

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I

Računski del

31. 1. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Naj bo z kompleksno število, za katerega velja $|z| = 1$ in $z \neq -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Ali je

$$\frac{1 + z\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

realno število? Utemelji!

Rešitev: da (pomnoži s konjugirano vrednostjo imenovalca).

2. [15] Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \ln(\sqrt{e^4 - x^2} + 1) \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} & ; \quad x < 0 \\ \frac{\sqrt{x+4}-1}{x+2} & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in natančno nariši njen graf.
 (b) Ali je funkcija g zvezna na množici \mathbb{R} ? Utemelji!
 (c) Izračunaj $g \circ f$.

Rešitev: (a) $D_f = [-e^2, e^2]$; (b) ne, saj leva in desna limita funkcije f v 0 nista enaki; (c) $g(f(x)) = \frac{\sqrt{\ln(\sqrt{e^4 - x^2} + 1) + 4} - 1}{\ln(\sqrt{e^4 - x^2} + 1) + 2}$.

3. [15] Za katera realna števila x konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x - x^2)^n}?$$

Rešitev: pomagaj si s korenskim kriterijem; $x \leq -1 \vee x \geq 2$.

4. [15] Za katere vrednosti realnega parametra a bo normala na graf funkcije f , $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, v točki $T(1, y_0)$ hkrati tudi tangenta na graf funkcije g , $g(x) = a - x^2$?

Rešitev: $a = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
31. 1. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- a) [5] Na množici kompleksnih števil $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vpelji binarno operacijo množenja \cdot . Ali je $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \cdot)$ Abelova grupa? Utemelji odgovor.
- b) [5] Dano je kompleksno število $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. V kompleksni ravnini nariši števili z in z^2 (v obeh primerih označi pripadajoči polmer in kot-argument).

2. [5] Po definiciji odvoda izpelji odvod funkcije $f(x) = \operatorname{sh} x$.

3. [10] Navedi in dokaži Leibnizov pogoj za konvergenco alternirajočih vrst.

4. [15] Naj bo p trditev, da je f padajoča funkcija na (a, b) , ter q trditev, da je $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$. Spodnje trditve dokaži ali jih ovrzi s protiprimerom:

a) $p \Rightarrow \neg q$,

b) $\neg q \Rightarrow p$,

c) $\neg p \Rightarrow q$.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
31. 1. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Poišči rešitve neenačbe

$$\left| \frac{x-3}{5-2x} \right| < 1.$$

Rešitev: $x \in (-\infty, 2) \cup (\frac{8}{3}, \infty)$.

2. [15] Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 & ; x < -1 \\ -x-1 & ; x \geq -1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1 & ; x \leq 0 \\ \ln(x^2) & ; x > 0 \end{cases}.$$

- (a) Nariši grafa funkcij f in g .
(b) Izračunaj $g \circ f$.

Rešitev: (b) $g(f(x)) = \begin{cases} e^{(x+1)^2} + 1 & ; x < -1 \\ e^{x+1} + 1 & ; x \geq -1 \end{cases}.$

3. [15] Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x}$.

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f .
(b) Če obstajajo, določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f .

Rešitev: (a) $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 3]$; (b) ne obstaja.

4. [15] Izračunaj

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^2}{(1+x)^{\frac{2}{x}}} \right)^{\frac{1}{x}}$$

Rešitev: (a) $\frac{3}{2}$; (b) e .

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
31. 1. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- a) [5] Na množici kompleksnih števil $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vpelji binarno operacijo seštevanja ter izpelji njene lastnosti. Utemelji odgovor.
- b) [5] Dano je kompleksno število $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. V kompleksni ravnini nariši števili z in z^2 (v obeh primerih označi pripadajoči polmer in kot-argument).

2. [10] Vpelji inverzno funkcije od $f(x) = a^x$, poišči njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, ter skiciraj njen graf.

3. [10]

- a) Po definiciji odvoda izpelji odvod funkcije $f(x) = \cos x$.
- b) Poišči enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = \cos x$ v točki $x = \frac{\pi}{4}$.

4. [10] Dokaži trditev:

Če je $f''(c) > 0$ in je c stacionarna točka funkcije f , tedaj ima f v točki c lokalni minimum.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
26. 1. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Izračunaj

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)} dx.$$

Rešitev: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-(x+1)} dx = \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}+(x+1)}{-x} dx = -\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx - \int (1 + \frac{1}{x}) dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} dx$.
 Za zadnjega vpelji novo spremenljivko $t = \frac{1}{x}$.

2. [15] Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj volumen (posplošenega) rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}(-\ln x)^{\frac{n}{4}}$, okoli osi x .

Rešitev: $V = \pi \int_0^1 x(-\ln x)^{\frac{n}{2}} dx = -\pi \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$ (vpelji $t = -\ln x$).

3. [15] Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y^2 - 2xy + y' = 1 - x^2.$$

Namig: partikularno rešitev poišči med linearnimi funkcijami.

Rešitev: $y = x + \frac{1}{x+c}$, kjer je $c \in \mathbb{R}$.

4. [15] Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $(-1)^{n+1}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
26. 1. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Čas reševanja je **40 minut**.

1. [5] Dana je množica kvadratnih matrik reda n

$$\mathcal{M}_n = \left\{ \left[\begin{array}{ccccc} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ & & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{array} \right] ; a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ali je množica \mathcal{M}_n grupa za operacijo množenja matrik?
Utemelji odgovor.

2. [15] Če obstaja, s predpisom podaj primer funkcije $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja:
- (a) [5] f ni zvezna in je integrabilna,
 - (b) [5] f ni odvedljiva in je integrabilna,
 - (c) [5] f je zvezna in ni integrabilna.

Utemelji, če katera od funkcij ne obstaja.

3. [10] Navedi in dokaži izrek, ki podaja zvezo med določenim in nedoločenim integralom.
4. [10]
- (a) [5] Navedi eksistenčni izrek o obstoju rešitve linearne diferencialne enačbe 1. reda.
 - (b) [5] Poišči interval veljavnosti za začetni problem

$$x \ln(x+2)y' - x^2y = 5, y(1) = 0.$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
26. 1. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Izračunaj

$$\int \frac{\ln x}{x \sqrt{\ln^2 x + \ln x + \frac{17}{4}}} dx.$$

Namig: vpelji novo spremenljivko $t = \ln x$.2. [15] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenem grafa funkcije $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin x$, okoli osi x .

Rešitev: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin x)^2 dx = \frac{\pi}{24}(48 + 6\pi + \pi^3)$.

3. [15] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y''' - 4y'' + y' = 4y - 4e^{-x}.$$

Rešitev: $y_H = C_1 e^{-2x} + e^{2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$; nastavek za partikularno rešitev: $y_P = A e^{-x}$; $y_S = y_H + y_P$.

4. [15] Poišči rešitev matrične enačbe

$$(AX + B)^T = 2X^T + B,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Namig: $X^T = (B - B^T)(A^T - 2I)^{-1}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
26. 1. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Dokaži, ali s protiprimerom ovrzi trditev:
Za poljubni kvadratni matriki reda n velja

$$((AB)^T)^{-1} = (A^T B^T)^{-1}.$$

2. **[10]** Dokaži, da za funkciji f, g ter konstanti λ, μ velja:

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx.$$

3. **[15]**

- (a) **[10]** Navedi in dokaži Cramerjevo pravilo.
- (b) **[5]** Podaj konkretni primer 3×3 sistema linearnih enačb, ki se ne da rešiti z uporabo Cramerjevega pravila.
4. **[5]** Podaj konkretni primer Bernoullijeve diferencialne enačbe in jo prevedi na pripadajočo linearno diferencialno enačbo.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
31. 1. 2017

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [10] Krivulja \mathcal{K} v \mathbb{R}^3 je določena s presekom ploskev

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad z = xy^2$$

Parametriziraj krivuljo \mathcal{K} in izračunaj enačbo tangente v točki $T(0, 1, 0)$.

Rešitev: $\vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \cos \varphi \sin^2 \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

2. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{x^2 + y^2 - 4}{16 - 4x^2 - y^2} \right).$$

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga nariši.
(b) Ali obstajajo lokalni ekstremi funkcije f ? Če obstajajo, jih poišči.

Namig: (a) glej pogoj $x^2 + y^2 > 4$ in $4x^2 + y^2 < 16$; (b) ne.

3. [15] Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ je glede na standardno bazo $\{1, x, x^2\}$ podana s pripadajočo matriko

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Poišči eksplicitni predpis linearne preslikave \mathcal{A} ter določi bazi jedra in slike linearne transformacije \mathcal{A} .
(b) Ali obstaja tak neničelni polinom p , da velja $\mathcal{A}(p) = -5p$? Če obstaja, ga poišči.

Rešitev: (a) če je $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, tedaj je $\mathcal{A}(p) = (-a_0 + 4a_1) + (a_0 - 4a_1)x + 2a_2x^2$.
 $\mathcal{B}_{\text{Ker } \mathcal{A}} = \{4 + x\}$, $\mathcal{B}_{\text{Im } \mathcal{A}} = \{-1 + x, x^2\}$.

- (b) pomagaj si z lastnimi vrednostmi; $p(x) = x - 1$.

4. [20] Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}2y'(t) - 2x(t) &= e^{-t} \\ y'(t) + x''(t) &= -e^{-t}\end{aligned}$$

pri pogojih $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$ in $y(0) = 1$.

Namig: prevedi na $x''(t) + x(t) = -\frac{3}{2}e^{-t}$ in nato poišči rešitev DE. Drugi način je s pomočjo Laplaceove transformacije.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
31. 1. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Naj bo $f(x, y, z) = (x + y)z$ in x, y, z sferne koordinate $x(r, \varphi, \vartheta) = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y(r, \varphi, \vartheta) = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z(r, \varphi, \vartheta) = r \sin \vartheta$. Pokaži, da je

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)^2 = (x - y)^2 z^2.$$

2. [15]

(a) [5] Definiraj lokalni ekstrem funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(b) [10] Kaj lahko poveš o obstoju lokalnega ekstrema 2-krat odvedljive funkcije f , če je (a, b) stacionarna točka in $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) \leq 0$?
Odgovor utemelji oz. dokaži.

3. [5] Izpelji pravilo za računanje Laplaceove transformiranke drugega odvoda funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

4. [10]

(a) [5] Izpelji postopek reševanja nehomogenega sistema linearnih diferencialnih enačb $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ z uporabo diagonalizacije matrike A .

(b) [5] Ali lahko ta postopek uporabimo na vsakem nehomogenem sistemu linearnih diferencialnih enačb? Odgovor utemelji.