

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
26. 6. 2013

Čas reševanja je **75 minut**. Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.

1. [15] Dana je funkcija $f(x) = \sqrt{8 - 7x - x^2}$.

- (a) Določi naravno definicijsko območje funkcije.
- (b) Izračunaj in klasificiraj ekstreme funkcije.

2. [20] Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujejo grafi funkcij $f(x) = \ln(x + 2)$, $g(x) = x^2 - 1$ in $h(x) = (\ln 2) \cdot (1 - x)$. Pomagaj si s skico.

3. [15] Poišči rešitev matrične enačbe

$$2X^T + (XA)^T = A,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Teoretični del pri predmetu MATEMATIKA I
26. 6. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*
1. **[15]** Pojasni kako kompleksnemu številu priredimo polarni zapis in navedi Moivreovo formulo.
 2. **[15]** Podaj primer diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti ter nastavi pripadajoči sistem enačb variacije konstant (ni ga potrebno rešiti).
 3. **[20]** Naj bo A obrnljiva kvadratna matrika reda n . Podaj formulo za izračun obratne matrike A^{-1} s pomočjo prirejenke matrike A ter jo dokaži.

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
26. 6. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.

1. [20] Poišči vsa kompleksna števila z , ki zadoščajo $|z| = 1$ in

$$\left| \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1.$$

2. [20] Izračunaj oba kompozituma funkcij

$$f(x) = \begin{cases} -2x & ; & x < -1 \\ 2^x + 1 & ; & x \geq -1 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \sin(2x) & ; & x < 0 \\ \ln(x+1) & ; & x \geq 0. \end{cases}$$

3. [20] Razvij

$$f(x) = \frac{2x}{(x+2)(x-2)}$$

v Taylorjevo vrsto v $x = 0$ in določi konvergenčni polmer le-te.

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
26. 6. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- Dovoljeni pripomočki so: pisala.

1. **[15]** Dana je množica $G = \{1, g, g^2, g^3, g^4\}$ in operacija $*$:

$*$	1	g	g^2	g^3	g^4
1	1	g	g^2	g^3	g^4
g	g	g^2	g^3	g^4	1
g^2	g^2	g^3	g^4	1	g
g^3	g^3	g^4	1	g	g^2
g^4	g^4	1	g	g^2	g^3

Ali je $(G, *)$ grupa? Odgovor utemelji!

2. **[10]** Izpelji limito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$.

3. **[15]** Navedi in dokaži Cauchyjev izrek za odvedljive funkcije.

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
26. 6. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*

1. [20] Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$|z| - 2z = 3 - 4i.$$

2. [20] Dana je funkcija

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{5 - x}}{\sqrt{x} - 2}.$$

Določi naravno definicijsko območje funkcije f in preveri, ali funkcija konvergira na robovih definicijskega območja.

3. [20] Dana je funkcija $f(x) = (1 - x^2)e^{-2x}$.

- Zapiši Taylorjev polinom druge stopnje v okolici točke $a = 0$.
- Zapiši enačbo normale na graf funkcije f v točki $(0, y)$.

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
26. 6. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Ali je $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [-2, 1)$, $f(x) = \cos(2x) - 1$ bijektivna funkcija? Utemelji odgovor!
2. **[15]** Podaj primer nekonstantnega zaporedja, katerega limita je enaka 2. Zatem izračunaj od katerega člana naprej bodo vsi členi zaporedja v $\varepsilon = 10^{-3}$ okolici te limite.
3. **[15]** Navedi in dokaži zadostni pogoj za obstoj lokalnega maksimuma vsaj 2-krat odvedljive funkcije f v stacionarni točki a .

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
28. 6. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.

1. [20] Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije

$$f(x) = \frac{1}{\cos x - \cos^2 x}$$

na intervalu $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$.

2. [20] S pomočjo potenčne vrste poišči rešitev diferencialne enačbe

$$3y'' + y' = 1.$$

3. [20] Reši matrično enačbo

$$2X = (A + BX^T)^T,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

UM FKKT
Kemijaska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
28. 6. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*
1. **[15]** Navedi in dokaži ter geometrijsko interpretiraj izrek o srednji vrednosti določenega integrala. (Dokaži tudi lemo, ki je nujna za dokaz tega izreka.)
 2. **[10]** Navedi primer Lagrangeove diferencialne enačbe (prvega reda) in jo prevedi na linearno diferencialno enačbo (prvega reda).
 3. **[15]** Naj bo A obrnljiva kvadratna matrika reda n . Podaj formulo za izračun obratne matrike A^{-1} s pomočjo prirejenke matrike A ter jo v celoti dokaži.

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
28. 6. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*

1. [20] Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujejo grafi funkcij $f(x) = \ln(x + 2)$, $g(x) = x^2 - 1$ in $h(x) = (\ln 2) \cdot (1 - x)$. Pomagaj si s skico.

2. [20] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + \frac{4xy}{x^2 + 1} = y^{\frac{1}{2}}.$$

3. [20] Poišči rešitev matrične enačbe

$$2X^T + (XA)^T = A,$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
28. 6. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- Dovoljeni pripomočki so: pisala.

1. [10] Dopolni in dokaži formuli za nedoločeno integriranje ($r \neq -1$):

$$\int \sin x \, dx =$$

$$\int x^r \, dx =$$

2. [15] Podaj primer diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti ter nastavi pripadajoči sistem enačb variacije konstant (ni ga potrebno rešiti).
3. [15] Naj bo A obrnljiva kvadratna matrika reda n . Podaj formulo za izračun obratne matrike A^{-1} s pomočjo prirejenke matrike A ter jo dokaži.

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
26. 6. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.*

1. [20] Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (x + y - z, 2x + y + 2z, 2y - 8z).$$

- (a) Določi bazi jedra in slike preslikave \mathcal{A} .
- (b) Zapiši matriko, ki pripada \mathcal{A} v bazi $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
2. [20] Valju s polmerom osnovne ploskve $r = 20\text{cm}$ in višino $h = 50\text{cm}$ povečamo višino za 1cm . Za koliko moramo spremeniti polmer osnovne ploskve, da prostornina valja ostane nespremenjena.
3. [20] S pomočjo Laplaceove transformacije poišči rešitev diferencialne enačne

$$y''' + y' = \cos x$$

pri pogojih $y(0) = y'(0) = 1$ in $y''(0) = -1$.

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
26. 6. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Naj bo \mathcal{V} dvorazsežen vektorski prostor. Dokaži izrek:
Lastna vektorja p_1, p_2 linearne preslikave $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, ki pripadata različnima lastnima vrednostima λ_1, λ_2 , sta linearno neodvisna.
2. **[15]** Definiraj lokalni ekstrem funkcije f dveh spremenljivk in dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega ekstrema (odvedljive) funkcije f v točki (a, b) .
3. **[15]** Za vektorski polji F in G , konstanti a, b ter skalarno polje f dokaži zvezi:
 - (a) **[10]** $\operatorname{rot}(aF + bG) = a \operatorname{rot}F + b \operatorname{rot}G$,
 - (b) **[5]** $\operatorname{div}(f F) = f \operatorname{div}F + F \operatorname{grad}f$.

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 6. 2013

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- Pripravi osebni dokument.
- Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljene listi s formulami.

1. [20] Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z) = (x + y - z, 2x + y + 2z, 2y - 8z).$$

- (a) Določi bazi jedra in slike preslikave \mathcal{A} .
- (b) Zapiši matriko, ki pripada \mathcal{A} v bazi $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.
2. [15] Valju s polmerom osnovne ploskve $r = 20\text{cm}$ in višino $h = 50\text{cm}$ višino povečamo za 1 cm, polmer pa zmanjšamo za 1cm. Za koliko se pri tem spremeni prostornina valja?
3. [15] S pomočjo Laplaceove transformacije poišči rešitev diferencialne enačne

$$y''' + y' = \cos x$$

pri pogojih $y(0) = y'(0) = 1$ in $y''(0) = -1$.

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 6. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. Navodila:

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*
- 1. **[10]** Dokaži, da je presek vektorskih podprostor prav tako vektorski podprostor.
- 2. **[20]** Naj bo \mathcal{V} dvorazsežen vektorski prostor. Dokaži izrek:
Lastna vektorja p_1, p_2 linearne preslikave $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, ki pripadata različnima lastnima vrednostima λ_1, λ_2 , sta linearno neodvisna.
- 3. **[20]** Definiraj lokalni ekstrem funkcije f dveh spremenljivk in dokaži potrební pogoj za obstoj lokalnega ekstrema (odvedljive) funkcije f v točki (a, b) .