

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA A**  
**Računski del**  
**22. 6. 2023**

**Navodila:**

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike A.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Preuči konvergenco vrst

(a) 
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2-n},$$

(b) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{6^n}.$$

Če katera od vrst konvergira, izračunaj njeno vsoto.

Namig: (a) divergira, (b) konvergira, glej geometrijske vrste.

2. [15] Funkcija  $f$  je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{|2x-1| - |2-x|}.$$

(a) [9] Določi naravno definicijsko območje in skiciraj graf funkcije  $f$ .(b) [6] Ali je funkcija  $g \circ f$ , kjer je

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ -\frac{1}{x} & ; \quad x > 0, \end{cases}$$

soda? Utemelji.

Rešitev: (a)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ; (b) ni soda.3. [15] Ali obstaja tangenta na graf funkcije  $f$ , ki je podana s predpisom  $f(x) = x^3 - 3x$ , ki poteka skozi točko  $T(-2, 2)$  in je vzporedna s katero od koordinatnih osi? Če obstaja, jo poišči.

Namig: pomagaj si z nalogo 9 iz učbenika Matematika A na strani 213.

4. [15] Izračunaj

$$\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx$$

Namig: per-partes  $u = \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})$  in  $dv = dx$ .

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

---

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA A**  
**Teoretični del**  
**22. 6. 2023**

---

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
  - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
  - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
  - *Čas reševanja je 40 minut.*
- 

1. [10] Dokaži ali ovrzi s protiprimerom naslednjo trditev: za poljubni realni števili  $x$  in  $y$  velja

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

2. [10] Prebivalstvo obmorskega mesta je modelirano s funkcijo  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je podana s predpisom  $f(t) = 10^4(11 - 2\cos(\frac{\pi}{6}t))$ , kjer je  $t$  čas v mesecih ( $t = 0$  predstavlja januar,  $t = 1$  februar in tako naprej).

- (a) [7] V katerih mesecih v letu je v mestu več kot 120.000 prebivalcev?  
(b) [3] V katerem mesecu je v mestu najmanj prebivalcev?

3. [10]

- (a) [5] S predpisom podaj primer funkcije, ki je zvezna, a ni odvedljiva.  
(b) [5] Izpelji pravilo za odvod razlike dveh odvedljivih funkcij v točki  $a$ .

4. [10] Navedi in dokaži izrek, ki podaja zvezo med določenim in nedoločenim integralom.

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA I**  
**Računski del**  
**22. 6. 2023**

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike I.*
- *Čas reševanja je 75 minut.*

1. [15] Reši enačbo

$$z^3 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} \right)^{16} = 0.$$

Namig: uporabi Moivreovo formulo in korenjenje kompleksnih števil.

2. [15] Izračunaj naslednji limiti.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sqrt[3]{27n^4 - n^6})$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x)^{\frac{1}{x^2-1}}$

Rešitev: (a) 9; (b)  $e^{\frac{1}{2}}$ .

3. [15] Za funkcijo  $f$ , ki je podana s predpisom  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-4}}$ , določi naravno definicijsko območje, obnašanje na robu definicijskega območja, ničle, zalogo vrednosti, intervale naraščanja in padanja, ekstreme in nato skiciraj graf funkcije  $f$ .
4. [15] Funkcija  $f$  je podana s predpisom  $f(x) = x^3 - 3x$ . Med vsemi tangentami na graf funkcije  $f$  poišči vse tiste, ki potekajo skozi točko  $(-1, 3)$ .

Namig: pomagaj si z nalogo 9 iz učbenika Matematika A na strani 213.

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA I**  
**Teoretični del**  
**22. 6. 2023**

---

**Navodila:**

- Pripravi osebni dokument.
  - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
  - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
  - Čas reševanja je **40 minut**.
- 

1. **[5]** Dokaži ali ovrzi s protiprimerom naslednjo trditev: za poljubni realni števili  $x$  in  $y$  velja

$$|x + y| \leq |x| - |y|.$$

2. **[15]**

(a) **[5]** Definiraj limito zaporedja.

(b) **[10]** Dokaži pravilo za računanje z limitami konvergentnih zaporedij:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

3. **[10]** Definiraj odvod funkcije  $f$  v točki  $a$  in z uporabo definicije izračunaj odvod funkcije  $f$ , ki je podana s predpisom  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

4. **[10]** Prebivalstvo obmorskega mesta je modelirano s funkcijo  $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je podana s predpisom  $f(t) = 10^4(11 - 2 \cos(\frac{\pi}{6}t))$ , kjer je  $t$  čas v mesecih ( $t = 0$  predstavlja januar,  $t = 1$  februar in tako naprej).

(a) **[5]** Poišči zalogo vrednosti funkcije  $f$ .

(b) **[5]** V katerem mesecu v letu je v mestu največ prebivalcev?

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA B****Računski del****27. 6. 2023****Navodila:**

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalično pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta test/izpit.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [10] Poišči vse realne parametre  $a$  za katere obstaja netrivialna rešitev enačbe  $A\vec{x} = 0$ , kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: za  $a \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ .

2. [15] Linearna preslikava  $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$  je določena takole:

$$\mathcal{A}(p_1) = (0, p_1(1), p_1'(1)), \quad \mathcal{A}(p_2) = (p_2(2), p_2'(2), 0), \quad \mathcal{A}(p_3) = (p_3'(0), p_3''(0), p_3'(1) - p_3''(1)),$$

kjer so  $p_1(x) = 1 - x$ ,  $p_2(x) = 2 - x$ ,  $p_3(x) = 3 - x^2$ . Poišči bazo jedra in bazo slike linearne preslikave  $\mathcal{A}$ .

Rešitev:  $\mathcal{B}_{\text{Ker}(\mathcal{A})} = \{x^2 - 2x + 1\}$ ,  $\mathcal{B}_{\text{Im}(\mathcal{A})} = \{(0, -1, 1), (0, -1, 2)\}$ .

3. [15] Izračunaj determinanto reda  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 3\}$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & n \end{vmatrix} =$$

Namig: najprej opazuj zaporedne vrstice.

4. [20] Naj bo  $y = y(x)$ . Reši diferencialno enačbo

$$x^2 y'' + 7xy' + 9y = \frac{1}{x^3 \ln(x)}.$$

Namig: Eulerjevea DE,  $y_S = C_1 \frac{1}{x^3} + C_2 \frac{\ln x}{x^3} - \frac{\ln x}{x^3} + \frac{\ln(\ln x)}{x^3}$ .

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

---

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA B**  
**Teoretični del**  
**27. 6. 2023**

---

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
  - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
  - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
  - **Čas reševanja je 40 minut.**
- 

1. **[10]** V splošni obliki podaj Clairautovo diferencialno enačbo in opiši postopek iskanja vseh njenih rešitev.
2. **[10]** Navedi in dokaži Cramerjevo pravilo.
3. **[10]**
  - (a) **[5]** Definiraj lastno vrednost in lastni vektor endomorfizma  $\mathcal{A}$ .
  - (b) **[5]** Podaj primer matrike reda 4, ki ima lastne vrednosti  $-1, 0, 1$ .
4. **[10]** Naj bo  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  linearna preslikava in  $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$  baza vektorskega prostora  $U$ .
  - (a) **[5]** Dokaži, da lahko vsak  $\mathbf{x} \in U$  na enoličen način razvijemo po bazi  $B$ .
  - (b) **[5]** Ali je  $\{\mathcal{A}(\mathbf{u}_1), \mathcal{A}(\mathbf{u}_2), \dots, \mathcal{A}(\mathbf{u}_n)\}$  linearno neodvisna množica? Utemelji odgovor.

Vpisna številka

Priimek, ime

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA II**  
**Računski del**  
**27. 6. 2023**

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike II.*
- *Čas reševanja je 75 minut.*

1. [15] Izračunaj

$$\int x (\arctan(x))^2 dx.$$

Namig: najprej uporabi per-partes  $u = (\arctan(x))^2$ ,  $dv = x dx$ .2. [15] Izračunaj, v katerem razmerju krivulja z enačbo  $y^2 = 2x$  razdeli območje, ki je določeno z neenačbo  $x^2 + y^2 \leq 8$ . Krivuljo in območje tudi skiciraj.Namig: dovolj je izračunati samo en integral, saj ploščino kroga poznamo; npr.  $\int_{-2}^2 (\sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2}) dy$ .3. [15] Naj bo  $y = y(x)$ . Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$4y''' + 8y'' = y' + 2y + e^{\frac{x}{2}}.$$

Rešitev:  $y_S = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + C_3 e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{10} x e^{\frac{x}{2}}$ .

4. [15] Reši matrično enačbo

$$XA - AB^T = 2X,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Namig:  $X = B^T A (A - 2I)^{-1}$ .

Vpisna številka

Priimek, ime

---

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA II**  
**Teoretični del**  
**27. 6. 2023**

---

**Navodila:**

- Pripravi osebni dokument.
  - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
  - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
  - Čas reševanja je **40 minut**.
- 

1. [10] Navedi 3 lastnosti determinante in jih ilustriraj na konkretnih primerih matrik reda 2.

2. [10] Izpelji pravili za nedoločeno integriranje:

(a) [5]  $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$

(b) [5]  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$

3. [10] Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo.

4. [10]

(a) [5] Podaj primer homogene diferencialne enačbe 1. reda in opiši postopek njenega reševanja.

(b) [5] Ali je lahko funkcija  $y(x) = C_1x + 2C_2x + 3C_3e^{3x}$  splošna rešitev linearne diferencialne enačbe 3. reda? Utemelji odgovor.



Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA C**  
**Računski del**  
**22. 6. 2022**

**Navodila:**

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike C.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Funkcija  $f$  je podana s predpisom

$$f(x, y) = \arcsin \left( \frac{\sqrt{x + y + 1}}{1 - \sqrt{y}} \right).$$

- (a) [9] Določi in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije  $f$ .  
 (b) [6] Če obstaja katera od nivojnic  $N_{\frac{\pi}{2}}$  in  $N_{\pi}$ , jo nariši.

Namig: (a) pomagaj si z WA. (b) samo ena nivojnica.

2. [15] Cena poleta od točke  $(x_1, y_1, z_1)$  do točke  $(x_2, y_2, z_2)$  znaša

$$2|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + 4|z_1 - z_2|$$

evrov. Začetek poleta je v točki  $(0, 0, 0)$ . Do katere točke na ploskvi z enačbo  $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 160$ , kjer so  $x, y, z \geq 0$ , je polet najdražji?

Rešitev: vezani ekstrem;  $x = 2, y = 4, z = 8$ .

3. [15] Izračunaj pretok vektorskega polja  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ki je podano s predpisom  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, x^2y^2)$ , skozi rob telesa  $\mathcal{G}$ , ki je v prostoru  $\mathbb{R}^3$  določeno takole

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z \quad \text{in} \quad x^2 + y^2 \leq z.$$

Pri tem je rob telesa  $\mathcal{G}$  orientiran v smeri zunanje normale.

Namig: opazuj kroglo in območje, ki ga določa rotacijski paraboloid; nalogo lahko izračunaš s pomočjo Gaussovega izreka.

4. [15] Reši enačbo

$$xy''(x) - (1 + 3x)y'(x) + (2x + 3)y(x) = 0$$

pri pogoju  $y(0) = 0$  in  $y'(0) = 1$ .

Rešitev: Pomagamo si z Laplaceovo transformacijo  $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$ .

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

**Izpit pri predmetu MATEMATIKA C**  
**Teoretični del**  
**22. 6. 2023**

**Navodila:**

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Čas reševanja je **40 minut**.

1. [10] Naj bo  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija. Definiraj odvod v smeri  $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$  funkcije  $f$  v točki  $(a, b) \in D$  in izpelji, kako se ta odvod računa s pomočjo gradienta funkcije  $f$ .
2. [10] Dokaži lastnost Laplaceove transformacije  $\mathcal{L}(f(t - k))(z) = e^{-kz}(f(t))(z)$ , če je za  $k > 0$

$$f(t - k) = \begin{cases} f(t - k) & ; t \geq k \\ 0 & ; 0 \leq t < k. \end{cases}$$

3. [10]

- (a) [5] Definiraj tangentni vektor v točki  $\vec{r}(a)$  na krivuljo  $\mathcal{K}$  podano s parametrizacijo  $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$
- (b) [5] Izpelji enačbo tangente na krivuljo  $\mathcal{K}$ , če je krivulja  $\mathcal{K}$  podana implicitno kot presek dveh ploskev z enačbama  $F(x, y, z) = 0$ ,  $G(x, y, z) = 0$ .

4. [10] Dokaži Greenovo formulo:

Naj bo  $\mathcal{D}$  omejeno območje v ravnini katerega rob  $\partial\mathcal{D}$  je sestavljen iz končno mnogo gladkih krivulj in je pozitivno orientiran. Nadalje naj bo  $\vec{F} = (f_1, f_2)$  zvezno in odvedljivo vektorsko polje v okolici  $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ . Tedaj je

$$\int_{\partial\mathcal{D}} f_1 dx + f_2 dy = \iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$