Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
21. 6. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, kalkulator, ki ne izrisuje grafov, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Nad množico kompleksnih števil reši enačbo
$$|z^2-1| = |z^2+1|.$$
Rešitve natančno skiciraj tudi v kompleksni ravnini.

   Rešitev: $R = \{a+ai \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{a-ai \mid a \in \mathbb{R}\}$.

2. **[15]** Funkciji f in g sta podani s predpisoma
$$f(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{1-x} & ; \quad x \leq 1 \\ \arctan(\frac{1}{x}) & ; \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 2^{x^2+1} & ; \quad x \leq 0 \\ 2 & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$
   (a) Natančno skiciraj graf funkcije f.
   (b) Izračunaj $g \circ f$ in $f \circ g$.

   Namig: (a) upoštevaj elementarne funkcije; (b) $f \circ g$: ker je $g(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, zato pri funkciji f izberemo predpis iz prve vrstice; $g \circ f$: ozirajoč se na graf funkcije f opazimo, da je potrebo ločiti $x \leq 0$, $0 < x \leq 1$, $x > 1$.

3. **[15]** Razvij funkcijo f, ki je podana s predpisom $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$, v Taylorjevo vrsto v okolici točke 1. Določi tudi konvergenčno območje te vrste.

   Namig: dve možnosti reševanja.

   (a) Vemo naslednje $f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = \ln x - \ln(2-x)$. Na podlagi tega lahko izračunamo n-ti odvod funkcije in zapišemo Taylorjevo vrsto.
   (b) Pomagamo si z znanimi vrstami
$$f(x) = \ln(1+x-1) - \ln(1-(x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n.$$
   V nadaljevanju združi vrsti in določi konvergenčno območje.

4. **[15]** Naj bo $a > 0$ in naj bo $T(x_0, y_0)$ dotikališče tangente na krivuljo $xy = a^2$. Dokaži, da x_0 razdeli interval nad katerim je tangenta med koordinatnima osema na dva enako dolga dela.

   Namig: izračunaj enačbo tangente v točki T in nato izračunaj presečišče tangente z x-osjo.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
21. 6. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bosta $a = \tilde{a} \pm \delta_a$ in $b = \tilde{b} \pm \delta_b$ ter naj bo $c = \frac{a}{b}$. Zapiši in dokaži formulo za izračun δ_c.

2. **[10]** Dokaži ali ovrzi naslednjo trditev: vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj, ko je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Z eksplicitnimi predpisom podaj primer funkcije, ki je naraščajoča, zvezna in ni omejena na svojem definicijskem območju.

   (b) **[5]** Podaj primer funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za katero velja $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, kjer je $a \in D$.

4. **[10]**

   (a) **[5]** Navedi in dokaži Rolleov izrek.

   (b) **[5]** Preveri, ali za funkcijo $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 5\sqrt[5]{x^2}$, veljajo predpostavke Rolleovega izreka.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
21. 6. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, kalkulator, ki ne izrisuje grafov, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Nad množico kompleksnih števil reši enačbo
$$z^4 = \left(\frac{1+i}{2i}\right)^{2018}.$$
Namig: najprej uporabi Moivreovo formulo, nato še formulo za korenjenje kompleksnih števil.

2. **[15]** Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} e^{-2x} + 1 & ; \quad x \geq 0 \\ \left|\frac{x+2}{x}\right| & ; \quad x < 0 \end{cases}$$
(a) Natančno skiciraj graf funkcije f.
(b) Izračunaj $f \circ f$.
Namig: (a) pomagaj si z Wolfram Alpha; (b) upoštevaj, da je $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

3. **[15]** Izračunaj
(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - x}{\sin(\pi x)}$,
(b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^{-2}}{(1-2x)^{\frac{1}{x}}}\right)^{\frac{4}{x}}$
Rešitev: (a) $-\frac{3}{\pi}$; (b) e^8.

4. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right).$$
(a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f.
(b) Določi intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije f.
Rešitev: (a) $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$; konveksna na intervalih $(-\infty, 0)$, $(0, 2-\sqrt{2})$; konkavna $(2-\sqrt{2}, 1)$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
21. 6. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bosta $a = \tilde{a} \pm \delta_a$ in $b = \tilde{b} \pm \delta_b$ ter naj bo $c = ab$. Zapiši in dokaži formulo za izračun δ_c.
2. **[10]**
   (a) **[5]** Definiraj limito zaporedja.
   (b) **[5]** Dokaži ali ovrzi naslednjo trditev: vsako omejeno zaporedje je konvergento.
3. **[10]**
   (a) **[5]** Definiraj kdaj je funkcija naraščajoča.
   (b) **[5]** Določi vse $a \in \mathbb{R}$, da bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, dobro definirana in naraščajoča.
4. **[10]** Dokaži Lagrangeov izrek.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
2. 7. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj
$$\int \arctan\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$
Namig: upoštevaj intergriranje po delih za $u = \arctan\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$.

2. **[15]** Ali konvergira integral
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2-1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x?$$
Če konvergira, ga izračunaj.
Namig: vpelji novo spremeljivko $t^2 = x+1$; integral konvergira.

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo
$$x^3y' + x^2y = y^2 + 2x^4.$$
Namig: Riccatijeva DE; $y_p = x^2$.

4. **[15]** V odvisnosti od parametra a reši matrično enačbo
$$AX = X + B^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Namig: za $a \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$ dobimo enolično rešitev; za $a = 3$ dobimo protislovje.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
2. 7. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Izpelji lastnost distributivnosti množenja glede na seštevanje matrik.
2. **[15]**
   (a) **[10]** Na intervalu $[-1, 0]$ izpelji formulo za numerično integriranje, ki bo točna za polinome stopnje kvečjemu 2.
   (b) **[5]** Po dobljeni formuli izračunaj $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1} \mathrm{d}x$.
3. **[15]** Naj bodo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda.
   (a) **[10]** Pokaži, da je $y_H = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tudi rešitev te iste diferencialne enačbe.
   (b) **[5]** Kdaj je y_H iz točke a) splošna rešitev te iste diferencialne enačbe?

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
2. 7. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj
$$\int \frac{1+\tan x}{\sin(2x)}\mathrm{d}x.$$
Namig:
$$\int \frac{1+\tan x}{\sin(2x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x+\sin x}{2\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{2\sin x(1-\sin^2 x)}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$
Pri prvem integralu vpelji novo spremenljivko $t = \sin x$, za grugega poglej formule.

2. **[15]** Izračunaj ploščino lika, ki ga določajo krivulje z enačbami $y = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)$, $x = 1$ in $y = 0$.
Namig: izračunaj $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ s pomočjo integriranja po delih, kjer je $u = f(x)$ in $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$; za lažje računanje upoštevaj $\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = \ln(\sqrt{x^2+1}-x) - \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$.

3. **[15]** Reši diferencialno enačbo
$$y' - \frac{y}{x^2} + y^2 e^{\frac{1}{x}} = 0$$
pri pogoju $y(1) = -1$.
Namig: Bernoullijeva DE za $\alpha = 2$.

4. **[15]** V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb
$$\begin{aligned} ax - y + 2z &= 1 \\ 2x - ay + z &= 4 \\ 2x + z &= 0. \end{aligned}$$
Namig: loči primere $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,4\}$, $a = 0$ in $a = 4$. Za več si pomagaj z ukazom $Solve[\{ax-y+2z == 1, 2x-ay+z == 4, 2x+z == 0\}, \{x,y,z\}, Reals]$ v Wolfram Alphi.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
2. 7. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj prirejenko kvadratne matrike A.

   (b) **[5]** Naj bo B matrika reda $n \times m$. Kakšen reda mora imeti enotska matrika I, da lahko izračunaš produkt BI? (Sam produkt BI tudi izračunaj).

2. **[10]** S predpisom podaj primer funkcije f, za katero velja:

$$\left| \int_1^2 f(x)\, dx \right| < \int_1^2 |f(x)|\, dx\,.$$

   Oba integrala tudi izračunaj.

3. **[10]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo.

4. **[10]** V splošni obliki podaj 4 različne tipe diferencialnih enačb prvega reda, vsak tip poimenuj in podaj po en konkretni primer (ki ga ni potrebno rešiti).

Vpisna številka　　Priimek, ime　　Smer K KT　　WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
21. 6. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]**

   (a) Izračunaj Laplaceovo transformacijo od $f(t) = \int_0^t \operatorname{ch}^3(2t)\mathrm{d}t$.

   (b) Izračunaj inverz Laplaceove transformiranke $F(z) = \frac{1}{\sqrt{(z+2)^3}}$.

   Namig: (a) upoštevaj $\operatorname{ch}(2x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$ in formulo pri Laplaceovi transformaciji, kjer nastopa integral; (b) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-2t}\sqrt{t}$.

2. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{|y|}}\right).$$

   (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga natanačno skiciraj.

   (b) Za koliko se (približno) spremeni vrednost funkcije, če izračunamo funkcijsko vrednost funkcije f v točki $T(1,-4)$ namesto v točki $S(0.9,-3.8)$? Nalogo reši s pomočjo parcialnih odvodov.

   Namig: (a) reši neenačbo $\frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{|y|}} > 0$ (pazi pogoje: $x \geq 0$ in (($xy > 0$ in $\sqrt{x}-\sqrt{|y|} > 0$) ali ($xy < 0$ in $\sqrt{x}-\sqrt{|y|} < 0$))); (b) upoštevaj formulo za totalni diferencial za $f(x,y) = \ln\left(\frac{xy}{\sqrt{x}-\sqrt{-y}}\right)$.

3. **[15]** Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad z = x + \frac{3}{4}.$$

   Določi vse točke na krivulji $\mathcal{K}$, ki so najbližje osi z.

   Namig/postopek: najprej parametriziraj krivuljo (glej $x^2+y^2 = x+\frac{3}{4}$; $r(\varphi) = (\frac{1}{2}+\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{5}{4}+\cos\varphi), \varphi \in [0,2\pi]$), nato poišči točke na krivulji, ki so najbližje točkam $(0,0,z)$, kjer je $z \in \mathbb{R}$. Za slednje uporabi formulo za računanje razdalje med dvema točkama na prostoru. Nato poišči ekstreme funkcije dveh spremenljivk.

4. **[15]** Transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^4$ je podana takole

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}(1) = (1,1,0,0), & \mathcal{A}(x+1) = (1,0,0,1), \\ \mathcal{A}(x^2+x+1) = (1,0,-1,1), & \mathcal{A}(x^2-x+1) = (1,2,-1,1). \end{array}$$

Preveri, da je $\mathcal{A}$ dobro definirana linearna transformacija, določi njen eksplicitni predpis ter ji določi bazo jedra in bazo slike.

Namig: ker so $1, x+1, x^2+x+1$ baza, lahko poiščemo eksplicitni predpis s pomočjo $\mathcal{A}(1) = (1,1,0,0), \mathcal{A}(x+1) = (1,0,0,1), \mathcal{A}(x^2+x+1) = (1,0,-1,1)$. Za vse ostalo glej vaje.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
21. 6. 2018

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, kjer je

$$x(r, \varphi, z) = r \cos \varphi, y(r, \varphi, z) = r \sin \varphi, z(r, \varphi, z) = z.$$

Izračunaj vsoto vseh treh parcialnih odvodov funkcije $f(r, \varphi, z)$.

2. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj Laplaceovo transformacijo.

   (b) **[5]** Izpeli formulo $\mathcal{L}(f''(t))(z) = z^2\mathcal{L}(f(t))(z) - zf(0) - f'(0)$.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj vektorski prostor.

   (b) **[5]** Nad vektorskim prostorom $\mathbb{R}^3$ s standardnima operacijama seštevanja in množenja skalarjem podaj primer množice, ki ni vektorski podprostor od le-tega.

4. **[10]** Dokaži naslednjo trditev: za linearno transformacijo $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, kjer sta $\mathcal{V}$ in $\mathcal{V}'$ vektorska prostora, velja

$$\dim(\mathcal{K}er f) + \dim(\mathcal{I}m f) = \dim(\mathcal{V}).$$