namig: več načinov; npr. izračunamo $\det A = 2 - a - a^3$ in opazimo, da je $\det A = 0$ le, ko je $a = -1$. Sedaj upoštevamo Cramerjevo pravilo in posebej rešimo sistem za $a = -1$.

Vpsina številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
31. 1. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Pokaži, da za poljubno matriko A reda n in diagonalno matriko D reda n, velja zveza:
$$(AD)^T = DA^T\,.$$

2. **[10]** Naj bo $a \neq 0$. Dokaži formuli za nedoločeno integriranje:

   (a) **[5]** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C,$

   (b) **[5]** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$

   pri čemer je $C \in \mathbb{R}$.

3. **[10]** Dokaži, da za zvezno funkcijo f in $c \in [a, b]$ velja
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4. **[10]** Podaj primer homogene linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti in jo tudi reši.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
7. 2. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Reši enačbo
$$y'(x) + \int_0^x y(t)\mathrm{d}t = x.$$
pri pogoju $y(0) = 0$.

   Rešitev: uporabimo Laplaceovo transformacijo; $zY(z) - y(0) + \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2}$. Dobimo rešitev $y(x) = 1 - \cos x$.

2. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x \ln y}{x + \ln y}}.$$
   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga nariši.
   (b) Skiciraj nivojnico N_0 in prerez nad $y = e^x$.

   Namig: (a) $\frac{x \ln y}{x + \ln y} \geq 0$ (pomagaj si WA).
   (b) $N_0 : x \ln y = 0$ (pazi na D_f!); $f(x, e^x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

3. **[15]** Določi globalne ekstreme funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x,y) = e^{x^2 - xy + y}$, pri pogoju $|x| + |y| \leq 1$.

   Namig: rešimo v dveh korakih; naprej pogledamo lokalne ekstreme funkcije f in če le-ti ležijo znotraj območja $|x| + |y| \leq 1$, nato gledamo še na robu območja (torej $|x| + |y| = 1$; pazi štiri možnosti!).

4. **[20]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ je podana takole
$$\mathcal{A}(p_1) = (2, 0, -1), \mathcal{A}(p_2) = (0, 2, 1), \mathcal{A}(p_3) = (1, 1, 0),$$
kjer so $p_1(x) = 1 - x$, $p_2(x) = 1 + x$ in $p_3(x) = 1 + x^2$.

   (a) Določi eksplicitni predpis, bazo jedra in bazo slike linearne transformacije $\mathcal{A}$.
   (b) Določi matriko linearne transformacije $\mathcal{A}$, če kodomeno opremimo z bazo $\mathcal{A} = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.

   Namig: (a) naj bo $p(x) = ax^2 + bx + c$. Tedaj je $\mathcal{A}(p) = (c - b, c + b, b)$; $\mathcal{B}_{\mathcal{K}er(\mathcal{A})} = \{x^2\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}m(\mathcal{A})} = \{(2, 0, -1), (0, 2, 1)\}$.

   (b) glej vaje.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
7. 2. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bo $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) **[5]** Definiraj lokalni ekstrem funkcije f.
   (b) **[5]** Podaj primer funkcije $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ki v stacionarni točki nima lokalnega ekstrema.

2. **[10]** Izpelji pravilo za izračun Laplaceove transformiranko n-tega odvoda funkcije f:

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z)\,.$$

3. **[10]** Naj bo vektorska funkcija $F = F(r, \varphi, \alpha)$ definirana kot

$$F(r, \varphi, \alpha) = ((A + r\cos\alpha)\cos\varphi, (A + r\cos\alpha)\sin\varphi, r\sin\alpha)\,, A \in \mathbb{R}^+\,.$$

   Poišči determinanto Jacobijeve matrike funkcije F.

4. **[10]** Naj bo $f : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ linearna preslikava med vektroskima prostoroma. Navedi in dokaži izrek, ki povezuje dimenzijo jedra z dimenzijo slike linearne preslikave f.