

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
20. 6. 2019

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, ravnilo, kalkulator, ki ne izrisuje grafov in ne računa simbolno, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] V kompleksni ravnini nariši množico točk

$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z^2 - 1| \leq |z^2 + 1|\}.$$

Rešitev: vsa kompleksna števila $z = a + bi$, ki zadoščajo pogoju $|b| \leq |a|$.

2. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{\frac{4 - \ln^2(x)}{\ln x + 1}}.$$

(a) Določi naravno defincijsko območje funkcije f .

(b) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow e^2} \frac{(f(x))^2}{\sqrt{x} - e}$.

Rešitev: (a) $D_f = (0, e^{-2}] \cup (e^{-1}, e^2]$; (b) $-\frac{4}{e}$.

3. [15] Razvij funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{e^x},$$

v Taylorjevo vrsto v točki $a = 0$ in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n!}.$$

Rešitev: $-x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n!} x^{n+1}$, vsota je 1 (namig: opazij $f(1)$).

4. [15] V kvadrat K s stranico dolžine a včrtamo kvadrat S tako, da ima vsa oglišča na straneh kvadrata K . Določi dolžino stranice kvadrata S , da bo njegova ploščina najmanjša možna. Ploščino kvadrata S tudi izračunaj.

Rešitev: nastavi funkcijo in s pomočjo njenega odvoda dokaži, da morajo oglišča ležati na polovici stanic kvadrata K .

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
20. 6. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Na množici $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiramo operacijo množenja na sledeč način

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (a, b) \cdot (c, d) = (ab, cd).$$

Preveri katere od lastnosti Abelove grupe so izpolnjene za tako definirano operacijo množenja.

2. [10] Vpelji funkcijo arkus kosinus in nariši njen graf.

3. [10] Izpelji limito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. [10] Navedi in dokaži Cauchyjev izrek (v zvezi z odvodom).

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
20. 6. 2019

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, ravnilo, kalkulator, ki ne izrisuje grafov in ne računa simbolno, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. [15] V množici kompleksnih števil reši enačbo

$$z^3 = (-8 + 8\sqrt{3}i)^4.$$

Namig: upoštevaj polarni zapis kompleksnega števila.

2. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{7-x}{2x+1}\right)}.$$

(a) Izračunaj naravno definicijsko območje funkcije f .

(b) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x))^2}{\sqrt{x^2+5}-3}$.

Rešitev: (a) $D_f = (-\frac{1}{2}, 2]$; (b) $-\frac{9}{10}$.

3. [15] Preveri, da vsaka tangenta na krivljo \mathcal{K} , ki je podana z enačbo $y^3 + 3y = 1 + 3x^2$, v točki oblike $T(x, 1)$ poteka skozi koordinatno izhodišče.

Rešitev: res, saj sta ti tangenti $y = x$ in $y = -x$.

4. [15] Razvij funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom $f(x) = (x - x^2)e^{-2x}$, v Taylorjev polinom v okolici točke $x = 0$ do členov reda dva in ga nariši.

Rešitev: $T_2(x) = x - 3x^2$.

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
20. 6. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Naj bo z kompleksno število.
 - (a) **[5]** Izpelji polarni zapis števila z .
 - (b) **[5]** Poišči polarni zapis števila $\frac{\bar{z}^2}{z}$.
2. **[10]** Vpelji funkcijo arkus tangens in nariši njen graf.
3. **[10]**
 - (a) **[5]** Definiraj limito in stekališče zaporedja.
 - (b) **[5]** Podaj primer zaporedja, ki ima limito in stekališče.
4. **[10]** Navedi in dokaži Rolleov v izrek.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
27. 6. 2019

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, ravnilo, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. [15] Izračunaj

(a) $\int \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x} dx,$

(b) $\int \frac{1 + \tan x}{\sin(2x) - 1} dx.$

Rešitev: (a) $\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x + C$; (b) nova spremenljivka $t = \tan x$; $-\int \frac{1+t}{(t-1)^2} dt = \frac{2}{\tan x - 1} - \ln |\tan x - 1| + C.$ 2. [15] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da graf funkcije f , $f(x) = \sqrt{x} \ln(9 - x^2)$, zavrtimo okoli osi x med ničloma funkcije f . Rešitev: s pomočjo per-partesa in nove spremenljivke $t = 9 - x^2$; $\pi \int_0^{\sqrt{8}} x \ln^2(9 - x^2) dx.$

3. [15] Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$2y = x \frac{(y')^2}{y' + 2}$$

pri pogoju $y(0) = 1.$ Rešitev: Lagrangeova DE; $y = (\frac{x}{2} - 2)^2.$ 4. [15] Poišči vsa realna števila $a \in \mathbb{R}$, za katere sistem

$$ax - y + 2z = 1$$

$$x - ay + 4z = 1$$

$$x - y + az = a$$

nima rešitve (oz. je protisloven).

Rešitev: za $a = 2$ in $a = -3.$

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
27. 6. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- (a) [5] Definiraj nedoločeni integral funkcije f .
- (b) [5] Po definiciji nedoločenega integrala dokaži formulo za nedoločeno integriranje:

$$\int \frac{1}{a-x} dx = \ln \frac{1}{|a-x|} + C, \text{ kjer sta } a, C \in \mathbb{R}.$$

2. [10] Dokaži trditev:

Če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka delitev D intervala $[a, b]$, da je $S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon$, tedaj je funkcija f integrabilna na $[a, b]$.

3. [10] Izpelji metodo variacije konstant za linearno diferencialno enačbo 3. reda s konstantnimi koeficienti.

4. [10] Naj bo D diagonalna matrika reda k z diagonalnimi elementi d_{ii} , $i = 1, \dots, k$. Z matematično indukcijo dokaži, da je n -ta potenca matrike D enaka

$$D^n = \begin{bmatrix} d_{11}^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{kk}^n \end{bmatrix}.$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
27. 6. 2019

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Izračunaj $\int \frac{1 + \cos(x)}{1 + \sin(x)} dx$.

Namig: več načinov; en od načinov je univerzalna substitucija in takrat dobimo $-\ln(\tan(\frac{x}{2}) + 1) + 2 \ln |\tan(\frac{x}{2}) + 2| - \frac{2}{\tan(\frac{x}{2}) + 1} + C$

2. [15] Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije f , $f(x) = \sqrt{\frac{\arcsin x}{2\sqrt{1+x}}}$, na intervalu, ki jo določen z naravnim definicijskim območjem funkcije f .

Rešitev: uporabi per-partes: $\pi \int_0^1 \frac{\arcsin x}{2\sqrt{1+x}} dx = \pi(-\frac{\pi}{\sqrt{2}} - 2)$.

3. [15] Reši diferencialno enačbo

$$y^{(4)} + 8y'' = 4y''' + 24x + 4.$$

Rešitev: $y_S = C_1 + C_2x + e^{2x}(C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)) + \frac{1}{2}x^3 + x^2$.

4. [15] Reši matrično enačbo

$$XA^T = 2B,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: vsaka matrika oblike $X = \begin{bmatrix} a & 2-2a & 2-a \\ d & -2d & -d+2 \end{bmatrix}$, kjer sta $a, d \in \mathbb{R}$ poljubna.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
27. 6. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljivi matriki. Dopolni in dokaži zvezo

$$(AB)^{-1} =$$

2. **[10]**

- (a) **[5]** Definiraj določeni integral omejene funkcije f na $[a, b]$.
(b) **[5]** Dokaži formulo za nedoločeno integriranje:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \text{ kjer je } C \in \mathbb{R}.$$

3. **[10]**

- (a) **[5]** Definiraj lastno vrednost in lastni vektor kvadratne matrike A .
(b) **[5]** Podaj primer matrike reda 3, ki ima lastne vrednosti 1, 2 in 3.

4. **[10]** Izpelj metodo variacije konstant za linearno diferencialno enačbo 2. reda s konstantnimi koeficienti.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III**Računski del****20. 6. 2019****Navodila:**

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik, dva A4 ročno napisana lista s formulami in pripravljene listi s formulami za prvi letnik.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [10](a) Izračunaj Laplaceovo transformiranko funkcije f , $f(x) = (\operatorname{sh}(x) \sin(x))^2$.(b) Izračunaj inverz Laplaceove transformiranke funkcije F , $F(z) = \frac{1}{\sqrt{(z+1)^3}}$.Rešitev: (a) $\mathcal{L}(f(x))(z) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} - \frac{2}{z} + \frac{2z}{z^2+4} - \frac{z-2}{z^2-4z+8} - \frac{z+2}{z^2+4z+8} \right)$; (b) $f(t) = 2e^{-t} \sqrt{\frac{t}{\pi}}$.**2. [15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x, y) = \arcsin \left(\frac{\ln(xy)}{\ln(xy) - 1} \right).$$

(a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga nariši.(b) Izračunaj odvod v točki $T(1, 1)$ v smeri točke $S(2, 2)$.Namig: (a) pomagaj si z WA (opazuj $-1 \leq \frac{\ln(xy)}{\ln(xy)-1} \leq 1$); (b) $-\sqrt{2}$.**3. [15]** Določi pravilno tristrano prizmo tako, da bo njena površina $2\sqrt{3}$, njen volumen pa bo maksimalen.

Opomba: pravilna tristrana prizma ima za osnovno ploskev pravilni trikotnik in je pokončna.

Namig: vezani ekstrem funkcije $V(a, h, \lambda) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h - \lambda(\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + 3ah - 2\sqrt{3})$.**4. [20]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ je glede na bazi $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ in $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ podana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Določi eksplicitni predpis linearne transformacije \mathcal{A} glede na standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 in $\mathbb{R}_2[x]$ ter glede na standardni bazi določi bazo jedra in bazo slike linearne transformacije \mathcal{A} .Namig: $A[\mathcal{B}_S, \mathcal{C}_S] = Q[\mathcal{C}, \mathcal{C}_S]A[\mathcal{C}_S, \mathcal{B}_S]Q[\mathcal{B}_S, \mathcal{B}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer K KT

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
20. 6. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10] Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija dveh spremenljivk.

(a) [5] Definiraj diferenciability funkcije f v točki (a, b) .

(b) [5] Poišči totalni diferencial funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ v točki $(1, 1)$.

2. [10] Izpelji dve lastnosti divergence.

3. [10] Naj bo $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ poljubna linearna preslikava.

(a) [5] Naj bo $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ baza vektorskega prostora \mathcal{V} . Ali je $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ linearno neodvisna množica?

(b) [5] Dokaži da je $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

4. [10] Reši diferencialno enačbo

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + 2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 1, t \geq 0,$$

če je začetni pogoj $u(x, 0) = 0$ in robni pogoj $u(0, t) = t$.