Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
3. 2. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike A.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Poišči neničeln polinom p z realnimi koeficienti najmanjše možne stopnje, za katerega velja $p(i) = 0$ in $p(1+i) = 0$. Nato poišči še lokalne ekstreme tega polinoma.

   Namig: $p(x) = (x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ (za več razlage glej učbenik stran 108). Lokalni minimum je dosežen v točki $(\frac{1}{2}, p(\frac{1}{2}))$.

2. **[15]** Poišči vsa realna števila x, za katera konvergira vrsta
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\,(1-2x)^n}.$$

   Rešitev: konvergira za vsak $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, sicer divergira (za več razlage glej učbenik stran 154).

3. **[15]** Preveri, da za vsak $x > 0$ velja
$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1).$$

   Namig: preveri, dokaži, da je funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$, naraščajoča (za več razlage glej učbenik stran 211).

4. **[15]** Izračunaj
$$\int x \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, \mathrm{d}x.$$

   Rešitev: uporabi per-partes $u = x$ in $\mathrm{d}v = \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, \mathrm{d}x$.
$$\int x \cdot \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, \mathrm{d}x = -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}\, \mathrm{d}x.$$

   Sledenji integral je rešen v učbeniku na strani 251.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
3. 2. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bo A končna množica.

   (a) *[5]* Definiraj potenčno množico $\mathcal{P}(A)$ od množice A in določi moč množice $\mathcal{P}(A)$.

   (b) *[5]* Ali je preslikava $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, določena s predpisom $f(n,m) = n^m$, injektivna? Utemelji odgovor.

2. **[10]** Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji. Dokaži, da je tedaj

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

3. **[10]** Naj bo f poljubnokrat odvedljiva funkcija v okolici točke a.

   (a) *[5]* Definiraj Taylorjev polinom Q_n funkcije f v okolici točke a.

   (b) *[5]* Pokaži, da za $n \geq 3$ velja $Q_n'''(a) = f'''(a)$.

4. **[10]** Navedi in dokaži zvezo med nedoločenim in določenim integralom.

Vpisna številka | Priimek, ime | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
3. 2. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike I.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$|z| + \bar{z} = \mathcal{I}m\left(\frac{4}{1-i}\right) - i.$$

Rešitev: $z = \frac{3}{4} + i$.

2. **[15]** Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{2n^2}{2-5n^2}.$$

Ali je zaporedje (a_n) omejeno? Ali je zaporedje (a_n) monotono? Utemelji!

Rešitev: Je omejeno, ker je konvergentno. Je monotono, ker je naraščajoče (dokaži, da je $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$).

3. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+x^2}}.$$

Določi naravno definicijsko območje funkcije f, lokalne ekstreme funkcije f ter intervale naraščanja in padanja funkcije f.

Rešitev: $D_f = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$; naraščajoča na $(-\infty, -1]$, padajoča $(-\infty, -1]$; za ekstreme glej rob D_f.

4. **[15]** Izračunaj limito

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Rešitev: limita je $e^{\frac{1}{2}}$.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
3. 2. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bosta A in B končni množici.
   (a) *[5]* Definiraj razliko in kartezični produkt množic A in B.
   (b) *[5]* Kaj mora veljati za moči množici A in B, če med njima obstaja bijektivna preslikava $f : A \to B$?

2. **[10]** Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji. Dokaži, da je tedaj

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

3. **[10]** Naj bo $f(x) = \tan x$.
   (a) *[5]* Definiraj inverzno funkcijo f^{-1} od funkcije f.
   (b) *[5]* Poišči odvod funkcije f in nato še odvod funkcije f^{-1}.

4. **[10]** Naj bo $f(x) = \sin x$.
   (a) *[5]* Poišči Taylorjev polinom Q_3 (stopnje 3) funkcije f v okolici točke 0.
   (b) *[5]* Z upoštevanjem pomena prvega in drugega odvoda skiciraj graf funkcije Q_3 na $[-2\pi, 2\pi]$.

Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
27. 1. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike B.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Izračunaj determinanto reda $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rešitev: n.

2. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$xy' + y = \ln(1 - y').$$

Rešitev: Lagrangeova DE; $x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(C + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}\right|\right)$, $y(t) = -x(t)t + \ln(1-t)$.

3. **[15]** Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ je glede na standardni bazi vektorskih prostorov $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}_2[x]$ podana z matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poišči eksplicitni predpis glede na standardni bazi vektorskih prostorov $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}_2[x]$, bazo jedra in bazo slike linearne preslikave $\mathcal{A}$. Poišči še matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$, če $\mathbb{R}_2[x]$ opremimo z bazo $\{1, 1 + x, 2x^2\}$.

Rešitev: $\mathcal{A}(a, b, c) = b+c+(a-2c)x+(a-2c)x^2$, $\mathcal{B}_{\mathcal{K}er(\mathcal{A})} = \{(2, -1, 1)\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}m(\mathcal{A})} = 1, x + x^2$, $A[\mathcal{B}, \mathcal{B}_S] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4. **[15]** Naj bodo $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ in $x_3 = x_3(t)$. Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_3 \\ x_3' &= x_1 + 2x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Rešitev: $\lambda_1 = -2$, $\vec{p}_1 = (1, 3, -7)^T$; $\lambda_2 = 1 - i$, $\vec{p}_2 = (0, 1, 1)^T + i(-1, 0, 0)^T$.

$(x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T = C_1 e^{-2t}(1, 3, -7)^T + C_2 e^t(\cos t(0, 1, 1)^T - \sin t(-1, 0, 0)^T) + C_3 e^t(\sin t(0, 1, 1)^T + \cos t(-1, 0, 0)^T)$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
27. 1. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Zapiši diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti, katere rešitvi sta funkciji $y_1 = \sin x$ in $y_2 = \cos x$.

2. **[10]**

   (a) *[5]* Definiraj linearno lupino množice S v vektorskem prostoru V.

   (b) *[5]* Poišči linearno lupino množice $S = \{2-x, x^3+1, x\}$ v vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

3. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bo A kvadratna matrika reda n. Če ima A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, tedaj je A diagonalizabilna.

4. **[15]**

   (a) *[5]* Definiraj normo in metriko v unitarnem prostoru V.

   (b) *[10]* Dokaži 3 lastnosti norme v unitarnem prostoru V.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
27. 1. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike II.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Izračunaj
   (a) *[8]* $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x$,
   (b) *[12]* $\displaystyle\int \ln(x^3-2x+1)\,\mathrm{d}x$.

   Rešitev: (a) Vpelji novo spremenljivko $t=\sqrt{2x+1}$, $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$. (b) Uporabimo per-partes $u=x$ in $textdv=\ln(x^3-2x+1)$ in si pomagamo s parcialnimi ulomki.

2. **[20]** Naj bo $y=y(x)$. Reši diferencialno enačbo
$$2\cos x\cdot y'+\sin x\cdot y=(xy)^3.$$
   Rešitev: Bernoullijeva DE; dve rešitvi $y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{4\cos x}{4C-x^4}}$.

3. **[20]** V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb.
$$\begin{aligned} ax+y+2z&=a\\ x-y+2z&=-1\\ -x+y+az&=1\end{aligned}$$
   Namig: enolične rešitve za $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,-2\}$: $x=\frac{a-1}{a+1}$, $y=\frac{2a}{a+1}$, $z=0$; za $a=-1$ ni rešitve; za $a=-2$ dobimo parametrično rešitev: $x\in\mathbb{R}$, $y=\frac{1}{2}(3x-1)$, $z=\frac{1}{4}(x-3)$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
26. 8. 2021

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Čas reševanja je **40 minut**.

1. **[10]** Navedi 2 lastnosti determinante in ju pokaži na konkretnem primeru matrik reda 3.
2. **[10]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo za izračun določenega integrala.
3. **[10]** V splošnem definiraj homogeno diferencialno enačbo prvega reda in opiši postopek njenega reševanja. Podaj primer take diferencialne enačbe (ni je potrebno rešiti).
4. **[10]** Opiši oz. izpelji metodo variacije konstant za reševanje linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficieti.

Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Računski del
3. 2. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike C.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Reši enačbo
$$y'(x) = \sin(x) + 5\int_0^x \cos(\tau)\cdot y(x-\tau)\mathrm{d}\tau,$$
pri pogoju $y(0) = 0$.

   Rešitev: (a) $y(x) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{8}e^{-2x} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{ch}(2x)$.

2. **[15]** V prvem kvadrantu ravnine poišči točko T, za katero bo veljalo: vsota kvadratov razdalj od točke T do osi x, od točke T do osi y in od točke T do premice z enačbo $x + y = 4$ bo najmanjša možna.

   Rešitev: Razdalja od točke $T(x, y)$ do osi x je $|y|$, od T do osi y je $|x|$ in od točke T do premice z enačbo $x + y = 4$ pa je $\left|\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}\right|$. Sedaj poiščemo ekstrem funkcije f, ki je podana s predpisom $f(x, y) = x^2 + y^2 + \left(\frac{x+y-4}{\sqrt{2}}\right)^2$. Iskana točka je $T(1, 1)$.

3. **[15]** Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje krivulja $\mathcal{K}$ z enačbo
$$(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2).$$
Krivuljo $\mathcal{K}$ tudi skiciraj.

   Rešitev: nalogo rešimo s pomočjo polarnih koordinat. Za sliko si pomagamo s $r = \sqrt{\sin(4\varphi)}$. Ploščina se izračuna na način
$$4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{\sin(4\varphi)}} r\,\mathrm{d}r = 1.$$

4. **[15]** Izračunaj pretok vektorskega polja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = (x+y, x-y, z^2)$, skozi rob telesa $\mathcal{G}$, $\partial\mathcal{G}$, ki je določeno takole
$$1 - x^2 - y^2 \le z \le 2 \ \text{ in } \ x^2 + y^2 \le x.$$
Pri tem je rob telesa G orientiran v smeri zunanje normale. Nadalje, telo G tudi skiciraj.

   Rešitev: uporabimo Gaussov izrek.
$$\iint_{\partial G} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{P} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} \mathrm{d}r \int_{1-r^2}^{2} 2zr\,\mathrm{d}z.$$
   Za izračun si lahko pomagaš s funkcijo beta.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Teoretični del
3. 2. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Z uporabo diferencialnega operatorja nabla definiraj rotor vektorskega polja in izračunaj $\mathrm{rot}(x, 1, y)$.

2. **[10]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

   (a) *[5]* Definiraj Hessejevo matriko funkcije f.

   (b) *[5]* Kaj mora veljati za točko $\mathbf{a} \in D$, da bo stacionarna točka funkcije f?

3. **[10]** Definiraj ploskovni integral vektorske funkcije $\vec{F}$ po orientirani ploskvi $\mathcal{S}$ in izpelji formulo za njegov izračuna preko $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$, če je $\vec{r}$ parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$.

4. **[15]**

   (a) *[5]* Definiraj funkcijo eksponentnega tipa.

   (b) *[10]* Naj bo f odsekoma zvezna funkcija eksponentnega tipa. Izpelji Laplaceovo transformiranko $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau\right)(z)$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
3. 2. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru celotne naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit (vsebine, ki so pri Matematiki B in Matematiki C).*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Reši enačbo
$$y'(x) = \sin(x) + 5\int_0^x \cos(\tau)\cdot y(x-\tau)\mathrm{d}\tau.$$
Rešitev: (a) $y(x) = (1 + y(0))(-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{8}e^{-2x}) + \mathrm{ch}(2x)$.

2. **[15]** V prvem kvadrantu ravnine poišči točko T, za katero bo veljalo: vsota kvadratov razdalj od točke T do osi x, od točke T do osi y in od točke T do premice z enačbo $x + y = 4$ bo najmanjša možna.
Rešitev: glej izpit Matematika C.

3. **[15]** Razvij funkcijo $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - x & ; \quad x \le \frac{\pi}{4} \\ 0 & ; \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases},$$
v Fourierjevo vrsto po samih sinusih.
Rešitev: $a_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$; $b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\frac{\pi}{4} - x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}x$.

4. **[15]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je določena kot zrcaljenje prostora $\mathbb{R}^3$ preko ravnine z enačbo $2x - y - z = 0$. Poišči predpis linearne transformacije $\mathcal{A}$ ter ji določi bazo jedra in bazo slike.
Rešitev: Opazimo, da je $\mathcal{B} = \{(2,-1,-1),(1,2,0),(1,0,2)\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Nadalje $\mathcal{A} : (2,-1,-1) \mapsto -(2,-1,-1)$, $\mathcal{A} : (1,2,0) \mapsto (1,2,0)$, $\mathcal{A} : (1,0,2) \mapsto (1,0,2)$. Preostali del naloge direktno sledi.

Vpisna številka   Priimek, ime   Smer K KT   WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
3. 2. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Z uporabo diferencialnega operatorja nabla definiraj divergenco vektorskega polja in izračunaj $\mathrm{div}(x, 1, y)$.

2. **[15]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (a) *[5]* Definiraj Hessejevo matriko funkcije f.

   (b) *[5]* Kaj mora veljati za točko $(a, b) \in D$, da bo stacionarna točka funkcije f?

   (c) *[5]* Dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega minimuma v točki $(a, b) \in D$.

3. **[10]**

   (a) *[5]* Definiraj vektorski podprostor W v vektorskem prostoru V.

   (b) *[5]* Dokaži da je jedro linearne transformacije $\mathcal{A} : V \to V'$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru V.

4. **[10]** Naj bo $k > 0$. Izpelji Laplaceovo transformiranko $\mathcal{L}(f(t-k))(z)$, kjer je

$$f(t-k) = \begin{cases} f(t-k) & ; \quad t \geq k \\ 0 & ; \quad 0 \leq t < k \end{cases}.$$