UM FKKT
Kemijska tehnologija
Visokošolski strokovni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
26. 6. 2014

Čas reševanja je **75 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Dana je funkcija $f(x) = \sqrt{11 - 10x - x^2}$.
   (a) Določi naravno definicjsko območje funkcije.
   (b) Izračunaj in klasificiraj ekstreme funkcije.

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$xy' = (\sqrt{x} + 1)y + xe^{2\sqrt{x}}.$$

3. **[15]** Poišči rešitve matrične enačbe
$$(AX - 4B)^T = X^T,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Visokošolski strokovni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del pri predmetu MATEMATIKA I
26. 6. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[15]** Vpelji obratno funkcijo $f^{-1}$ od funkcije $f(x) = \log_4(x-1)$. Za $f^{-1}$ poišči definicijsko območje, zalogo vrednosti, preveri bijektivnost in skiciraj njen graf.

2. **[20]** Dokaži povezavo med določenim in nedoločenim integralom ki pravi, da je določeni integral $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ odvedljiva funkcija, pri čemer je $F'(x) = f(x)$.

3. **[15]** Za obrnljivo matriko $A$ (reda $n$) velja zveza:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T .$$

Na poljubni obrnljivi matriki reda 3 preveri zgornjo zvezo.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
*WolframA:* DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
24. 6. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Poišči kompleksno število, ki je enako oddaljeno od kompleksnih števil $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$ in $z_3 = 3 + 2i$.

   Rešitev: upoštevamo lastnost absolutne vrednosti kompleksnega števila in dobimo $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$. Iz tega sledi $z = \frac{7+3i}{4}$.

2. **[15]** Za katera realna števila $x$ vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2x}{1-x} \right)^n$$

   konvergira?

   Rešitev: konvergira za $x \in (-1, \frac{1}{3})$, sicer divergira.

3. **[15]** Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^{-x}-2}{1-\sqrt[3]{x^2}} \quad ; & x < -1 \\ a \quad ; & x = -1 \\ \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi \log_2(x^2+2x+2)} \quad ; & x > -1 \end{cases}.$$

   Ali obstaja takšno realno število $a$, da bo $f$ zvezna na množici realnih števil? Če obstaja, ga poišči.

   Rešitev: ne obstaja, saj je $\lim_{x\downarrow -1} f(x) = 3 \ln 2$ in $\lim_{x\uparrow -1} f(x) = \pi \ln 2$.

4. **[15]** Določi intervale konveksnosti in konkavnosti funkcije $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\sin(2x)}$.

   Rešitev: na celotnem definicijskem območju je konkavna.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
24. 6. 2013

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dani sta množici $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x - \frac{3}{2} > 0\}$ in $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+2}{x}\}$. Če obstajajo, poišči infimum, supremum ter minimum, maksimum množic $A \cap B$ in $A \cup B$.

2. **[10]** Dokaži, da za konvergentni zaporedji $(a_n)$ in $(b_n)$ z limitama $A$ in $B$ velja
$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$
pri čemer je $b_n \neq 0$ za vsako naravno število $n$ in $B \neq 0$.

3. **[10]** Po definiciji odvoda izpelji odvod funkcije $f(x) = \tan x$. (Pomoč: adicijski izrek za tangens se glasi $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$).

4. **[10]** S predpisom podaj primer funkcije, ki ima natanko tri lokalne ekstreme. Za izbrani primer poišči definicijsko območje, zalogo vrednosti ter utemelji ali je funkcija bijektivna ali ne.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
*WolframA* DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
24. 6. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Poišči vsa realna števila, za katera velja
$$|x^2 - 9| - 2x \leq 6.$$
Rešitev: $x \in \{-3\} \cup [1, 5]$.

2. **[15]** Zaporedje $(a_n)$ je podano s splošnim členom $a_n = \frac{2n}{1-n}$. Od katerega člena naprej se vsi členi zaporedja razlikujejo od limitne vrednosti za manj od $\frac{1}{100}$?
Rešitev: od 201. mesta naprej.

3. **[15]** Dana je funkcija $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-x^2} - \sqrt{2}}{\ln(2+x)}$.
   (a) Določi naravno defincijsko območje funkcije $f$.
   (b) Določi obnašanje funkcije $f$ na robu definicijskega območja.

   Rešitev: $D_f = (-2, -1) \cup (-1, \sqrt{6})$, $\lim\limits_{x\downarrow -2} = 0$, $\lim\limits_{x\uparrow -1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\downarrow -1} = \infty$, $\lim\limits_{x\uparrow \sqrt{6}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{\ln(\sqrt{6}+2)}$.

4. **[15]** Dana je funkcija $f(x) = e^{-2x}(4x^2 - x)$. Določi intervale naraščanja in padanja funkcije $f$.
Rešitev: za $x \in (\frac{5-\sqrt{17}}{8}, \frac{5+\sqrt{17}}{8})$ je $f$ naraščajoča, sicer je padajoča.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
24. 6. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[5]** Dana je množica $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{3}{2} > 0\}$ in množica celih števil $\mathbb{Z}$. Če obstajata, poišči infimum in minimum preseka $A \cap \mathbb{Z}$.

2. **[15]** Vpelji obratno funkcijo $f^{-1}$ od funkcije $f(x) = 2^x$. Za $f^{-1}$ poišči definicijsko območje, zalogo vrednosti, preveri bijektivnost in skiciraj njen graf.

3. **[10]** Izpelji pravilo za odvod razlike dveh odvedljivih funkcij.

4. **[10]** S predpisom podaj primer funkcije, ki ima natanko en lokalni ekstrem in je konkavna. Konkavnost funkcije računsko preveri ter ugotovi, ali je monotona. Odgovor utemelji.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
*WolframA:* DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 6. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena. Rešene naloge naloge so strogo prepovedane.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor natančno utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Dani sta funkciji $f(x) = 4x^4e^{-x^2}$ in $g(x) = 24(x\operatorname{asin}(1-x)+1)$. Ali je ploščina, ki je pod grafom funkcije $g$ na intervalu $[0,1]$ enaka kvadratu ploščine, ki je pod grafom funkcije $f$ na celotni realni osi? Računsko utemelji.

   Rešitev: Za $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ upoštevamo, da je $f$ soda, vpeljemo novo spremeljivko $t = x^2$ in se skličemo na funkcijo Gama; $2\int_0^\infty f(x)\,dx = 3\sqrt{\pi}$. Integral $\int_0^1 g(x)\,dx$ izračunamo z integracijo po delih; $\int_0^1 g(x)\,dx = 9\pi$.

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$y' + 3xy = xy^2 + 2x.$$

   Pomoč: Ena od rešitev diferencialne enačbe je konstantna funkcija.

   Rešitev: Riccatije diferencialna enačba; $y_P = 2$, $y = y_P + 2$, $z = \frac{1}{ce^{\frac{x^2}{2}}+1}$.

3. **[20]** Poišči rešitve matrične enačbe

$$A(X-4B)^T = (XB)^T,$$

   kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev: $X = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 12 \\ 0 & \frac{56}{3} & -\frac{16}{3} \\ 0 & 16 & 4 \end{bmatrix}$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 6. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Na množici $M_n(\mathbb{R})$ kvadratnih matrik reda $n$ je novo množenje $\star$ definirano tako, da istoležne elemente običajno zmnožimo:

$$(A \star B)_{ij} = (A)_{ij}(B)_{ij},\ \forall\, i,j = 1,2,\ldots,n\,.$$

   (a) **[5]** Poišči enotsko matriko za operacijo $\star$.

   (b) **[5]** Katere matrike iz $M_n(\mathbb{R})$ so obrnljive glede na $\star$?

2. **[5]** Dokaži pravilo za nedoločeno integriranje:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx,\ k \in \mathbb{R}\,.$$

3. **[15]** Dokaži trditev:
Če je $f$ integrabilna na $[a,b]$, tedaj $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\text{delitev}\,D$ taka, da je $S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon$.

4. **[10]** Podaj primer Lagrangeove diferencialne enačbe prvega reda in jo z vpeljavo ustrezne nove spremenljivke prevedi na linearno diferencialno enačbo.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
*WolframA:* DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 6. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena. Rešene naloge naloge so strogo prepovedane.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor natančno utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Izračunaj ploščino lika pod grafom funkcije $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ na intervalu, kjer je funkcija definirana.

   Rešitev: $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$.

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$xy' = (\sqrt{x} + 1)y + xe^{2\sqrt{x}}.$$

   Rešitev: Linearna diferencialna enačba, $y = e^{2\sqrt{x}}(cx + x\ln x)$.

3. **[20]** Poišči rešitve matrične enačbe

$$(AX - 4B)^T = X^T,$$

   kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Rešitev: $X = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 4 \\ 16 & \frac{14}{3} & -\frac{20}{3} \\ 4 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
26. 6. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Na množici $M_3(\mathbb{R})$ kvadratnih matrik reda 3 je novo množenje $\star$ definirano tako, da istoležne elemente običajno zmnožimo:

$$(A \star B)_{ij} = (A)_{ij}(B)_{ij}, \; \forall\, i, j = 1, 2, 3\,.$$

   (a) **[5]** Poišči enotsko matriko za operacijo $\star$.

   (b) **[5]** Katere matrike iz $M_3(\mathbb{R})$ so obrnljive glede na $\star$?

2. **[5]** Dokaži pravilo za nedoločeno integriranje:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \; k \in \mathbb{R}\,.$$

3. **[15]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo fomulo.

4. **[10]** Podaj primer linearne diferencialne enačbe drugega s konstantnimi koeficienti, ki se jo da rešiti samo z variacijo konstant. Zapiši pripadajoči sistem variacije konstant (ni ga potrebno rešiti).

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
*Mathematica, WolframA:* DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
24. 6. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Dana je množica $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Pokaži, da je $U$ vektorski podprostor v prostoru realnih $2 \times 2$ matrik $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Poišči bazo in dimenzijo $U$.

Rešitev: Je podprostor, saj imamo matrike oblike $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a-b \end{bmatrix}$; $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$, $\dim(U) = 2$.

2. **[20]** Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(2y)}$.

Rešitev: stacionarne točke $x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$; $y = k_2\frac{\pi}{2}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$; $A = -(-1)^{k_1}, B = 0, C = \frac{4(-1)^{k_1}(2(-1)^{k_2}+3)}{(2+(-1)^{k_2})^3}$.

3. **[20]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$y'(t) + \int_0^t x(\tau)\, d\tau = e^{-t}$$
$$-y''(t) + x'(t) = 2$$

pri pogoju, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ in $x(0) = 2$.

Rešitev: $x = -e^{-t}(-3 + 2e^t + t)$, $y = -2 + 2e^{-t} + 2t + e^{-t}t - t^2$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
24. 6. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Podaj primer matrike reda 3, ki ni diagonalizabilna in utemelji svojo izbiro.
2. **[10]** Kako računamo odvod funkcije $y = f(x_1, x_2, x_3)$, kjer so $x_1, x_2, x_3$ odvisne od novih spremenljivk $u$ in $v$ ter navedi kdaj sploh je $y$ odvedljiva funkcija?
3. **[10]** Izpelji formulo za računanje dolžine loka krivulje v prostoru $\mathbb{R}^3$, če je krivulja podana parametrično.
4. **[10]** Izpelji Laplaceovo transformiranko funkcije $f(t) = t^a$, $a \in (-1, \infty)$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
24. 6. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

**Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Dana je linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$\mathcal{A}(x, y, z) = (5x - 9y + 3z, 3x - 7y + 3z, 2z).$$
   (a) Poišči bazo slike linearne preslikave $\mathcal{A}$.
   (b) Poišči lastne vektorje in lastne vrednosti preslikave $\mathcal{A}$.

   Rešitev: $\mathcal{B}_{Im\mathcal{A}} = \{(5,3,0), (-9,-7,0), (3,3,2)\}$; $\lambda_1 = -4$, $v_1 = (1,1,0)$, $\lambda_2 = 2$, $v_1 = (-1,0,1)$, $\lambda_3 = 2$, $v_1 = (3,1,0)$.

2. **[20]** Dana je funkcija $f(x, y) = xe^{\frac{y}{x}}$.
   (a) Določi naravno defincijsko območje funkcije $f$ in ga skiciraj.
   (b) Preveri, ali je $g(x, y) = xf_x(x, y) + yf_y(x, y)$ konstanta.
   (c) Razvij funkcijo v Taylorjevo vrsto do členov reda 2. reda v okolici točke $(1, 0)$.

   Rešitev: $D_f = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R}$; $g(x, y) = f(x, y)$; pomagaj si z WolframAlpha $Series[xe^(y/x), x, 1, 2, y, 0, 2]$.

3. **[15]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb
$$y'' + y = \sin t$$
$$y' + x' = 1$$
   pri pogoju, $y(0) = 1$ in $x(0) = y'(0) = 0$.

   Rešitev: $y = (1 - \frac{t}{2}) \cos t + \frac{1}{2} \sin t$, $x = t - 1 - y$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
24. 6. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[15]** Dokaži trditev:
   Če je $\mathbf{W}$ vektorski podprostor končno razsežnega vektorskega prostora $\mathbf{V}$, tedaj je $\dim(\mathbf{W}) \leq \dim(\mathbf{V})$.

2. **[10]** Kako računamo odvod funkcije $y = f(x_1, x_2, x_3)$, kjer so $x_1, x_2, x_3$ odvisne od novih spremenljivk $u$ in $v$ ter navedi kdaj sploh je $y$ odvedljiva funkcija?

3. **[5]** Zapiši Jacobijevo matriko funkcije $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

4. **[20]** Izpelji naslednji pravili Laplaceove transformacije:

   (a) **[10]** $\mathcal{L}(t^n f(t))(z)$,

   (b) **[10]** $\mathcal{L}(f'''(t))(z)$.