Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
18. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** V kompleksni ravnini skiciraj množico točk
$$M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| + |z| = 1\}.$$

2. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}-1}$.

   (a) *[10]* Določi naravno definicijsko območje funkcije f in izračunaj $g \circ f$, kjer je
   $$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \leq 0 \\ -1 & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$

   (b) *[10]* Izračunaj $\lim\limits_{x \uparrow 1} x^{f(x)}$.

3. **[10]** Izračunaj vsoto vrste
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}.$$

4. **[15]** Poišči vse točke na krivulji $\mathcal{K}$ z enačbo $x - 2y^2 + 1 = 0$, ki so najmanj oddaljene od točke $T(1,0)$. Krivuljo $\mathcal{K}$ tudi skiciraj.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
18. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**
   (a) **[5]** Vpelji polarni zapis kompleksnega števila z.
   (b) **[5]** Izpelji polarni zapis za obratno vrednost kompleksnega števila z.

2. **[10]** Dokaži spodnjo trditev.
   Naj bosta (a_n) in (b_n) zaporedji, za kateri velja $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Tedaj je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$.

3. **[10]** Naj bo $a > 0$ in f eksponentna funkcija, $f(x) = a^x$.
   (a) **[5]** Pokaži, da je $f^{-1}(x) = \log_a x$ inverzna funkcija od f, poišči njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
   (b) **[5]** Za katere a je f^{-1} konkavna funkcija? Utemelji odgovor.

4. **[10]** Dokaži naslednjo trditev.
   Če je f zvezna v točki b in je $\lim_{x\to a} g(x) = b$, tedaj je $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$.

Vpisna številka | Priimek in ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
18. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}-1}$.

   (a) *[10]* Določi naravno definicijsko območje funkcije f in izračunaj $g \circ f$, kjer je

   $$g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \leq 0 \\ -1 & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$

   (b) *[10]* Izračunaj $\lim\limits_{x \uparrow 1} x^{f(x)}$.

   Rešitev: (a) $D_f = [-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}]$; (b) e^{-1}.

2. **[10]** Izračunaj vsoto vrste

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}.$$

   Rešitev: $\frac{5}{12}$.

3. **[15]** Poišči vse točke na krivulji $\mathcal{K}$ z enačbo $x - 2y^2 + 1 = 0$, ki so najmanj oddaljene od točke $T(1, 0)$. Krivuljo $\mathcal{K}$ tudi skiciraj.

   Namig: naj bo $A \in \mathcal{K}$; opazuj $d(T, A) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + \frac{x+1}{2}}$.

4. **[15]** Izračunaj

   $$\int \ln(1 + \sqrt[3]{x})\, \mathrm{d}x.$$

   Namig: več možnih načinov; npr. najprej upoštevaj per-partes $u = \ln(1 + \sqrt[3]{x})$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, nato še novo spremenljivko $t = \sqrt[3]{x}$.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
18. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj absolutno vrednosti realnega števila x.

   (b) **[5]** Pokaži, da za poljubni realni števili x, y velja

   $$|x+y| \leq |x| + |y| \,.$$

2. **[10]** Naj bo $a > 0$ in f eksponentna funkcija, $f(x) = a^x$.

   (a) **[5]** Pokaži, da je $f^{-1}(x) = \log_a x$ inverzna funkcija od f, poišči njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.

   (b) **[5]** Za katere a je f^{-1} konkavna funkcija? Utemelji odgovor.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $x > 0$. Za Eulerjevo funkcijo Γ izpelji zvezo

   $$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n+1)}{(x+n)(x+n-1)(x+n-2) \cdot \ldots \cdot (x+1)x} \,.$$

   (b) **[5]** Izračunaj $\Gamma(-\frac{7}{2})$.

4. $\ast$ **[10]** Dokaži naslednjo trditev.
   Če je f zvezna v točki b in je $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, tedaj je $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
18. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** V kompleksni ravnini skiciaj množico točk

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |\sqrt{2}z - 1|\}.$$

Rešitev: krožnica z enačbo $(a-\sqrt{2})^2 + b^2 = 1$.

2. **[10]** Skiciraj graf funkcije $g \circ f$, kjer sta f in g podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2^x & ; \quad x \geq -1 \\ 1 - \frac{1}{|x|} & ; \quad x < -1. \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x > 2 \\ 3 - x & ; \quad x \leq 2. \end{cases}$$

Rešitev: skiciraj graf funkcije $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 + 2^x & ; \quad x \geq -1 \\ 2 + \frac{1}{|x|} & ; \quad x < -1 \end{cases}$.

3. **[20]** Izračunaj

(a) *[10]* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n\right) =$

(b) *[10]* $\lim\limits_{x\to 1} (1 + \ln x)^{\frac{1}{\ln(2x-1)}} =$

Rešitev: (a) $-\frac{2}{3}$, (b) $e^{\frac{1}{2}}$.

4. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = x^2 e^{1-x}.$$

Določi naravno definicijsko območje, zalogo vrednosti, ničle, intervale naraščanja in padanja, intervale konveksnosti in konkavnosti, ekstreme in nato skiciraj graf funkcije.

Namig: glej vaje kako se naloga izpelje.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
18. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**
   (a) **[5]** Definiraj pojem monotonosti zaporedja (a_n).
   (b) **[5]** Podaj primer konvergentnega zaporedja, ki ni monotono. Utemelji odgovor.
2. **[10]**
   (a) **[5]** Vpelji polarni zapis kompleksnega števila z.
   (b) **[5]** Izpelji polarni zapis za kvadrat kompleksnega števila z.
3. **[10]** Naj bo $f(x) = \cos x$.
   (a) **[5]** Poišči stacionarne točke funkcije f.
   (b) **[5]** Vpelji obratno funkcijo f^{-1} od funkcije f, poišči njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
4. **[10]** Navedi in dokaži Lagrangeov izrek.

Vpisna številka | Priimek in ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
23. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo
$$y + xy' = (y')^3.$$
Rešitev: Lagrangeova DE; rešitev lahko predstavimo parametrično $x_s = C\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{3}{5}t^2$, $y_s = -\left(C\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{3}{5}t^2\right)t + t^3$.

2. **[15]** Za katere realne vrednosti parametra a ima sistem enačb
$$\begin{aligned} ax + y - 2z &= -2 \\ x - 2ay + z &= 0 \\ -2x + y + az &= a \end{aligned}$$
parametrično rešitev? V teh primerih rešitev tudi poišči.
Rešitev: samo v primeru $a = -2$ dobimo $y = -\frac{2}{9}$, $z = \frac{8}{9} - x$, kjer je $x \in \mathbb{R}$ poljuben.

3. **[15]** Funkcija $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x) = 2\cos(2x)$. Poišči liho funkcijo $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, za katero velja $g(x) = f(x)$ za vsak $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ter njeno periodično rezširitev zapiši v Fourierovo vrsto.
Rešitev: $g(x) = \begin{cases} 2\cos(2x) & ; \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ -2\cos(2x) & ; \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, 0) \end{cases}$. Ker je g liha, zato je $a_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$; po formulah izračunaj še b_n in zapiši vrsto.

4. **[15]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ je glede na standardni bazi vektorskih prostorov $M_2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}_2[x]$ podana z naslednjo matriko
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Poišči eksplicitni predpis, bazo jedra in bazo slike linearne transformacije $\mathcal{A}$. Nadalje, poišči še matriko, ki pripada linearni transformaciji $\mathcal{A}$, če kodomeno opremimo z bazo $\mathcal{B} = \{1 - x^2, x^2, x\}$.
Rešitev: $\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (c - b) + ax + (a + b - c)x^2$, $\mathcal{B}_{\mathcal{K}er(\mathcal{A})} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}m(\mathcal{A})} = \{x + x^2, -1 + x^2\}$, $\tilde{A} = P[\mathcal{B}, \mathcal{B}_s]A$.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
23. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** V splošni obliki zapiši Clairautovo diferencialno enačbo in izpelji postopek reševanja te diferencialne enačbe.

2. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj pojem diagonalizabilnosti kvadratne matrike A.

   (b) **[5]** Dokaži naslednjo trditev:
   Če ima A linearno neodvisnih lastnih vektorjev, tedaj je A diagonalizabilna.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Naj bo V vektorski prostor dimenzije n z bazo $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in naj bo $x \in V$. Definiraj koordinatni vektor vektorja x v bazi B.

   (b) **[5]** Naj bo $V = \mathbb{R}_2[x]$ vektorski prostor polinomov stopnje kvečjemu 2. Zapiši koordinatni vektor polinoma $p(x) = 3x^2 + 3$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

4. $*$ **[10]** Naj bo I enotska matrika reda 3. Poišči bazo lastnega (pod)prostora V_1 glede na lastno vrednost $\lambda = 1$ matrike I.

Vpisna številka　　　　Priimek, ime　　　　Smer: K KI　　WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
23. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj
$$\int \sqrt{\frac{x-4}{x^3}}\,\mathrm{d}x.$$

2. **[15]** Funkcija $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ je podana s predpisom $f(x)=3-|3x-3|$. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo vrtenjem dela grafa funkcije f okoli osi y.

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo
$$y+xy'=(y')^3.$$

4. **[15]** Za katere realne vrednosti parametra a ima sistem enačb
$$\begin{aligned} ax+y-2z&=-2\\ x-2ay+z&=0\\ -2x+y+az&=a \end{aligned}$$
parametrično rešitev? V teh primerih rešitev tudi poišči.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
23. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**
   (a) **[5]** Definiraj obratno matrike kvadratne matrike A.
   (b) **[5]** Dokaži, da za poljubni matriki A reda $n \times k$ in B reda $k \times m$ velja:
   $$(AB)^T = B^T A^T \,.$$
2. **[10]** Naj bo $a > 0$. Dokaži pravilo za nedoločeno integriranje:
   $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \,.$$
3. **[10]** Navedi in dokaži izrek o srednji vrednosti določenega integrala.
   (Opomba: navedi in dokaži tudi lemo, ki jo potrebujemo v dokazu izreka).
4. **[10]** V splošni obliki zapiši Lagrangeovo diferencialno enačbo in izpelji postopek reševanja te diferencialne enačbe.

Vpsina številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
23. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj
$$\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$
Namig: vpelji novo spremenljivko $t = \frac{1}{x-1}$.

2. **[15]** Lik $\mathcal{L}$ v prvem kvadrantu je omejen s krivuljami z enačbami $y=0$, $y-\frac{2}{7}(x-1)=0$ in $2y^2-x=0$. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika $\mathcal{L}$ okoli osi x.
Rešitev: $V = \pi\int_0^1 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x + \pi\int_1^8 \big(\frac{x}{2} - \left(\frac{2}{7}(x-1)\right)^2\,\mathrm{d}x$

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo
$$x^2y' + 2y = 2e^{\frac{1}{x}}\sqrt{y}.$$
Rešitev: Bernoullijeva DE; $y_s = \left(Ce^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)^2$.

4. **[15]** Za katere vrednosti parametra a ima sistem
$$\begin{aligned} ax + y - 2z &= -2 \\ x - 2y + z &= 0 \\ -2x + y + az &= a \end{aligned}$$
parametrično rešitev? V teh primerih rešitev tudi poišči.
Rešitev: parametrično rešitev dobimo le v primeru, ko je $a=-2$: $y=\frac{2}{3}$, $z=\frac{4}{3}-x$, kjer je $x\in\mathbb{R}$ poljuben.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
23. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dokaži, da za obrnljivi matriki A in B velja:
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.$$

2. **[10]** Dokaži pravilo:
$$\int (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x + \int g(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

3. **[10]**
   (a) **[5]** V splošni oblike zapiši Bernoullijevo diferencialno enačbo.
   (b) **[5]** Podaj primer Bernoullijeve diferencialne enačbe za $\alpha = 3$ in jo prevedi na ustrezno linearno diferencialno enačbo (ni je potrebno rešiti).

4. **[10]**
   (a) **[5]** Izpelji postopek iskanja lastnih vrednosti kvadratne matrike A.
   (b) **[5]** Podaj primer matrike reda 3, ki ima lastne vednosti $1, 2$ in 3. Utemelji svojo izbiro!

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
18. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev z enačbama

$$z = 4 - x^2 - y^2 \text{ in } x^2 + y^2 - 2y = 0.$$

   (a) *[10]* Skiciraj krivuljo $\mathcal{K}$ s pomočjo omenjenih ploskev in jo parametriziraj.

   (b) *[5]* Poišči enačbo tangente na krivljo $\mathcal{K}$ v točki $(0, 2, 0)$.

Rešitev: (a) $\vec{r} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(\varphi) = (2\sin(\varphi)\cos(\varphi), 2\sin^2(\varphi), 4\cos^2(\varphi))$; (b) opazuj $d^2(O, T) = (2\sin(\varphi)\cos(\varphi))^2 + (2\sin^2(\varphi))^2 + (4\cos^2(\varphi)))^2$.

2. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{y + \sqrt{x}}{y - \sqrt{x}}\right).$$

   (a) *[8]* Določi in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f.

   (b) *[7]* Izračunaj odvod funkcije f točki $T(1, 2)$ v smeri tistega vektorja, ki je določen s točkama T in $S(3, 0)$.

Namig: (b) računamo odvod v smeri vektorja $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

3. **[15]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ je gledena standardni bazi vektorskih prostorov $M_2(\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}^3$ podana s predpisom

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - d, 0, b + d).$$

   (a) *[8]* Poišči matriko linearne transformacije $\mathcal{A}$ ter ji določi bazo jedra in bazo slike.

   (b) *[7]* Poišči matriko, ki pripada linearni transformaciji $\mathcal{A}$, če $M_2(\mathbb{R})$ opremimo z bazo

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rešitev: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{K}er(\mathcal{A})} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}m(\mathcal{A})} = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$.

4. **[15]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} ty(t) + x'(t) &= t \\ y(t) + x''(t) &= 1 \end{aligned}$$

pri pogojih $x(0) = x'(0) = 0$ in $y(0) = 0$.

Rešitev: uporabi Laplaceovo transformacijo.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
18. 6. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Za vektorsko funkcijo s predpisom $F(r, \varphi, z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$ poišči determinanto Jacobijeve matrike.

2. **[10]** Dokaži naslednjo trditev.
Lastna vektorja $\mathbf{p_1}$ in $\mathbf{p_2}$ linearne transformacije $\mathcal{A} : V \to V$, ki pripadata različnima lastnima vrednostima λ_1 in λ_2, sta linearno neodvisna.

3. **[15]** Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija.
   (a) **[5]** Definiraj lokalni minimum funkcije f.
   (b) **[10]** Navedi in dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega minimuma funkcije f v točki (a, b).

4. **[10]** Poišči splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 1 - \mathrm{e}^{-t},$$

če je začetni pogoj $u(x, 0) = 1$ in $u(1, x)$ omejena funkcija (torej velja $u(1, t) < \infty$).