Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
2. 2. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike A.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Poišči vse kompleksne rešitve enačbe
$$z^6 - (1-2i)z^3 - 2 + 2i = 0.$$
Namig: enačbo najprej preoblikujemo na način $(z^3+1)(z^3-2+2i) = 0$, nato si pomagamo s polarnim zapisom kompleksnega števila (za nadaljevanje glej učbenik, stran 106, naloga 10).

2. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x) = \frac{1}{\ln(5-x^2)}.$$
   (a) *[9]* Določi naravno definicijsko obmoje funkcije f, izračunaj predpis funkcije $g \circ f$ in skiciraj graf funkcije $g \circ f$, kjer je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija s predpisom
$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$
   (b) *[6]* Izračunaj $\lim\limits_{x\to 2}(2x - x^2) \cdot f(x)$.

Rešitev: (a) $D_f = (-\sqrt{5}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{5})$,
$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in (-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5}) \\ 5 - x^2 & ; \quad x \in (-2, 2) \end{cases}$$
(b) Glej znane limite ali L'Hospitalovo pravilo: $\frac{1}{2}$.

3. **[15]** Med vsemi trikotniki z oglišči $(0,0)$, $(1,0)$ in T, kjer je T točka na krivulji z enačbo $2x^2 - 2x + y^2 = 0$, poišči tistega, ki pri vrtenju okoli osi x opiše rotacijsko telo z največjim volumnom. Volumen tudi izračunaj. Vse računsko utemelji.
Namig: glej volumen dveh stožcev $V = \frac{\pi}{3}\left(x(2x-x^2) + (1-x)(2x-x^2)\right)$ (glej tudi učbenik, stran 228, naloga 26). Rešitev $x = \frac{1}{2}$.

4. **[15]** Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije $f : [2,4] \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$.
Namig: $\int_2^4 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,\mathrm{d}x$ lahko izračunamo tako, vpeljemo novo spremenljivo $t^2 = \frac{x-2}{x}$ (za več glej še učbenik, stran 291, naloga 6, primeri o, p, q).

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
2. 2. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Preslikava $f : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je podana s predpisom $f(x) = \text{asin}x$. Poišči inverzno preslikavo f^{-1}, določi definicijsko območje in zalogo vrednosti inverzne preslikave ter skiciraj njen graf.

2. **[10]** Navedi in dokaži izrek o obstoju natančne zgornje in natančne spodnje meje zvezne funkcije na zaprtem intervalu.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj prevoj funkcije f.

   (b) **[5]** Za funkcijo s predpisom $f(x) = \text{ch}x$ določi območja konveksnosti oz. konkavnosti.

4. **[10]**

   (a) **[5]** Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija. Dokaži, da je poljubna spodnja Darbouxova vsota funkcije f manjša od poljubne zgornje Darbouxove vsote od f.

   (b) **[5]** Podaj primer omejene funkcije, ki ni integrabilna.

Vpisna številka | Priimek, ime | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
2. 2. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike I.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

---

1. **[15]** Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$z^6 + (8+8i)z^3 = 0$$

in jih skiciraj v kompleksni ravnini.

Rešitev: $z_k = 2\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right)$, $k \in \{0,1,2\}$, $z_4 = 0$.

2. **[10]** Ali je zaporedje (a_n), ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{n^2}{n^2+5}\right)^{n^2},$$

omejeno? Utemelji.

Rešitev: Je omejeno, ker je konvergentno; limita zaporedja je e^{-5}.

3. **[20]** Za funkcijo f, ki je podana s predpisom $f(x) = \ln(5-x^2)$, najprej določi naravno definicijsko območje, obnašanje na robu, zalogo vrednosti, ničle, intervale naraščanja in padanja, intervale konveksnosti in konkavnosti, ekstreme in nato skiciraj graf funkcije f.

Rešitev: glej vaje poglavje risanje grafov funkcij s pomočjo odvoda.

4. **[15]** Pod katerim kotom normala v točki $T(x,-1)$ na krivuljo $\mathcal{K}$, ki je podana z enačbo $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$, seka os x.

Rešitev: glej odvod implicitno podane funkcije; iskani kot je $\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
2. 2. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Dana je množica $A = [-2, 7)$. Poišči naslednje množice
$$A \cap \mathbb{N},\, \mathbb{N} - A\,, A \cup (\mathbb{N} \cap \emptyset)\,.$$

2. **[10]**
   (a) **[6]** Definiraj zaporedje, limito zaporedja in stekališče zaporedja.
   (b) **[4]** Podaj primer zaporedja, ki ima tri stekališča.

3. **[10]** Izpelji vsa tri pravila računanja z logaritemsko funkcijo.

4. **[15]**
   (a) **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki pove, kdaj je odvedljiva funkcija konkavna na intervalu I.
   (b) **[5]** Podaj primer funkcije, ki je na eni polovici definicijskega območja konkavna, na drugi polovici pa konveksna.

Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
26. 1. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta test/izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Naj bo $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ preslikava, ki je definirana s predpisom: $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \det(AB)$. Ali je $M_2(\mathbb{R})$ s tako definirano preslikavo evklidski prostor? Utemelji!

   Rešitev: ni, pomagaj si z matriko $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. **[15]** Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je določena kot pravokotna projekcija na ravnino z enačbo $3z - y = 0$. Poišči eksplicitni predpis, bazo jedra in bazo slike linearne preslikave $\mathcal{A}$. Poišči tudi matriko, ki ji pripada glede na standardno bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.

   Namig: (glej vaje) tvorimo bazo prostora $\mathbb{R}^3$ na način $\overrightarrow{n} = (0, -1, 3)$, $\overrightarrow{a} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{b} = (0, 3, 1)$; opazimo $\mathcal{A} : (0, -1, 3) \mapsto (0, 0, 0)$, $\mathcal{A} : \overrightarrow{a} \mapsto \overrightarrow{a}$, $\mathcal{A} : \overrightarrow{b} \mapsto \overrightarrow{b}$.

3. **[15]** Izračunaj determinanto reda $n \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

   Namig: stolpce $2, 3, \dots, n-2$ prištejemo k prvemu in zadnjemu, nato opazujemo diagonalo.

4. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$y' + y^2 + \frac{1}{8\sqrt{x^3}} = \frac{1}{16x}.$$

   Namig: Riccatijeva DE s partikularno rešitvijo $y_p = \frac{1}{4\sqrt{x}}$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
26. 1. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Izpelji metodo variacije konstant za linearno diferencialno enačbo 3. reda s konstantnimi koeficienti.

2. **[10]**

   (a) *[5]* Definiraj vektorski prostor V.

   (b) *[5]* Podaj dva različna vektorska prostora dimenzije 3.

3. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bo A kvadratna matrika reda n. Če je A diagonalizabilna, tedaj ima A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

4. **[10]** Naj bo $\mathcal{A} : V \to V$ poljubna linearna preslikava.

   (a) **[5]** Naj bo $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ baza vektorskega prostora V. Ali je $\{\mathcal{A}(\mathbf{v_1}), \mathcal{A}(\mathbf{v_2}), \ldots, \mathcal{A}(\mathbf{v_n})\}$ linearno neodvisna množica?

   (b) **[5]** Dokaži da je $\mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
26. 1. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike II.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj
$$\int \sin^3 x \sqrt{\cos^3 x}\, \mathrm{d}x.$$
Namig: integral preoblikujemo $\int (1-\cos^2 x)\sin x \cos x \sqrt{\cos x}\, \mathrm{d}x$ in nato vpeljemo novo spremenljivko $t = \sqrt{\cos(x)}$.

2. **[15]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo pri vrtenju grafa funkcije $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$, okoli osi x.
Namig: $V = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{(x^2+2)^2}\, \mathrm{d}x$; pomagaj si z metodo Ostrogradskega.

3. **[15]** Naj bo $y = y(x)$. Poišči rešitev diferencialne enačbe
$$xyy' = x^2 e^{-\frac{y^2}{x^2}} + y^2.$$
Rešitev: Homogena DE; $y_{1,2} = \pm x\sqrt{\ln(2\ln(cx))}$.

4. **[15]** Za katere realne vrednosti a sistem linearnih enačb
$$\begin{aligned} ax + y + 2z &= 1 \\ x + ay &= -1 \\ x - y + az &= a. \end{aligned}$$
nima enolične rešitve? Kaj so v tem primeru rešitve? Poišči jih.
Rešitev: za $a = -1$ dobimo $y = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $z = 0$; za $a = 2$ dobimo $x = -1 - 2y$, $z = \frac{3}{2}(y+1)$, $y \in \mathbb{R}$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
26. 1. 2023

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Čas reševanja je **40 minut**.

1. **[10]** V splošni obliki zapiši homogeno, linearno (1. reda) in Bernoullijevo diferencialno enačbo ter pri vsaki navedi en primer (ni ga potrebno rešiti).

2. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj določeni integral omejene funkcije f na $[a, b]$.

   (b) **[5]** Dokaži formulo za nedoločeno integriranje:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C\,,\ \text{kjer je } C \in \mathbb{R}\,.$$

3. **[10]** Naj bosta A in B kvadratni matriki reda n. Dopolni in dokaži zvezo

$$(AB)^T =$$

4. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj lastno vrednost in lastni vektor kvadratne matrike A.

   (b) **[5]** Podaj primer matrike reda 3, ki ima lastne vrednosti $1, 2$ in 3.

Vpisna številka | Priimek in ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Računski del
3. 2. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike C.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-y}{y^2-x}}.$$

   (a) *[7]* Določi in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f.

   (b) *[8]* Izračunaj odvod funkcije f v točki $T(0,-1)$ v smeri vektorja $\vec{s} = (1, \sqrt{3})$.

   Rešitev: (a) pomagaj si z WA. (b) $\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

2. **[15]** Izračunaj maso telesa $\mathcal{G}$, ki je v prostoru $\mathbb{R}^3$ omejeno s ploskvijo z enačbo

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = (x^2+y^2)^2,$$

   če veš, da je masa telesa v posamezni točki podana s funkcijo ρ, ki je podana s predpisom $\rho(x,y,z) = x^2y^2$.

   Rešitev: pomagamo si s sfernimi koordinatami

$$m = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\vartheta \int_0^{\cos^2\vartheta} r^6 \cos^4\vartheta \cos^2\varphi \sin^2\varphi \, \mathrm{d}r.$$

3. **[15]** Krivulja $\mathcal{K}$ je prostoru $\mathbb{R}^3$ določena kot presek ploskev z enačbama

$$x^2+y^2 = 2y \quad \text{in} \quad x^2+y^2+z = 4.$$

   (a) Skiciraj krivuljo $\mathcal{K}$ in izračunaj enačbo tangente v točki $T(0,2,0)$.

   (b) Izračunaj $\displaystyle\int_{\mathcal{K}} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z.$

   Rešitev: (a) za sliko glej presek rotacijskega paraboloida in valja, za enačbo tangente pa si pomagaj z vektorskimi produktom ustreznih gradientov. (b) $\int_{\mathcal{K}} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z = 0$ (glej Stokesov izrek).

4. **[15]** Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x'(t) - x(t) - y(t) &= 0 \\ -x(t) + y'(t) - y(t) &= e^{2t} \end{aligned}$$

pri naslednjih pogojih: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Rešitev: Pomagamo si z Laplaceovo transformacijo za iskanje rešitve x ($x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}$), za y pa lahko uporabimo prvo enačbo.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Teoretični del
2. 2. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) *[3]* Definiraj Hessejevo matriko funkcije f.
   (b) *[7]* Dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega minimuma v točki $(a, b) \in D$.

2. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bo $\mathcal{D} = \{(x, y)|a \leq x \leq b, c \leq p(x) \leq y \leq q(x) \leq d\}$ in f omejena, integrabilna funkcija. Tedaj je
$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dS = \int_a^b dx \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y)\, dy\,.$$

3. **[10]** Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
   (a) **[5]** Poišči $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f)$.
   (b) **[5]** Kje ležijo točke v $\mathbb{R}^3$, ki zadoščajo enačbi $\mathrm{div}(\mathrm{grad} f) = 0$, če je $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - x^2$?

4. **[10]** Naj bo $k > 0$. Izpelji Laplaceovo transformiranko $\mathcal{L}(f(t - k))(z)$, kjer je
$$f(t-k) = \begin{cases} f(t-k) & ; \quad t \geq k \\ 0 & ; \quad 0 \leq t < k \end{cases}.$$

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
2. 2. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru celotne naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit (vsebine, ki so pri Matematiki B in Matematiki C).*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-y}{y^2-x}}.$$

   (a) *[7]* Določi in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f.

   (b) *[8]* Izračunaj odvod funkcije f v točki $T(0,-1)$ v smeri vektorja $\vec{s} = (1, \sqrt{3})$.

2. **[15]** Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x'(t) - x(t) - y(t) &= 0 \\ -x(t) + y'(t) - y(t) &= e^{2t} \end{aligned}$$

   pri naslednjih pogojih: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

3. **[15]** Razvij funkcijo $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & ; \quad |x| \le 1 \\ 0 & ; \quad |x| > 1 \end{cases},$$

   v Fourierjevo vrsto.

4. **[15]** Transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(a, b, c) = ax^2 - (b + 2c)$$

   Dokaži, da je transformacija $\mathcal{A}$ linearna in ji poišči bazo jedra, bazo slike in matriko.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
2. 2. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitiljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Z uporabo diferencialnega operatorja nabla definiraj divergenco vektorskega polja in izračunaj $\mathrm{div}(x, 1, y)$.

2. **[15]** Naj bo $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) *[5]* Definiraj Hessejevo matriko funkcije f.
   (b) *[5]* Kaj mora veljati za točko $(a, b) \in D$, da bo stacionarna točka funkcije f?
   (c) *[5]* Dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega minimuma v točki $(a, b) \in D$.

3. **[10]**
   (a) *[5]* Definiraj vektorski podprostor W v vektorskem prostoru V.
   (b) *[5]* Dokaži da je jedro linearne transformacije $\mathcal{A} : V \to V'$ vektorski podprostor v vektorskem prostoru V.

4. **[10]** Naj bo $k > 0$. Izpelji Laplaceovo transformiranko $\mathcal{L}(f(t-k))(z)$, kjer je

$$f(t-k) = \begin{cases} f(t-k) & ; \quad t \geq k \\ 0 & ; \quad 0 \leq t < k \end{cases} .$$