Izpiti poletnega izpitnega obdobja

Rešitve nalog niso popolne in obstaja možnost tipkarskih napak.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
18. 6. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga nedvoumno ter jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Preveri, če za poljubno naravno število n velja
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$
Rešitev: ne velja.

2. **[15]** Nad množico kompleksnih števil poišči vse rešitve enačbe
$$4z^4 - 16z^3 + 61z^2 - 90z + 50 = 0,$$
če veš, da je ena od rešitev $z_1 = 1 + 3i$. Ali ležijo vse rešitve na isti krožnici s središčem v izhodišču? Utemelji!
Rešitev: postopek je opisan v učbeniku (glej rešene naloge v poglavju Kompleksna števila).
$z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = \frac{2+i}{2}$, $z_3 = \frac{2.i}{2}$.

3. **[15]** Ali obstaja tak polinom p prve stopnje, do bo funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} (1+2x^2)^{\frac{1}{x(2^{2x}-1)}} & ; \quad x < 0 \\ p(x) \quad ; & 0 \le x \le 8 \\ \frac{\ln(x-7)}{\sqrt[3]{x}-2} \quad ; & x > 8 \end{cases},$$
zvezna na množici realnih števil? Če obstaja, ga določi.
Rešitev: postopek je opisan v učbeniku (glej rešene naloge v poglavju Limita in zveznost funkcije).
Da obstaja; s pomočjo levih in desnih limit dobimo $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = e^{\frac{2}{\ln(4)}}$ in $\lim_{x\downarrow 8} f(x) = 12$. Na podlagi tega ni več težko določiti p oz. $p(x) = ax + b$.

4. **[15]** Razvij funkcijo f, $f(x) = x\ln(2+x)$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}.$$

Vsak korak natančno utemelji.

Namig: za vsoto vrste poišči ustrezno realno vrednost in jo vstavi v prej izračunano funkcijo oziroma Taylorjevo vrsto.

Rešitev: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n \cdot 2^n}$. Če v dobljeno Taylorjevo vrsto vstavimo $x = 1$, dobimo želeno vrsto in zato je vsota $\ln(3)$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
18. 6. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Navedi, vsakega posebej, potrebni in zadostni pogoj za obstoj lokalnega maksimuma v točki a vsaj 2-krat odvedljive funkcije f.

2. **[10]** Preslikava $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je podana s predpisom:

$$f((n,m)) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; \quad n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -\frac{n+1}{2} & ; \quad n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   a) [5] Utemelji, zakaj je f preslikava in ugotovi, ali je f injektivna preslikava.

   b) [5] Ali obstaja f^{-1}? Utemelji odgovor.

3. **[15]**

   a) [5] Dokaži izrek:
   Naj bo f zvezna v točki b in $\lim_{x \to a} g(x) = b$. Potem je

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(b)\,.$$

   a) [10] V izreku pod točko a) naj bodo $f(x) = 4x$, $g(x) = x^2$ ter $a = 0$. V tem izreku za dano okolico $\varepsilon = 10^{-4}$ iz zveznosti funkcije f poišči ustrezno okolico δ točke a.

4. **[10]** Izpelji formulo

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\,\sin\varphi\,.$$

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
18. 6. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga nedvoumno ter jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[10]** Izračunaj $z = \frac{x^3}{x+2y}$, če je $x = 2,05 \pm 0,10$ in $x = 0,52 \pm 0,02$.

2. **[15]** Dani sta kompleksni števili $z_1 = 2+i$ in $z_2 = 1-2i$. Izračunaj razdaljo med kompleksnima številoma z_1 in z_2, preveri, da sta enako oddaljeni od izhodišča ter določi enačbo krožnice na kateri ležita. Vse to natančno nariši v kompleksni ravnini.

   Rešitev: razdalja med njima je $|z_1 - z_2| = \sqrt{10}$, od izhodišča sta oddaljeni $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$, enačba krožnice je $a^2 + b^2 = 5$.

3. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{\ln(x^2-3)}{\sqrt{x+2}-2}.$$

   (a) Poišči naravno definicijsko območje funkcije f.

   (b) Določi obnašanje funkcije f na robu definicijskega območja.

   Rešitev: $D_f = [-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2) \cup (2, \infty)$; $\lim\limits_{x \downarrow -2} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \uparrow -\sqrt{3}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \downarrow \sqrt{3}} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 16$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

4. **[15]** Izračunaj pod kakšnim kotom seka krivulja, ki je podana z enačbo $x^3 - y^3 = a^3$, $a \in \mathbb{R}$, ordinatno os. V tej točki izračunaj enačbo tangente.

   Rešitev: krivulja seka ordinatno os pod pravim kotom. Enačba tangente je $y = -a^3$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
18. 6. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** S predpisom podaj primer funkcije, ki ima v točki $x = 0$ limito, ni pa zvezna v tej točki.

2. **[15]** Preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ je podana s predpisom

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & ; \quad n = 2k,\ k \in \mathbb{N}, \\ -\frac{n+1}{2} & ; \quad n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

   a) **[5]** Utemelji, zakaj je f preslikava.

   b) **[5]** Ali je f injektivna preslikava? Utemelji odgovor.

   c) **[5]** Ali obstaja f^{-1}? Utemelji odgovor.

3. **[15]**

   a) **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki pove, kdaj je vsaj 2-krat odvedljiva fukcija konkavna na intervalu I.

   a) **[5]** Podaj primer funkcije, ki je na eni polovici definicijskega območja konkavna, na drugi polovici pa konveksna.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
23. 6. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[25]**

   (a) **[15]** Izračunaj ploščino območja pod grafom funkcije med dvema zaporednima lokalnima minimumoma funkcije f, $f(x) = \frac{1}{2+\sin(2x)}$.

   (b) **[10]** Ali konvergira integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}-x^2}\mathrm{d}x$? Če konvergira, ga izračunaj. Vsak korak utemelji!

   Rešitev:

   (a) pomagaj si z zapisom

   $2+\sin(2x) = 2(1+\sin x\cos x) = 2(\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x\cos x) = 2\cos^2 x(1+\tan^2 x+\tan x)$.

   Sedaj vpelji novo spremenljivko $t = \tan x$. Posledično $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{2+\sin(2x)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

   (b) divergira, saj $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4+1}-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^\infty x(\sqrt{x^4+1}+x^2)\mathrm{d}x = \infty$.

2. **[20]** Poišči splošno rešitev difrencialne enačbe

$$2y'(x-\ln(y')) = y - \frac{1}{2}(y')^2.$$

Rešitev: Lagrangeova DE;

$$\begin{aligned}
y &= 2y'x - 2y'\ln y' + \frac{1}{2}(y')^2 (\text{ vpeljemo } t = y')\\
y &= 2tx - 2t\ln t + \frac{1}{2}(t)^2 (\text{ ustrezno odvajamo })\\
tx' &= 2x + 2tx' - 2\ln t - 2 + t\\
-tx' &= 2x - 2\ln t - 2 + t
\end{aligned}$$

Sedaj rešimo Linearno DE.

3. **[15]** Izračunaj determinanto matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev: $\det(A) = 2^n$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
23. 6. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Pokaži, da za množenje matrik ustreznih redov velja lastnost asociativnosti.

2. **[15]** Dokaži trditev:

   Če je funkcija f integrabilna na $[a, b]$, tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšna delitev D intervala $[a, b]$, da je

   $$S_D(f) - s_D(f) < \varepsilon\,.$$

3. **[15]** Utemelji, zakaj je $y_1 = \mathrm{e}^{\lambda x} x^2$ ena od rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe tretjega reda s konstantnimi koeficienti, če ima pripadajoči karakteristični polinom ničlo tretje stopnje.

4. **[5]** Podaj primer linearne diferencialne enačbe drugega reda, ki jo lahko rešimo s pomočjo razvoja v potenčno vrsto z nastavkom

   $$y = x^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n\,.$$

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
23. 6. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem grafa funkcije f, $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2} + 2$, okoli abscisne osi na naravnem definicijskem območju funkcije f.

   Rešitev: $V = \pi \int_{-2}^{4} (\sqrt{8 + 2x - x^2} + 2)^2 \mathrm{d}x = \pi(60 + 18\pi)$.

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$xy' \cos\left(\frac{y}{x}\right) = y \cos\left(\frac{y}{x}\right) - 2x.$$

   Rešitev: Homogena DE;

$$\begin{aligned} y' \cos\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{y}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) - 2 \\ (z'x + z) \cos z &= z \cos z - 2 \\ z'x \cos z &= -2 \\ z' \cos z &= -\frac{2}{x} \\ \sin z = -2 \ln x + \ln C. \end{aligned}$$

   Do konca ni več težko izraziti y.

3. **[20]** Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Rešitev: $\lambda_1 = 2$, $\vec{p}_1 = (0, 1, 2)$; $\lambda_{2,3} = -1$, $\vec{p}_2 = (-1, 1, 2)$, $\vec{p}_3 = (0, 0, 1)$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
23. 6. 2015

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Pokaži, da za seštevanje in množenje matrik ustreznih redov velja lastnost distibutivnosti.
2. **[10]** Zakaj iščemo lastne vrednosti kvadratne matike A s pomočjo pogoja $\det(A - \lambda I) = 0$?
3. **[10]** Z uporabo določenega integrala izpelji formulo za izračun prostornine rotacijskega telesa, ki nastane pri vrtenju grafa funkcije f na $[a, b]$.
4. **[10]** Utemelji, kako se izraža rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti, če ima pripadajoči karakteristični polinom ničlo druge stopnje.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
Mathematica, WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
18. 6. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[25]** Dana je množica

$$U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p'(-1) + p''(1) = 0,\ p''(-1) + p'''(2) = 0\}$$

in preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(p(x)) = (p'(0), p''(1), p'(2) - 2p''(1))$.

(a) Ali je U vektorski podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}_3[x]$? Če je, določi njegovo bazo in dimenzijo.

(b) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna, določi bazi jedra in slike ter določi eksplicitni predpis preslikave $\mathcal{A}$ za elemente iz U.

(c) Izračunaj $(f \circ \mathcal{A})(x^2 + x)$, če je $f : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$, $f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & z \\ -z & x \end{bmatrix}$.

Rešitev:

(a) je vektoski podprostor $\mathbb{R}_3[x]$, $\mathcal{B}_U = \{1, x^3 - 9x\}$ (saj za $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dobimo pogoje $b = 0$ in $c = -9a$), $\dim U = 2$.

(b) je linearna; $\mathcal{A}(p) = (c, 6a+2b, c)$, $\mathcal{B}_{\mathcal{K}er(\mathcal{A})} = \{1, x^3 - 3x^2\}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{I}m(\mathcal{A})} = \{(1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$; če je $p \in U$, tedaj $\mathcal{A}(p) = (-9a, 6a, -9a)$.

(c) $(f \circ \mathcal{A})(x^2 + x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. **[20]** Preslikava f je podana s predpisom

$$f(x, y) = \ln(\sqrt{2y^2 - x^2 - 1}).$$

(a) Natančno skiciraj naravno definicijsko območje funkcije f.

(b) Ali ima funkcija lokalne ekstreme? Če jih ima, jih poišči.

(c) V kateri smeri odvod funkcije f v točki $(0, \sqrt{2})$ najhitreje narašča?

Rešitev:

(a) namig: pomagaj si s hiperbolo. (b) ne (glej D_f). (c) v smeri $\vec{s} = (0, 1)$.

3. **[15]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x' &= -x + 2y - z \\ y' &= 3x + z \\ z' &= 6x + 2y + z \end{aligned}$$

pri pogojih $x(1) = 0$, $y(1) = 0$ in $z(1) = 1$.

Rešitev: najprej izračunamo $\lambda_1 = 2$, $\vec{p}_1 = (0, 1, 2)$; $\lambda_{2,3} = -1$, $\vec{p}_2 = (-1, 1, 2)$, $\vec{p}_3 = (0, 0, 1)$, nato

$$\vec{x} = C_1 e^{2t} \vec{p}_1 + C_2 e^{-t} \vec{p}_2 + +C_3 \left(t e^{-t} \vec{p}_2 + e^{-t} \vec{p}_3 \right).$$

V nadaljevanju C_1, C_2 in C_3 poiščemo tako, da v zgornjo rešitev vstavimo $t = 1$ in enačimo z vektorjem $(0, 0, 1)$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
18. 6. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dokaži trditev:
   Naj bo A kvadratna matrika reda n. Tedaj je A diagonalizabilna, če so lastni vektorji matrike A linearno neodvisni.
2. **[10]** Izpelji in utemelji postopek iskanja vezanih ekstremov funkcije dveh spremenljivk.
3. **[5]** Navedi in dokaži linearnost operacije rotorja na vektorskih poljih.
4. **[15]**
   a) **[10]** Izpelji enačbo tangente na krivuljo K, ki je določena s presekom dveh implicitno podanih ploskev.
   b) **[5]** Katera krivulja je določena s presekom ploskev $f(x, y) = x^2 + y^2$ in $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$?

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime in priimek:

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
18. 6. 2015

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Dani sta množici
$$U = \{1 + x, 1 - x, 1 + x^2\} \text{ in } V = \{2 - x, 1 - x^2, x - 2x^2\}.$$
   (a) Katera od zgoraj navednih množic je baza prostora polinomov stopnje dva? Utemelji!
   (b) Ortogonaliziraj zgoraj navedeno bazo s skalarnim produktom, ki je definiran s
$$p, q \in \mathbb{R}_2[x], \quad < p, q >= \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$
   Rešitev:
   (a) U je, V ni.
   (b) glej v učbeniku Gram–Schmidtov postopek ortogonalizacije.

2. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + 2y^2 - 1})$.
   (a) Izračunaj naravno definicijsko območje in ga skiciraj.
   (b) Ali ima funkcija lokalne ekstreme? Če jih ima, jih poišči.
   (c) Ali velja enakost $x^2 f_{yy}(x, y) - xy f_{xy}(x, y) = \frac{x^4 - x^2}{(x^2+2y^2-1)}$.

   Vsak korak utemelji!

   Rešitev: (a) pomagaj si z elipso. (b) ne. (c) ne.

3. **[15]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y + z\\ \dot{y} &= 4x - 3y + 2z\\ \dot{z} &= 4x - 5y + 4z.\end{aligned}$$
   Rešitev: $\lambda_1 = 2$, $\vec{p}_1 = (1, 2, 3)$; $\lambda_2 = -1$, $\vec{p}_2 = (0, 1, 1)$; $\lambda_3 = 1$ $\vec{p}_3 = (1, 2, 2)$.
$$\vec{x} = C_1 e^{2t}\vec{p}_1 + C_2 e^{-t}\vec{p}_2 + C_3 e^t \vec{p}_3$$

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime in priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
18. 6. 2015

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Navedi in dokaži Schwarzovo neenakost.
2. **[15]** Dokaži izrek:
   Če je množica $\mathcal{B}$ baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$, tedaj lahko vsak vektor $x \in \mathcal{V}$ na enoličen način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$.
3. **[10]** Navedi in dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega ekstrema parcialno odvedljive funkcije f v točki $x_0 \in \mathbb{R}^n$.
4. **[15]**
   a) **[5]** Definiraj Laplaceovo transformiranko funkcije f.
   b) **[10]** Izpelji Laplaceovo tansformiranko drugega odvoda funkcije f.