Vpisna številka　　Priimek in ime　　Smer: K KI　　WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
24. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Preveri, da vrsta
$$\sum_{n=3} \frac{1}{n^2-4}$$
konvergira in izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: $\displaystyle\sum_{n=3} \frac{1}{n^2-4} = \frac{25}{48}$.

2. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{3x}\right).$$
(a) Izračunaj naravno definicijsko območje funkcije f.
(b) Izračunaj $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{\ln(3+2x)}$.

Rešitev: (a) $D_f = (-\infty, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{\ln(3+2x)} = -\frac{1}{6}$.

3. **[15]** Poišči točko T na krivulji $\mathcal{K}$ z enačbo
$$x^4 + 4xy + y^4 = 6,$$
za katero velja naslednja lastnost: tangenta na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki T seka os x pod kotom $\frac{\pi}{4}$.

Rešitev: npr. $T(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, sicer je več možnih rešitev (glej navodilo naloge).

4. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem dela grafa funkcije f na intervalu, ki ga določata zaporedna maksimumoma funkcije f, pri vrtenju okoli osi x.

Rešitev: $V = \pi \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(2+\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{3}\pi^2}{9}$, ena od možnih rešitev je z uporabo univerzalne substitucije.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
24. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Predpostavimo, da obstajata $\lim_{x \to a} f(x)$ in $\lim_{x \to a} g(x)$. Dokaži naslednje:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \, .$$

2. **[10]**

   (a) *[5]* Zapiši definicijo konkavnosti funkcije f na intervalu $[a, b]$.

   (b) *[5]* S predpisom podaj primer funkcije, ki je na celem svojem naravnem definicijskem območju konkavna in to tudi dokaži.

3. **[10]**

   (a) *[5]* Pojasni univerzalno substitucijo pri integraciji trigonometričnih funkcij (nova spremeljivka, $\mathrm{d}x, \sin x, \cos x$).

   (b) *[5]* Definiraj Riemannovo integralsko vsoto in integrabilnost funkcije f na $[a, b]$.

4. **[10]** Dokaži trditev:
   Če je g odvedljiva v točki a in f odvedljiva v točki $g(a)$, tedaj je tudi kompozitum $f \circ g$ odvedljiva funkcija in velja

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \, g'(a) \, .$$

Vpisna številka | Priimek, ime | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
24. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** V kompleksni ravnini skiciraj presek množic A in B, kjer je
$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathcal{I}m\left(\frac{iz}{1+i}\right) = 0 \right\}$$
in
$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |2z + i| < 2 \right\}.$$
Rešitev: v ravnini opazuj kompleksna števila $z = a + bi$, ki zadoščajo $b = -a$ in $a^2 + (b + \frac{1}{2})^2 < 1$.

2. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4x}{x - 2}\right).$$
(a) Izračunaj naravno definicijsko območje funkcije f.
(b) Izračunaj $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{f(x)}}{\sin(4x)}$.

Rešitev: (a) $D_f = (0, 2) \cup (4, \infty)$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{f(x)}}{\sin(4x)} = \dfrac{1}{2}$.

3. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$
(a) Izračunaj in klasificiraj lokalne ektreme funkcije f.
(b) Izračunaj intervale naraščanja in padanja funkcije f.

Rešitev: (a) lokalni minimum v $T(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4})$, (b) padanje: $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, naraščanje: $(\frac{1}{2}, \infty)$.

4. **[15]** Poišči vse točke na krivulji $\mathcal{K}$ z enačbo
$$2x^2 - 2xy + 5y^2 = 68,$$
v katerih je tangenta na krivuljo $\mathcal{K}$ vzporedna s premico z enačbo $y + x = 3$.
Rešitev: $T_1(2\sqrt{\frac{17}{6}}, \sqrt{\frac{17}{6}})$, $T_2(-2\sqrt{\frac{17}{6}}, -\sqrt{\frac{17}{6}})$.

Vpisna številka | Priimek, ime | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
24. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleksno število. Poišči polmer in argument števila $\frac{z^2}{\overline{z}}$.

2. **[10]** Predpostavimo, da obstajata $\lim_{x\to a} f(x)$ in $\lim_{x\to a} g(x)$. Dokaži naslednje:
$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

3. **[15]**
   (a) **[5]** Definiraj strogo naraščajoče zaporedje in omejeno zaporedje.
   (b) **[10]** Ali je vsako strogo naraščajoče in omejeno zaporedje konvergentno? Natančno utemelji (dokaži) odgovor.

4. **[10]**
   (a) *[5]* Zapiši definicijo strogo padajoče funkcije f na intervalu $[a, b]$.
   (b) *[5]* S predpisom podaj primer funkcije, ki je na celem svojem naravnem definicijskem območju strogo padajoča in to tudi dokaži.

Vpisna številka | Priimek in ime | Smer: K KI | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
29. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Za poljubno naravno število n izračunaj A^n, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rešitev: $A^{4n} = 2^{4n} I$, $A^{4n+1} = 2^{4n} A$, $A^{4n+2} = 2^{4n} A^2$, $A^{4n+3} = 2^{4n} A^3$, za vsak $n \in \mathbb{N}$; dokaz z matematično indukcijo.

2. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$y' = y + x\sqrt{y'}.$$

Rešitev: Lagrangeova DE, $x_S = \big(C + t - 2\sqrt{t} + 2\ln(\sqrt{t}+1)\big) \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{t}})$, $y_H = -x_H \cdot \sqrt{t} + t$.

3. **[10]** Glede na standardni skalarni produkt na vektorskem prostru $\mathbb{R}_2[x]$ izračunaj razdaljo med p_1 in p_2, kjer je $p_1(x) = x - x^2$ in $p_2(x) = x^2 - 1$.

Rešitev: $d(p_1, p_2) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ (za več glej gradivo Linearna algebra, str. 71 in defincijo razdalje).

4. **[15]** Transformacija $\mathcal{A}$ je v prostoru $\mathbb{R}^3$ določena z zrcaljenjem preko ravnine z enačbo $x - 2y + z = 0$.

Glede na standardno bazo prostora $\mathbb{R}^3$ poišči eksplicitni predpis preslikave $\mathcal{A}$ ter ji določi bazo jedra in bazo slike.

Rešitev: matriko dobimo na način

$$A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zato je $\mathcal{A}(x, y, z) = (2x + 2y - z, 2x - y + 2z, -x + 2y + 2z)$. Jedro je trivialno, slika je cel prostor.

(za več glej nalogo 22 iz vaj v razdelku Linearne transformacije v študijskem letu 2020/2021).

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
29. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Poišči tisto partikularno rešitev diferencialne enačbe $y'\mathrm{e}^{-x} = x^2$, ki seka ordinatno os v točki $2 - \mathrm{e}$ in določi interval veljavnosti.

2. **[15]**

   (a) *[5]* Definiraj skalarni produkt v unitarnem prostoru V nad obsegom $\mathcal{R}$.

   (b) *[10]* Navedi in dokaži 5 lastnosti skalarnega produkta v unitarnem prostoru V.

3. **[5]** Dokaži trditev:
   Jedro linearne transformacije $\mathcal{A} : U \to V$ je vektorski podprostor od U.

4. **[10]**

   (a) *[5]* Definiraj bazo vektorskega prostora V.

   (b) *[5]* Poišči neko nestandardno bazo vektorskega prostora kvadratnih matrik reda 2 in dokaži da je baza.

Vpisna številka Priimek in ime Smer: K KI WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Računski del
24. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y\ln(x+y)}{x}}.$$
   (a) *[10]* Izračunaj in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f.
   (b) *[5]* Skiciraj nivojnico N_0.

2. **[15]** Med vsemi točkami na ploskvi z enačbo
$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xz = 12$$
poišči tiste, ki so najbolj oddaljene od ravnine z enačbo $z = 0$.

   Rešitev: vezani ekstrem $f(x,y,z,\lambda) = |z| + \lambda(x^2 + 2y^2 + z^2 + xz - 12)$; opazuj najprej za $z \geq 0$, nato sklepaj za $z < 0$.

3. **[15]** Območje G v prostoru $\mathbb{R}^3$ je določeno takole
$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq 1-y, \quad x^2+y^2 \leq 1, \quad x,y \geq 0.$$
Skiciraj telo G in izračunaj
$$\iint_{\partial G} (x^2y, xy^2, xyz)\, \mathrm{d}\overrightarrow{P}.$$
Pri tem je ∂G orientiran v smeri zunanje normale.

   Rešitev: $\displaystyle\iint_{\partial G} (x^2y, xy^2, xyz)\, \mathrm{d}\overrightarrow{P} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}r \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{1-r\sin\varphi} 5r^3 \sin\varphi\cos\varphi \mathrm{d}z.$

4. **[15]** Poišči rešitev diferencialne enačbe
$$y'(x) + \sin x = \cos x + 2 \cdot \int_0^x y(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
pri pogoju $y(0) = 0$.

   Rešitev: $y(x) = \dfrac{2}{\sqrt{7}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{7}t}{2}\right).$

Vpisna številka   Priimek, ime   Smer: K KI   WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Teoretični del
24. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bosta m in M infimum oz. supremum funkcije $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in naj bo $S(\mathcal{D})$ ploščina območja $\mathcal{D}$. Tedaj je
   $$m \cdot S(\mathcal{D}) \leq \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dS \leq M \cdot S(\mathcal{D})\,.$$

2. **[10]**

   (a) *[5]* Dokaži lastnost gradienta
   $$\mathrm{grad}(fg) = f\,\mathrm{grad}(g) + g\,\mathrm{grad}(f)\,.$$

   (b) *[5]* Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Poišči divergenco gradienta funkcije f.

3. **[10]**

   (a) *[5]* Definiraj tangentni vektor v točki $\vec{r}(a)$ na krivuljo $\mathcal{K}$ podano s parametrizacijo $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

   (b) *[5]* Izpelji enačbo tangente na krivuljo $\mathcal{K}$, če je krivulja $\mathcal{K}$ podana implicitno kot presek dveh ploskev z enačbama $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$.

4. **[10]** Dokaži zvezo med obema Eulerjevima funkcijama:
   Za poljubna $x, y > 0$ velja
   $$\mathcal{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}\,.$$

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
29. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Izračunaj
$$\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x.$$
Rešitev: $\int \frac{1+\sin^2 x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{ctg}(x) + x - \sin x + \frac{1}{\sin x} + C$; pomagaj si z $1-\cos x$.

2. **[15]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{1+x}$, okoli osi x.
Rešitev: $V=\pi\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{e}{1+e}+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)\right)$; pomagaj si s per-partesom.

3. **[20]** Naj bo $y=y(x)$. Reši diferencialno enačbo
$$y' = \frac{\sqrt{x}+1-y}{2\sqrt{x^3}+2x}.$$
Rešitev: LDE, $y = C\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + 2x(\sqrt{x}+1)$

4. **[15]** Za katere realne vrednosti parametra a ima sistem
$$\begin{aligned} 3x+2y+2z&=7a\\ x+ay-z&=1\\ 2x-y+az&=0. \end{aligned}$$
parametrično rešitev? V teh primerih rešitev tudi poišči. Rešitev: za $a=-1$ dobimo parametrično rešitev $x=-1$, $z=-y-2$, kjer je $y\in\mathbb{R}$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
29. 6. 2021

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Čas reševanja je **40 minut**.

1. **[10]**
   (a) *[5]* Definiraj obratno oz. inverzno matriko kvadratne matrike A.
   (b) *[5]* Podaj primer matrike reda 5, ki ni obrnljiva. Utemelji svojo izbiro.
2. **[10]** Navedi in dokaži zvezo med nedoločenim in določenim integralom.
3. **[10]** V splošnem definiraj Bernoullijevo diferencialno enačbo 1. reda in izpelji postopek prevedbe na linearno diferencialno enačbo.
4. **[10]** Dokaži trditev:
   Če je y_H splošna rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe (LDE) 2. reda in y_P neka partikularna rešitev cele LDE 2.reda, tedaj je $y_H + y_P$ splošna rešitev te LDE.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
24. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{y\ln(x+y)}{x}}.$$
   (a) *[10]* Izračunaj in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f.
   (b) *[5]* Skiciraj nivojnico N_0.

2. **[15]** Med vsemi točkami na ploskvi z enačbo
$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xz = 12$$
poišči tiste, ki so najbolj oddaljene od ravnine z enačbo $z = 0$.

3. **[15]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[x]$ je glede na urejeni standardni bazi vektorskih prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}_2[x]$ podana z matriko A,
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) *[10]* Poišči eksplicitni predpis linearne transformacije $\mathcal{A}$ ter ji poišči bazo jedra in bazo slike. Poišči tudi dimenzijo jedra in slike.
   (b) *[5]* Poišči še matriko linearne transformacije $\mathcal{A}$, če kodomeno opremimo z bazo $\mathcal{B} = \{1, 1 + x^2, -x\}$.

4. **[15]** Poišči rešitev diferencialne enačbe
$$y'(x) + \sin x = \cos x + 2 \cdot \int_0^x y(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$
pri pogoju $y(0) = 0$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
24. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Odvedi funkcijo $z = f(x_1, x_2, x_3)$, kjer so x_1, x_2, x_3 odvisne od novih spremenljivk u in v.

2. **[15]** Dana je odvedljiva funkcija dveh spremenljivk $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (a) *[5]* Definiraj lokalni ekstrem funkcije f v točki (a, b).

   (b) *[5]* Navedi in dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega maksimuma funkcije f v točki (a, b).

   (c) *[5]* Podaj primer funkcije, ki zadošča pogoju iz točke (b), a vseeno nima lokalnega ekstrema

3. **[10]**

   (a) *[5]* Dokaži lastnost gradienta

   $$\mathrm{grad}(fg) = f\,\mathrm{grad}(g) + g\,\mathrm{grad}(f)\,.$$

   (b) *[5]* Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Poišči divergenco gradienta funkcije f.

4. **[10]** Naj bo vektorski prostor opremljen z bazama $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ in $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$. Izpelji postopek prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$. Zapiši matriko prehoda.