UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
3. 2. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga nedvoumno ter jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** V kompleksni ravnini čimbolj natančno nariši množico

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m(z^3) < 0\}.$$

Rešitev: rešiti je potrebno enačbo $(3a^2-b^2)b < 0$ (razišči $(3a^2-b^2) < 0$ in $b > 0$ ter $(3a^2-b^2) > 0$ in $b < 0$). Za grafični prikaz si pomagaj z WolframAlpho (RegionPlot[$(3x^2-y^2)y < 0$, x, -2, 2, y, -2, 2]).

2. **[15]** Funkciji f in g sta podani s predpisoma:

$$f(x) = \sqrt{3-5x-2x^2} - 8$$

in

$$g(x) = \begin{cases} e^{x^2} & ; \quad x \geq 0 \\ \ln(8-x) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

Če obstaja, izračunaj $f \circ g$ in $g \circ f$. Rešitev: obstaja samo $(g \circ f)(x) = \ln(8-(\sqrt{3-5x-2x^2}-8))$, kjer je $3-5x-2x^2 \geq 0$.

3. **[15]** Za katera realna števila x vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{4x}{1-3x}\right)^n.$$

konvergira? Za slednje izračunaj vsoto vrste.

Namig: za računanje vsote vrste si pomagaj z odvodom.

Rešitev: vrsta konvergira, če $\left|\frac{4x}{1-3x}\right|$ oziroma $-1 < x < \frac{1}{7}$, sicer divergira.

Za vsoto vrste si pomagamo z geometrijsko vrsto $1 + y + y^2 + \ldots = \frac{1}{1-y}$ oz. z njenim odvodom $1 + 2y + 3y^2 + \ldots = \frac{1}{(1-y)^2}$. V našem primeru imamo $y(1 + 2y + 3y^2 + \ldots) = \frac{y}{(1-y)^2}$, kjer je $y = -\frac{4x}{1-3x}$.

4. **[15]** Krivlja je podana s predpisom

$$y^2 + 2xy + 4x^2 = 1.$$

Poišči tiste točke na krivulji $\mathcal{K}$, za katere velja, da tangenta seka ordinatno os pod kotom $\frac{\pi}{6}$.

Rešitev: pomagamo si z odovodom implicitno podane funkcije $2yy' + 2y + 2xy'8x = 0$ in tako dobimo enačbo $y' = -\frac{y+4x}{y+x} = \sqrt{3}$. Sedaj iz zadnje enakosti izrazimo y in ga vstavimo v $y^2 + 2xy + 4x^2 = 1$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
3. 2. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Preslikava $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = \mathrm{asin} x$. Ali obstaja inverzna preslikava f^{-1}? Utemelji odgovor.

2. **[10]**

   a) **[5]** S splošnim členom podaj primer zaporedja (a_n) z limito 1.

   b) **[5]** Iz členov zaporedja (a_n) tvori vrsto in preuči njeno absolutno konvergenco. Utemelji odgovor.

3. **[10]** Izpelji Eulerjevo formulo za zapis kompleksnega števila v eksponentni obliki.

4. **[15]** Dokaži, če velja oz. najdi protiprimer za naslednjo trditev:
   Drugi odvod vsaj 2-krat odvedljive funkcije f je pozitiven natanko tedaj, ko je f konveksna funkcija.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
3. 2. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga nedvoumno ter jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** V kopleksni ravnini nariši množico

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |2zi - \bar{z} + \mathcal{I}m(4z)| \geq \sqrt{15}\}.$$

Rešitev: naj bo $z = a+bi$. V kompleksni ravnini določi območje, ki ga določa $a^2+b^2 \geq 3$.

2. **[15]** Izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(\frac{2+n}{n}\right)^{2n}}{e^4} \right)^{4n}.$$

Rešitev: $L = e^{-\frac{1}{16}}$.

3. **[15]** Funkciji f in g sta podani s predpisoma:

$$f(x) = e^{-\sqrt{1-x}} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} -x^2 & ; \quad x \leq 0 \\ x^2+1 & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$

Izračunaj $f \circ g$ in $g \circ f$.

Rešitev: $D_{g\circ f} = (-\infty, 1]$, $(g \circ f)(x) = -\left(e^{-\sqrt{1-x}}\right)^2$;
$D_{f\circ g} = (-\infty, 0]$, $(f \circ g)(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}}$.

4. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \ln(4 - 3x - x^2)$.

   (a) Poišči naravno definicijsko območje funkcije f.

   (b) Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f.

Rešitev: $D_f = (-4, 1)$; v $x = -\frac{3}{2}$ ima funkcija lokalni (celo globalni) maksimum.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
3. 2. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Preslikava $f : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ je podana s predpisom $f(x) = \text{asin} x$. Če obstaja, poišči inverzno preslikavo f^{-1} in skiciraj njen graf.

2. **[10]** Navedi in dokaži en izrek o lastnostih zveznih funkcij na zaprtem intervalu.

3. **[10]** Z uporabo L'Hospitalovega pravila izračunaj limito

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x .$$

4. **[10]** Dokaži trditev:
Če je drugi odvod funkcije f na intervalu (a, b) pozitiven, tedaj je f konveksna funkcija.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
29. 1. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije f, $f(x) = \frac{\arctan x}{x^4+x^2}$, na intervalu $[1, \infty)$.

   Rešitev: upoštevamo per-partes $u = \arctan x$, $\mathrm{d}v = \frac{1}{x^2(x^2+1)}$,

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan x}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x &= -(\frac{1}{x} + \arctan x)\arctan x + \int (\frac{1}{x} + \arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{(\arctan x)^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\arctan x}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\arctan b}{b} - \frac{(\arctan b)^2}{2} + \ln\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+1}}\right) - (-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}))\right) \\ &= \frac{8\pi - 3\pi^2 + 8\ln 4}{32}.\end{aligned}$$

2. **[20]** Poišči splošno rešitev difrencialne enačbe

$$x^3y' + x^2y - y^2 = 2x^4.$$

   Rešitev: Riccatijeva DE; partikularno rešitev poiščemo s pomočjo $y = Cx^2$ (sicer je očitno, da je ena od možnosti $C = 1$); upoštevamo nastavek $y = u + x^2$ in dobimo Bernoullijevo DE

$$u' - \frac{u}{x} = \frac{u^2}{x^3}.$$

   Dobimo $u_S = \frac{x^2}{Cx+1}$ in posledično $y = u_S + x^2$.

3. **[20]** Poišči vsa realna števila a, za katere sistem

$$\begin{aligned} x - 2y + az &= a - 3 \\ x + 2y + 3z &= a - 3 \\ ax - 2y + z &= a(a - 3) \end{aligned}$$

nima enolične rešitve. V teh primerih rešitev tudi poišči.

Rešitev: za $a \in \{1, 3\}$ sistem nima enolične rešitve (na podlagi tega sam poišči rešitve).

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
29. 1. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Utemelji, zakaj lahko iščemo inverzno matriko obnljive matrike A tako, da na razširjeni matriki $[A|I]$ uporabimo Gaussov eliminacijski postopek.

2. **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki podaja zvezo med določenim in nedoločenim integralom.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Dokaži izrek:
   Če so funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda ter $C_1, C_2, \ldots, C_n$ poljubne konstantne, tedaj je
   $$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$
   rešitev te diferencialne enačbe.

   (b) **[5]** Kdaj je y_H splošna rešitev te diferencialne enačbe? Utemelji odgovor!

4. **[10]** Naj bo $z = a + ib$ kompleksno število in $F(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z\,t} dt$. Poišči zgornjo mejo za $|F(z)|$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
29. 1. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[25]**

   (a) Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujejo krivulje $y = 1$, $y = \ln(x + e) + 1$ in $y = 2 - x$.

   (b) Izračunaj $\displaystyle\int \frac{5\sin x}{2 + 2\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$.

   Rešitev:

   (a) $\displaystyle\int_{-e+1}^{0} \ln(x+e)\mathrm{d}x + \int_0^1 (1-x)\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

   (b) S pomočjo univerzalne substitucije:
   $\displaystyle\int \frac{5\sin x}{2 + 2\sin x + \cos x}\mathrm{d}x \overset{\text{univ.sub.}}{=} \int \frac{20t}{(1+t^2)(3+4t+t^2)}\mathrm{d}t =$
   $4\arctan t - 5\ln(t+1) + 3\ln(t+3) + \ln(t^2+1) + c.$

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + \frac{2y}{x} + x^3\cos xy^2 = 0.$$

   Rešitev: Bernoullijeva DE, vpeljemo $z = y^{-1}$ in dobimo Linearno DE $-z' + \frac{2z}{x} = -x^3\cos x$; rešitev LDE je $z_S = z_H + z_P = cx^2 + x^2(x\sin x + \cos x)$. Končno rešitev dobimo iz $y_S = \frac{1}{z_S}$.

3. **[15]** Za katera realno števila a obstaja inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 3 & a & 1 \\ 1 & 2 & a & 5 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & a \end{bmatrix}.$$

   Rešitev: $\det(A) = 3a(1-2a)$ in zato inverz matrike ne obstaja za $a \in \{0, \frac{1}{2}\}$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
29. 1. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Podaj primer 5×5 sistema linearnih enačb, ki ima 2-parametrično rešitev.

2. **[10]** Izpelji pravilo za izračun nedoločenega integrala

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{atan} \frac{x}{a} + C\,.$$

(Opomba: $(\mathrm{asin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\mathrm{atan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.)

3. **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki podaja zvezo med določenim in nedoločenim integralom.
(Opomba: Newton-Leibnizova formula je posledica tega izreka).

4. **[10]**

   (a) **[5]** Dokaži izrek:
   Če sta funkciji y_1 in y_2 rešitvi homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega tega reda ter C_1, C_2 poljubni konstanti, tedaj je

$$y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

   rešitev te diferencialne enačbe.

   (b) **[5]** Kdaj je y_H splošna rešitev te diferencialne enačbe? Utemelji odgovor!

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
Mathematica, WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
3. 2. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Dana je vektorska funkcija $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x,y,z)=(xy,xz-xy,yz)$, in $\vec{a}=(1,0,-1)$.

   (a) Dokaži, da je preslikava $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, ki je definirana s predpisom

   $$\mathcal{A}(x,y,z)=\operatorname{rot}(\vec{F}\times\vec{a}),$$

   linearna ter določi bazi jedra in slike.

   (b) Določi lastne vrednosti in lastne vektorje preslikave $\mathcal{A}$.

   Rešitev: najprej poiščemo eksplicitni predpis $\mathcal{A}$,

   $$\mathcal{A}(x,y,z)=\operatorname{rot}(xy-xz,xy+yz,xy-xz)=(x-y,-x-y+z,-x+y).$$

   Nadalje, $\mathcal{B}_{\mathcal{K}er(\mathcal{A})}=\{(1,-2,1)\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}m(\mathcal{A})}=\{(1,-1,-1),(0,1,0)\}$. Lastne vrednosti in lastni vektorji so $\lambda_1=-\sqrt{3}$, $p_1=(-1,-1-\sqrt{3},1)$, $\lambda_2=\sqrt{3}$, $p_2=(-1,-1+\sqrt{3},1)$, $\lambda_3=0$, $p_3=(1,1,2)$.

2. **[20]** Izračunaj (najkrajšo) razdaljo med premicama

$$p\ :\ x = t,\ y = 1 + t,\ z = 1,\ t \in \mathbb{R}$$

in

$$q\ :\ x = 2s,\ y = 0,\ z = 3s,\ s \in \mathbb{R}$$

v prostoru. Rešitev: $(p, q) = \sqrt{(t-2s)^2 + (1+t-1)^2 + (1-3s)^2}$; definiramo funkcijo s predpisom $f(s,t) = (t-2s)^2 + (1+t-1)^2 + (1-3s)^2$; $f_t(s,t) = -4s + 4t$, $f_s(s,t) = -6 + 26s - 4t$, $f_{t\,t}(s,t) = 4$, $f_{t\,s}(s,t) = -4$, $f_{s\,s}(s,t) = 26$; minimum v $(\frac{3}{11}, \frac{3}{11})$ in zato je razdalja $\sqrt{f(\frac{3}{11}, \frac{3}{11})}$.

3. **[20]** Poišči funkcijo $x = x(t)$, za katero bo veljalo

$$x(t) - 2\int_0^t x(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u = e^{-t}.$$

Rešitev: pomagamo si s Laplaceovo transformacijo:

$$X - \frac{2X}{z^2+1} = \frac{1}{z-1}.$$

Izpeljemo

$$X = \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+1)}$$

ter nato s pomočjo inverza Laplaceove transformacije dobimo

$$x(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t) + e^t t.$$

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
3. 2. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[20]** Vsota vektorskih podprostorov $\mathcal{V}_1$ in $\mathcal{V}_2$ vektorskega prostora $\mathcal{V}$ je definirana na naslednji način:

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_1 \in \mathcal{V}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{V}_2\}.$$

   (a) **[10]** Dokaži izrek:
   Vsota podprostorov vektorskega prostora je prav tako vektorski podprostor.

   (b) **[10]** Naj bo $\mathcal{V}_1 = \{p(x) \mid p(x) = ax^2+b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ in $\mathcal{V}_2 = \{p(x) \mid p(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$. Poišči linearno lupino vektorskega podprostora $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$.

2. **[10]** Definiraj odvod skalarne funkcije $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $a \in \mathcal{D}$ v smeri vektorja s ter izpelji povezavo med odvodom v smeri in gradientom funkcije f.

3. **[10]** Definiraj tangentno ravnino na ploskev $\mathcal{P}$ in izpelji enačbo tangentne ravnine na $\mathcal{P}$ v točki (a, b, c), če je $\mathcal{P}$ podana implicitno s predpisom $F(x, y, z) = 0$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime in priimek:

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
3. 2. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Utemelji, da je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, ki podana s $\mathcal{A}(1,-1,0) = (2,-1)$, $\mathcal{A}(0,2,1) = (0,-1)$ in $\mathcal{A}(1,0,1) = (1,0)$, dobro definirana in poišči njen eksplicitni predpis. Rešitev: presliakva je dobro definirana, ker je $\mathcal{B} = \{(1,-1,0),(0,2,1),(1,0,1)\}$ baza; eksplicitni predpis poiščemo tako, da si pomagamo s
$$(x_1,x_2,x_3) = \lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(0,2,1) + \lambda_3(1,0,1)$$
oziroma
$$\mathcal{A}(x_1,x_2,x_3) = \lambda_1\mathcal{A}(1,-1,0) + \lambda_2\mathcal{A}(0,2,1) + \lambda_3\mathcal{A}(1,0,1).$$

2. **[20]** Poišči ekstreme funkcije f, $f(x,y) = x^2y^3$, pri pogoju $x^2+y^2=1$.

   Rešitev: s pomočjo vezanega ekstrema $F(x,y,\lambda) = x^2y^3 - \lambda(x^2+y^2-1)$.

3. **[15]** Poišči rešitev sistema diferecnialnih enačb
$$y'(t) + x(t) = 1$$
$$y'(t) + 2x'(t) = e^{-2t}$$
pri pogojih $y(0) = 2$ in $x(0) = 3$.

   Rešitev: s pomočjo Laplaceove transformacije dobimo:
$$zY(z) - y(0) + X(z) = \frac{1}{z}$$
$$zY(z) - y(0)) + 2(X(z) - x(0)) = \frac{1}{z+2}.$$
   V nadaljevanju izrazi $X(z)$ (kasneje $Y(z)$) in s pomočjo inverza Laplaceove transfomacije $x(t)$ (kasneje $y(t)$).

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime in priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
3. 2. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[15]** Navedi in dokaži Cramerjevo pravilo za reševanje sistemov linearnih enačb.

2. **[20]**

   (a) **[10]** Dokaži izrek:
   Vsota vektorskih podprostorov vektorskega prostora je prav tako vektorski podprostor.

   (b) **[10]** Naj bo $\mathcal{P}_1 = \{p(x) \mid p(x) = ax^2 + b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ in $\mathcal{P}_2 = \{p(x) \mid p(x) = b, b \in \mathbb{R}\}$. Poišči linearno lupino vektorskega podprostora $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$.

3. **[15]** Definiraj odvod skalarne funkcije $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in \mathcal{D}$ v smeri vektorja s_0 ter izpelji povezavo med odvodom v smeri in gradientom funkcije f.