

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA 1

Računski del

28. 1. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*
 - *Čas reševanja je 75 minut.*
-

1. [10] Poišči realne rešitve neenačbe

$$2|x| - |x + 2| \leq 6.$$

2. [10] Poišči ekstreme funkcije f , $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

3. [10] Izračunaj

$$\int_0^1 (\sqrt{1-x} + e^{2x}) dx.$$

4. [10] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$(x^2 + 1)y' = xy.$$

5. [10] Reši matrično enačbo

$$AX = I,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA 1
Teoretični del
28. 1. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Zapiši polarni zapis kompleksnega števila in podaj Moivreovo formulo.
2. **[15]** Navedi Newton-Leibnizovo formulo in jo dokaži.
3. **[15]** Zapiši splošno obliko homogene diferencialne enačbe in opiši potek reševanja le-te.
4. **[10]** Navedi Cramerjevo pravilo in ga uporabi na linearnem sistemu dveh enačb z dvema neznankama.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
2. 2. 2016

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Naj bo z kompleksno število, $|z| = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Izračunaj oddaljenost od izhodišča števila $z^n + i$. V katerih primerih bo oddaljenost od izhodišča 2? Vsak odgovor natančno utemelji!

Rešitev: $|z^n + i| = |\cos(n\varphi) + i(\sin(n\varphi) + 1)| = \sqrt{2 + 2\sin(n\varphi)}$. Za drugi del reši enačbo $|z^n + i| = 2$.

2. [10] Preveri, da je zaporedje (a_n) , ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \sqrt{n+10} - \sqrt{n+1},$$

konvergentno ter določi od katerega člena naprej se členi zaporedja razlikujejo od limitne vrednosti za manj od $\frac{1}{1000}$. Utemelji!

Namig: reši neenačbo $\sqrt{n+10} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{1000}$.

3. [15] Za katera realna števila x konvergira vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n(3-2x)^n}?$$

V teh primerih izračunaj tudi vsoto vrste.

Rešitev: $x \in (-\infty, \frac{6}{5}) \cup (2, \infty)$. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n(3-2x)^n} = x \frac{1}{1 - \frac{x}{2(3-2x)}}$.

4. [20] Dana je funkcija f , $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

- (a) Ali obstajajo točke, v katerih je funkcija zvezna in ni odvedljiva? Utemelji!
- (b) Ali obstaja $c \in [0, \frac{1}{2}]$, da velja $f'(c) = 2(\arccos(\frac{4}{5}) - \frac{\pi}{2})$? Utemelji!
- (c) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow \infty} x(2f(x) - \pi)$.

Namig: (a) da, 1 in -1; (b) uporabi Lagrangeov izrek; (c) -4.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
2. 2. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- [5] Izpelji polarni zapis kompleksnega števila z s pomočjo Eulerjeve formule.
- [5] Glede na zapis iz točke a) poišči z^n , kjer je $n \in \mathbb{N}$.

2. [10] Naj bo p trditev, da je f odvedljiva funkcija, ter q trditev, da je f zvezna funkcija. Dokaži tisto(e) trditev(trditve), ki je(so) resnične:

- $p \Leftrightarrow q$,
- $p \Rightarrow q$,
- $q \Rightarrow p$.

3. [15]

- [10] Navedi in izpelji pravilo za odvod kompozituma dveh odvedljivih funkcij.
- [5] Kaj mora veljati za funkciji f in g , da je

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x))?$$

4. [5] S predpisom podaj primer funkcije, ki je padajoča in konveksna na celem definicijskem območju. Obe lastnosti računsko preveri.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
2. 2. 2016

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Poišči rešitve enačbe

$$z^2 - \operatorname{Im}(z^2) + 2\bar{z} = \left(\frac{i - \sqrt{3}}{2i} \right)^{27}.$$

Namig: upoštevaj $z = a + bi$ ter obravnavaj enačbi $2b(a - 1) = 0$ in $a^2 - b^2 - 2ab + 2a = -1$.

2. [15] Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = 2\sqrt{n^2 + n} - 2n.$$

Ali je zaporedje monotono? Ali je zaporedje konvergentno? Če je, izračunaj limito.

Rešitev: je naraščajoče in limita je enaka 1.

3. [15] Dani sta funkciji f in g ,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{3-x}}, \quad g(x) = -e^{x^2} - 2.$$

Določi naravno definicijsko območje funkcije f , D_f , zalogo vrednosti funkcije g , Z_g , ter skiciraj graf funkcije g . Ali obstaja $f \circ g$? Če obstaja, ga izračunaj.

Namig: $D_f = (-\frac{1}{2}, 3)$; $Z_g = (-\infty, -3]$; ne.

4. [15] Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = x^2 \ln^2 x$.

- (a) Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f .
- (b) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Rešitev: (a) lok. min. v $x_1 = 1$, lok. max. v $x_2 = \frac{1}{e}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
2. 2. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

a) Podaj primer zaporedja, katerega limita je $\frac{5}{2}$.

b) Za ta primer poišči naravno število n_0 tako, da bo za vsak $n \geq n_0$ člen a_n v $\varepsilon = \frac{3}{100}$ - okolici limite.

2. [10] Vpelji inverzno funkcije od eksponentne funkcije, poišči njeno definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničlo ter skiciraj njen graf.

3. [10] Dokaži trditev:

Zvezna funkcija na zaprtem intervalu doseže vse vrednosti med minimumom in maksimumom.

4. [10] Naj bo p trditev, da je f strogo naraščajoča na (a, b) , ter q trditev, da je $f(x) > 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Dokaži tisto(e) trditev(trditve), ki je(so) resnične:

a) $p \Leftrightarrow q$,

b) $p \Rightarrow q$,

c) $q \Rightarrow p$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
28. 1. 2016

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Ali obstaja integral

$$\int_4^{\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 + 7x - 8} dx?$$

Če obstaja, ga izračunaj.

Rešitev: vpelji novo spremenljivko $t^2 = x - 1$; $\frac{2\pi}{9}$.

2. [15] Populacija se je v desetih letih povečala za 10%. Izračunaj v kakšnem času se bo populacija povečala za 50%.

(Opomba: populacija se spreminja po zakonu naravne rasti, ki pravi, da je hitrost spreminjanja populacije sorazmerna s količino samo.)

Rešitev: diferencialna enačba je oblike $\frac{dP}{dt} = kP$, kjer je P populacija, t čas in k koeficient rodnosti oz. smrtnosti. Posledično je $P(t) = Ce^{kt}$.

Naj bo C_0 populacija v času $t = 0$. Iz pogoja iz naloge sledi

$$P(10) = \frac{11}{10}P(0).$$

Torej $k = \frac{1}{10} \ln\left(\frac{11}{10}\right)$.

Do konca reši enačbo $P(t) = \frac{3}{2}P(0)$.

3. [15] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$2(y''' + y') = y'' + y + x + \sin(x).$$

Rešitev: $y_H = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$; nastavek za partikularno rešitev $y_P = Ax + B + (C \cos x + D \sin x)x$.

4. [15] Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $\det A = \frac{1}{7}(6^{n+1} + (-1)^n)$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
28. 1. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Dokaži trditev:
Determinanta vsake obrnljive matrike je različna od nič.
2. **[10]** Dokaži trditev:
Poljubna spodnja Riemannova vsota funkcije f na intervalu $[a, b]$ je manjša ali enaka poljubni zgornji Riemannovi vsoti funkcije f na intervalu $[a, b]$.
3. **[15]**
 - (a) **[10]** Izpelji postopek reševanja homogene Eulerjeve diferencialne enačbe tretjega reda.
 - (b) **[5]** Podaj primer take diferencialne enačbe in jo reši.
4. **[5]** S predpisom podaj primer funkcije f , za katero velja:

$$\left| \int_1^2 f(x) dx \right| < \int_1^2 |f(x)| dx .$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
28. 1. 2016

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. [20] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika \mathcal{L} , kjer je \mathcal{L} določen s krivuljami $y = 0$, $y = 1$, $y = \ln(x + 1)$ in $y = \sqrt{5 - x}$, okoli osi x . Lik \mathcal{L} tudi skiciraj.

Rešitev: izračunaj

$$\pi \int_0^{e-1} (\ln(x+1))^2 dx + \pi \int_{e-1}^4 1 dx + \pi \int_4^5 (5-x) dx.$$

2. [20] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y''' + 10y = 2y'' + 3y' + 2 \sin(x).$$

Rešitev: $y_H = C_1 e^{-2x} + e^{2x}(C_2 \cos x + C_3 \sin x)$; nastavek za partikularno rešitev: $y_P = A \cos x + B \sin x$.

3. [20] Glede na realni parameter a obravnavaj sistem enačb

$$\begin{aligned} ax - z &= 0 \\ x + ay + z &= 1 \\ x - y - 3z &= -1. \end{aligned}$$

Rešitev: če je $a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, 1\}$, tedaj $x = \frac{1}{1+3a}$, $y = \frac{2}{1+3a}$, $z = \frac{a}{1+3a}$; če je $a = -\frac{1}{3}$, dobimo protisloven sistem; če je $a = 1$, dobimo $x = z$, $y = 1 - 2z$, $z \in \mathbb{R}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
28. 1. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Dokaži, da za funkciji f, g ter konstanti λ, μ velja:

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx .$$

2. [15]

(a) [10] Izpelji postopek za iskanje lastnih vrednosti matrike A .

(b) [5] Za katere matrike obstajajo njihove lastne vrednosti?

3. [10] Dokaži trditev:

Determinanta vsake obrnljive matrike je različna od nič.

4. [5] Podaj 3×4 sistem linearnih enačb, ki ga lahko rešimo z uporabo Cramerjevega pravila.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III

Računski del

2. 2. 2016

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [10] Ali je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

parcialno odvedljiva? Utemelji!

Rešitev: ne, ker ni parcialno odvedljiva v $(0, 0)$ (glej vaje).

2. [15] Poišči bazo jedra in bazo slike linearne transformacije $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$, ki je podana na naslednji način:

$$\mathcal{A}(1, 0, -1) = x^2, \mathcal{A}(2, 1, 0) = x^2 - x, \mathcal{A}(0, 2, 0) = 3x.$$

Namig: $(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(2, 1, 0) + \lambda_3(0, 2, 0)$, nato s preslikavo \mathcal{A} preslikaj razpisani vektor (za celotni postopek glej vaje).

3. [20] Poišči in skiciraj naravno definicijsko območje f ,

$$f(x, y) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{x-y}{y}}\right).$$

Ali obstajajo ekstremi (globalni in lokalni) funkcije f ? Če obstajajo, jih poišči.

Namig: ekstremi obstajajo na robu definicijskega območja.

4. [15] Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y''(x) + \int_0^x \sin(x - \tau)(y''(\tau) + y(\tau))d\tau = 2 \cos(x)$$

pri pogojih $y(0) = 0$ in $y'(0) = 0$.

Namig: pomagaj si z Laplaceovo transformacijo. Dobiš

$$z^2 Y + Y = \frac{2z}{z^2 + 1}.$$

Končno rešitev dobiš s pomočjo konvolucije.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
2. 2. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- (a) [5] Definiraj odvod funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in D$ v smeri vektorja s_0 .
- (b) [5] Izpelji formulo za računanja odvoda v smeri funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ s pomočjo gradienta.

2. [10]

- (a) [5] Podaj konkretna primera ene implicitno podane ter ene parametrično podane ploskve v \mathbb{R}^3 .
- (b) [5] Izpelji enačbo tangente na krivuljo K v \mathbb{R}^3 , če je K podana implicitno kot presek dveh ploskev.

3. [10] Dokaži, da za poljubna vektorska prostora \mathcal{U} in \mathcal{V} ter poljubno linearno preslikavo $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ velja, če je $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathcal{U}$ linearno odvisna množica, tedaj je tudi $\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_n)\} \subseteq \mathcal{V}$ linearno odvisna množica.

Vsak korak utemelji!

4. [10] Dokaži trditev:

Če je matrika A reda n diagonalizabilna, tedaj ima A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
2. 2. 2016

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. [10] Ali je

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_2 + 3x_3 = 0\}$$

vektorski podprostor prostora \mathbb{R}^4 ? Če je, poišči njegovo bazo.

2. [15] Poišči eksplicitni predpis linearne transformacije $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, ki je podana takole:

$$f(1, 0, 1) = (2, 3, -1), \quad f(1, 1, 1) = (3, 0, -2), \quad f(1, 2, -1) = (-2, 7, -1).$$

3. [15] Izračunaj ekstreme funkcije f , $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$, $x, y \in \mathbb{R}^+$.

4. [10] Izračunaj enačbo tangentne ravnine na ploskev

$$\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3)$$

v točki $A(3, 5, 9)$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
2. 2. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - *Čas reševanja je 40 minut.*
-

1. **[15]** Dokaži, da za poljubna vektorska prostora \mathcal{U} in \mathcal{V} ter poljubno linearno transformacijo $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ velja, če je $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ linearno odvisen sistem vektorjev iz \mathcal{U} , tedaj je tudi $\{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_n)\}$ linearno odvisen sistem.
2. **[15]**
 - (a) **[5]** Definiraj odvod funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in D$ v smeri vektorja s_0 .
 - (b) **[10]** Izračunaj odvod funkcije f , $f(x, y) = x^2 - 3xy$, v točki $(1, 1, -2)$ v smeri vektorja $(1, 1, 1)$.
3. **[20]** Navedi in izpelji dve lastnosti Laplaceove transformacije.