Vpisna številka | Priimek in ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
4. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

---

1. **[15]** V kompleksni ravnini skiciraj množico

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(z-1) > \mathcal{I}m\left(\frac{\bar{z}}{1+i}\right),\ (\mathcal{R}e(z))^2 + \mathcal{I}m(z^2) = 0 \right\}.$$

2. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 3 - e^{-x} & ; \quad x \le 0 \\ \frac{4x^2+1}{x} & ; \quad x > 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \ln(3-x) & ; \quad x \le 1 \\ 2 & ; \quad x > 1. \end{cases}$$

   (a) *[10]* Izračunaj $g \circ f$ in skiciraj graf te funkcije.

   (b) *[5]* Izračunaj $\lim\limits_{x \uparrow 2} \dfrac{g(x)}{x^2 - 4}$.

3. **[15]** Razvij funkcijo f, $f(x) = (x-2)e^{-2x}$, v Taylorjevo vrsto v okolici točke $a = 0$. Zapiši tudi konvergenčno območje te vrste.

4. **[15]** Izračunaj

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}}\, \mathrm{d}x.$$

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
4. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Naj bo $A = \{\frac{(-1)^n(n+1)}{n+2} | n \in \mathbb{N}\}$ in $B = A \cap \mathbb{R}^+$.
   Če obstajajo, poišči $\sup B, \inf B, \max B, \min B$.

2. **[10]**
   (a) *[5]* V katerih primerih lahko za izračun limite uporabimo L'Hospitalovo pravilo?
   (b) *[5]* Podaj primer limite, ki jo lahko izračunamo z L'Hospitalovim pravilom. Limito tudi izračunaj.

3. **[15]**
   (a) *[10]* Dokaži izrek:
   Če je $f''(x) < 0$ za vsak $x \in (a, b)$, tedaj je f konkavna na $[a, b]$.
   (b) *[5]* S predpisom podaj primer funkcije, ki je na celem svojem definicijskem območju konkavna.

4. **[10]** Naj bo p trditev, da je funkcija f zvezna in q trditev, da je funkcija f odvedljiva. Natanko ena od izjav $p \Rightarrow q$ oziroma $q \Rightarrow p$ je resnična. Dokaži tisto izjavo, ki je resnična in na primeru pokaži, zakaj druga izjava ni resnična.

Vpisna številka | Priimek, ime | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
4. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** V kompleksni ravnini skiciraj množico

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{R}e(1-z) = \mathcal{I}m\left(\frac{z}{1-i}\right),\ |2-\bar{z}| < 4 \right\}.$$

2. **[15]** Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{1-2n^2}{n^2-2n+2}.$$

   (a) *[8]* Dokaži, da je zaporedje (a_n) omejeno. Poišči zgornjo ali spodnjo mejo zaporedja (a_n) (dovolj je poiskati eno od mej).

   (b) *[7]* Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{a_n}{2}\right)^n$.

3. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2|x|+1}.$$

Določi naravno definicijsko območje, zalogo vrednosti, lokalne ekstreme ter intervale naraščanja in padanja funkcije f. Skiciraj tudi graf funkcije f.

4. **[15]** Funkciji $f, g : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$ sta podani s predpisoma $f(x) = \cos(x)$ in $g(x) = \sin(2x)$. Izračunaj pod katerim kotom se sekata grafa funkcij f in g.

Vpisna številka   Priimek, ime   WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
4. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Z matematično indukcijo dokaži, da za vsako naravno število n velja

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

2. **[10]**

   (a) **[5]** Naj bo $f(x) = \log_a x$. Poišči funkcijo g, če je $(g \circ f)(x) = x$ za vsak $x > 0$.

   (b) **[5]** Izpelji pravilo: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Po definiciji odvoda izračunaj odvod funkcije kosinus.

   (b) **[5]** Zapiši enačbo tangente na graf poljubne odvedljive funkciije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v točki 0.

4. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj lokalni ekstrem funkcije f v točki a.

   (b) **[5]** Navedi in dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega ekstrema funkcije f v točki a.

Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
28. 1. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$2y''' - 9y'' + 14y' = 5y + 120\cos^2 x.$$

2. **[10]** Reši matrično enačbo

$$AX + B^T X = C,$$

kjer so

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. **[10]** Poišči Fourierovo vrsto za periodično razširitev funkcije $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - x & ; \quad x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & ; \quad x > \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

po samih sinusih.

4. **[20]** Transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} 0 & p(0) \\ -2 \cdot p(0) & p'(1) \end{bmatrix}.$$

   (a) *[10]* Dokaži, da je transformacija $\mathcal{A}$ linearna ter ji poišči bazo jedra in bazo slike.

   (b) *[10]* Poišči matriko transformacije $\mathcal{A}$, če je $\mathcal{B}_1 = \{1, 1 - x, x + x^2\}$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
28. 1. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj prirejenko $\widehat{A}$ kvadratne matrike A.

   (b) **[5]** Dokaži trditev:
   Če je I enotska matrika, tedaj je $A\widehat{A} = \det(A)I$.

2. **[10]**

   (a) **[5]** V splošnem podaj Eulerjevo diferencialno enačbo 3. reda.

   (b) **[5]** Podaj konkretni primer diferencialne enačbe iz točke a) in jo prevedi na ustrezno LDE.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj lastne vrednosti in lastne vektorje linearne transformacije $\mathcal{A} : V \to V$.

   (b) **[5]** Dokaži trditev:
   Lastna vektorja $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$, ki pripadata različnima lastnima vrednostima linearne transformacije $\mathcal{A} : V \to V$ sta linearno neodvisna.

4. **[10]** Navedi in dokaži vse štiri lastnosti norme v unitarnem prostoru $\mathcal{V}$.

Vpisna številka | Priimek in ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Računski del
4. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x+y}}{x}\right).$$
   (a) *[8]* Določi in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f.
   (b) *[7]* Izračunaj odvod funkcije f v točki $T(2,0)$ v smeri koordinatnega izhodišča.

2. **[15]** Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje krivulja $\mathcal{K}$ z enačbo
$$(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2.$$
Krivuljo $\mathcal{K}$ tudi skiciraj.

3. **[15]** Območje G v prostoru $\mathbb{R}^3$ je določeno takole
$$x^2+y^2-2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}.$$
Skiciraj telo G in izračunaj
$$\iint_{\partial G} (x+z, y+z, z^2)\, \mathrm{d}\overrightarrow{P}.$$
Pri tem je ∂G orientiran v smeri zunanje normale.

4. **[15]** Reši sistem diferencialnih enačb
$$x''(t) + y(t) = e^t$$
$$x(t) - \int_0^t y(s)\mathrm{d}s = 1$$
pri pogoju $x(0)=0$ in $x'(0)=0$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Teoretični del
4. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**

   (a) **[5]** Zapiši definicijo zveznosti funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (a, b).

   (b) **[5]** Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vsaj 2-krat parcialno odvedljiva v okolici točke (a, b). Ali sta mešana odvoda funkcije f v točki (a, b) enaka, če je f zvezna v točki (a, b).
   Odgovor utemelji.

2. **[10]** Navedi 4 lastnosti dvojnega integrala. (brez dokazov)

3. **[10]** Dokaži Greenovo formulo:
   Naj bo $\mathcal{D}$ omejeno območje v ravnini katerega rob $\partial\mathcal{D}$ je sestavljen iz končno mnogo gladkih krivulj in je pozitivno orientiran. Nadalje naj bo $\vec{F} = (f_1, f_2)$ zvezno in odvedljivo vektorsko polje v okolici $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Tedaj je

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f_1\,dx + f_2\,dy = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

4. **[10]** Polneskončna struna je vpeta v koordinatni sistem tako, da struna leži na pozitivnem delu osi x, s čimer je njena začetna točka v koordinatnem izhodišču. Na začetku struna miruje. Zatem zanihamo začetni del v skladu s funkcijo $f(t) = \sin t$, neskončni del naj miruje. Poišči odmik $u(x, t)$ na mestu x ob času t, če nihanje zadošča diferencialni enačbi

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ c > 0\,.$$

Formule:

$\mathcal{L}(t^n)(z) = \dfrac{n!}{z^{n+1}}$

$\mathcal{L}(t^a)(z) = \dfrac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}},\ a > -1$

$\mathcal{L}(e^{at})(z) = \dfrac{1}{z-a}$

$\mathcal{L}(e^{a\,t}\sin(\omega\,t))(z) = \mathcal{L}(\sin(\omega\,t))(z-a) = \frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2}$

$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n\mathcal{L}(f(t))(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \cdots - zf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

$\mathcal{L}(f(t-k))(z) = e^{-kz}\mathcal{L}(f(t))(z)$

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
24. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Določi in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f,

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x+y-1}{xy+1}\right),$$

ter skiciraj nivojnico N_a za tista realna števila a, kjer nivojnica obstaja.

2. **[20]** Poišči globalne ekstreme funkcje f, $f(x,y) = xy + \sqrt{9-4x^2-y^2}$, ki ležijo v polravnini $x \geq 0$ in za njih velja $4x^2+y^2 \leq 9$.

3. **[15]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[x] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} -p(1) & p'(0) \\ 0 & p(-1) \end{bmatrix}.$$

   (a) *[8]* Poišči bazo jedra in bazo slike linearne transformacija $\mathcal{A}$.

   (b) *[7]* Poišči matriko transformacije $\mathcal{A}$, če je vektorski prostor $M_2(\mathbb{R})$ opremljen z bazo

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. **[10]**

   (a) *[5]* Pošči Laplaceovo transformiranko funkcije f, $f(x) = (x \cdot \operatorname{sh}(x))^2$.

   (b) *[5]* Izračunaj inverz Laplaceove transformacije F, $F(z) = \frac{1}{\sqrt{(4z-1)^5}}$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
24. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Zapiši enačbo tangentne ravnine v točki $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ na parametrično podano ploskev.

2. **[15]**

   (a) *[5]* Definiraj odvod funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki $(a, b) \in D$ v smeri vektorja (s_1, s_2).

   (b) *[5]* Izpelji formulo za računanja odvoda v smeri funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s pomočjo gradienta.

   (c) *[5]* Dokaži da je gradient linearna operacija.

3. **[10]** Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor in S množica vektorjev iz $\mathcal{V}$.

   (a) *[5]* Definiraj linearno lupino $\mathcal{L}(S)$ množice S.

   (b) *[5]* Naj bo $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3[x]$. Podaj primer množice S moči 3 take, da bo $\mathcal{L}(S)$ vsebovala vse polinome iz $\mathbb{R}_3[x]$, ki nimajo splošnega člena.

4. **[10]** Naj bo $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ortonormirana baza evklidskega prostora $\mathcal{V}$. Izpelji, kako se potemtakem izraža poljuben vektor iz $\mathcal{V}$ z vektorji iz $\mathcal{B}$.