

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
27. 6. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike A.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. [15] Ali je zaporedje (a_n) , ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{2n^2}{2n^2 + n + 1} \right)^n,$$

omejeno? Nadalje, ali vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira?

2. [15] Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \ln(2 - \sqrt{x-1}) \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \leq 0 \\ 2 - e^x & ; \quad x > 0 \end{cases}.$$

Izračunaj $g \circ f$ in (brez uporabe odvoda) skiciraj graf te funkcije.

3. [10] Izračunaj enačbo normale na krivuljo $\mathcal{K}$, ki je podana s predpisom

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 = 9xy$$

v točki $T(x_0, -1)$, kjer je $x_0 \in \mathbb{Z}$.

4. [20]

(a) [10] Izračunaj $\int \cos(x) \cdot \arctan(\sin x) \, dx$.

(b) [10] Ali konvergira integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x-1}} \, dx$? Če konvergira, ga izračunaj.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
27. 6. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Čas reševanja je **40 minut**.
-

1. [10] Naj bo $a > 0$ in f eksponentna funkcija $f(x) = a^x$.
 - (a) [5] Definiraj inverzno funkcijo f^{-1} ter poišči njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.
 - (b) [5] Za katere a je f^{-1} konkavna funkcija? Utemelji odgovor.
2. [10] Dokaži, da za konvergenti zaporedji (a_n) in (b_n) z limitama A in B velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB.$$

3. [10]
 - (a) [5] Definiraj odvod funkcije f v točki a .
 - (b) [5] Z uporabo diferenciala čim natančneje izračunaj $\sqrt[2]{23}$.
4. [10] Opiši metodo univerzalne substitucije za integracijo funkcij sestavljenih iz funkcij kosinus in sinus (vpelji novo spremenljivko $x = x(t)$, poišči $dx, \sin x, \cos x$).

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
27. 6. 2023

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike I.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. [15] Reši enačbo v množici kompleksnih števil

$$z^4 = \frac{2}{-1 - i}$$

in rešitve predstavi oziroma skiciraj v kompleksni ravnini.

2. [15] Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x} & ; \quad x \geq 0 \\ 2 \sin(\pi x) & ; \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \ln(2x - \sqrt{x}).$$

(a) [5] Brez uporabe odvoda skiciraj graf funkcije f .

(b) [10] Določi naravno definicijsko območje funkcije g in izračunaj $f \circ g$.

3. [15] Ali je zaporedje (a_n) , ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{1 - 2n},$$

omejeno? Če je, določi spodnjo in zgornjo mejo.

4. [15] Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}}{e} \right)^{-\frac{4}{x^2}}.$$

Vpisna številka

Priimek, ime

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
27. 6. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Čas reševanja je **40 minut**.
-

1. **[5]** Naj bo z kompleksno število. Izpelji polarni zapis za produkt $z\bar{z}$.
2. **[15]** Naj bo $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 - (a) **[5]** Kaj mora veljati za a, b, c da funkcija f nima realnih ničel?
 - (b) **[5]** Z uporabo odvoda poišči koordinati temena $T(x_T, y_T)$ parabole, ki je določena z grafom funkcije f .
 - (c) **[5]** Izračunaj $\lim_{x \rightarrow x_T} f(x)$.
3. **[10]**
 - (a) **[5]** Definiraj odvod funkcije f v točki a .
 - (b) **[5]** Z uporabo diferenciala čim natančneje izračunaj $\sqrt[2]{23}$.
4. **[10]** Navedi in dokaži Lagrangeov izrek.

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
2. 7. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta test/izpit.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. **[15]** Linearna transformacija je določena kot pravokotna projekcija na ravnino z enačbo $3x - 2y + 4z = 0$. Glede na standardno bazo poišči matriko, ki pripada omenjeni transformaciji.

2. **[15]** Množico

$$M = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p''(1) - 2p'(-1) = 0\}$$

opremimo s standardnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem, ki sta definirani v vektorskem prostoru vseh polinomov stopnje kvečjemu tri (tj. $(\mathbb{R}_3[x], +, \cdot)$). Ali je $(M, +, \cdot)$ vektorski prostor? Če je, mu določi dimenzijo in bazo ter izračunaj norme baznih elementov.

3. **[15]** Za poljuben $t \in \mathbb{R}$ izračunaj spodnjo determinanto reda n .

$$\begin{vmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -1 & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & t & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

4. **[15]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$x^2 y'' + xy' + 9y = \frac{1}{\sin(\ln(x^3))}.$$

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
2. 7. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Čas reševanja je **40 minut**.
-

1. **[10]** Naj bodo y_1, y_2, y_3 rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe 3. reda.
 - (a) **[5]** Pokaži, da je $y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$ tudi rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe 3. reda, kjer je $C_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, 3$.
 - (b) **[5]** Kdaj je y_H splošna rešitev te iste diferencialne enačbe? Navedi pogoj(e), ki mora(jo) v tem primeru veljati.
2. **[10]** Navedi in dokaži Cramerjevo pravilo.
3. **[10]** Pokaži, da je množica vektorjev $\{\mathbf{1}, \cos(\mathbf{n}\mathbf{x}), \sin(\mathbf{n}\mathbf{x}) \mid \mathbf{n} \in \mathbb{N}\}$ iz vektorskega prostora $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ ortogonalna množica glede na standardni skalarni produkt v tem vektorskem prostoru.
4. **[10]** Naj bosta U in V vektorska prostora.
 - (a) **[5]** Definiraj linearno transformacijo $\mathcal{A} : U \rightarrow V$.
 - (b) **[5]** Podaj konkretni primer nelinearnega endomorfizma v $\mathbb{R}^2$. Utemelji odgovor oz. pokaži nelinearnost.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
2. 7. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike II.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. **[15]** Izračunaj

$$\int \frac{x}{\sin^2(2x)} dx.$$

2. **[15]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa pri vrtenju grafa funkcije $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, okoli osi x .

3. **[15]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$x^2 y' + \sqrt{x^2 y^2 - x^4} = xy.$$

4. **[15]** Poišči vse realne parametre a , za katere sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} ax - 2y + z &= a + 3 \\ -2x + ay + z &= 1 \\ x - 2y + az &= 0. \end{aligned}$$

ne bo imel enolične rešitve. Kaj so v tem primeru rešitve? Če obstajajo, jih poišči.

Vpisna številka

Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
2. 7. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Čas reševanja je **40 minut**.
-

1. [10]

(a) [5] Dokaži ali ovrzi s protiprimerom:

Za poljubni kvadratni matriki A in B velja

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

(b) [5] Podaj primer matrike reda 3, ki ni obrnljiva.

2. [10] Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo.

3. [10]

(a) [5] V splošni oblike zapiši Bernoullijevo diferencialno enačbo.

(b) [5] Podaj primer Bernoullijeve diferencialne enačbe za $\alpha = 3$ in jo prevedi na ustrezno linearno diferencialno enačbo (ni je potrebno rešiti).

4. [10] Podaj konkretni primer sistema linearnih diferencialnih enačb $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ z dvema neznanima funkcijama $x_1(t), x_2(t)$. Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A za tvoj primer.

Vpisna številka

Priimek in ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Računski del
27. 6. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana. V nasprotnem primeru naloge ne bodo točkovane.
 - Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za izpit iz Matematike C.
 - Čas reševanja je **75 minut**.
-

1. [10]

- (a) [5] Izračunaj Laplaceovo transformiranko funkcije f , $f(x) = \sin(x) \cos^3(x)$.
- (b) [5] Izračunaj inverz Laplaceove transformiranke F , $F(z) = \frac{1}{\sqrt{z-2}}$.

2. [15] Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x, y) = \ln^2 \left(\frac{x}{xy - 1} \right).$$

- (a) [8] Določi in skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f .
- (b) [7] Če obstajata, skiciraj nivojnici N_{-1} in N_1 .

3. [15] Temperatura poljubne točke v prostoru $\mathbb{R}^3$ je opisana s predpisom funkcije f , $f(x, y, z) = 400xyz^2$. Poišči tisto točko na ploskvi z enačbo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, kjer bo temperatura največja.4. [20] Krivulja $\mathcal{K}$ je podana kot presek ploskev z enačbama $z - y^2 = 0$ in $z = 1 - x^2 - y^2$, telo $\mathcal{G}$ pa omejujeta prej omenjeni ploskvi.

- (a) [10] Skiciraj krivuljo $\mathcal{K}$ in izračunaj

$$\int_{\mathcal{K}} 2x \, dx + 2yz \, dy + y^2 \, dz.$$

Pri tem velja, da je projekcija krivulje $\mathcal{K}$ na ravnino $z = 0$ orientirana pozitivno.

- (b) [10] Izračunaj volumen telesa $\mathcal{G}$.

Vpisna številka

Priimek, ime

Smer: K KI

WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA C
Teoretični del
27. 6. 2024

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
 - Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.
 - Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
 - Čas reševanja je **40 minut**.
-

1. [10] Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija.

(a) [4] Definiraj lokalni minimum funkcije f .

(b) [6] Navedi in dokaži potreben pogoj za obstoj lokalnega minimuma funkcije f v točki (a, b) .

2. [10]

(a) [4] Navedi 3 lastnosti dvojnega integrala. (Ni jih potrebno dokazati.)

(b) [6] Dokaži trditev, ki pravi: za poljubna $x, y > 0$ je Eulerjeva funkcijo $\mathcal{B}$ enaka

$$\mathcal{B}(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \varphi \sin^{2y-1} \varphi d\varphi.$$

3. [10] Izpelj enačbo tangentne ravnine v točki $T(a, b, c)$ na ploskev P , ki je podana

(a) [5] parametrično s parametrizacijo $r(u, v)$,

(b) [5] implicitno z $F(x, y, z) = 0$.

4. [10] Poišči splošno rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 1 - e^{-t},$$

če je začetni pogoj $u(x, 0) = 1$ in $u(1, t)$ omejena funkcija (torej velja $u(1, t) < \infty$).