Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA 1
Računski del
21. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Poišči realne rešitve enačbe
$$|x| - 2|x-4| = 1.$$

2. **[10]** Poišči lokalne ekstreme funkcije f, $f(x) = xe^{2x}$.

3. **[10]** Izračunaj
$$\int_0^1 \left(2x\sqrt{x^2+1} + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) \mathrm{d}x.$$

4. **[10]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$x^3 y' = y.$$

5. **[10]** Reši matrično enačbo
$$AX = 3I,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA 1
Teoretični del
21. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Definiraj limito zaporedja ter podaj primer konvergentnega in divergentnega zaporedja.
2. **[15]** Navedi Newton-Leibnizovo formulo in jo dokaži.
3. **[15]** Zapiši linearno diferencialno enačbo prvega reda in opiši potek reševanja le-te.
4. **[10]** Navedi homogeni sistem linearnih enačb razsežnosti 4×4, ki ima enolično rešitev in ga reši.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
16. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Za katera naravna števila n je

$$z = ((1+i)^n + (1-i)^n)^2$$

realno število? Odgovor utemelji. Rešitev: pomagaj si s polarnim zapisam kompleksnega števila; za vsak $n \in \mathbb{N}$ je z realno število.

2. **[20]** Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \ln^2(1-x) + 1 \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{2-x} & ; x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Določi naravno definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f ter skiciraj graf funkcije f.

(b) Skiciraj graf funkcije g. Ali je g zvezna?

(c) Če obstajajo, poišči $f \circ g$ in $g \circ f$.

Rešitev: (a) $f : (-\infty, 1) \to [1, \infty)$, (b) je zvezna, (c) pomagaj si s skripto.

3. **[15]** Ali vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{(n^2-1)^2}$$

konvergira? Če konvergira, izračunaj njeno vsoto. Rešitev: konvergira; pomagaj si s parcialnimi ulomki; vsota vrste je $\frac{11}{8}$.

4. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}.$$

(a) Poišči lokalne in globalne ekstreme funkcije f.

(b) Izračunaj $\lim_{x \to 0} (1 - f(x))^{\frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{x}}}}$.

Rešitev: a) globalni v točki $(0, 0)$; b) $e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
16. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Z matematično indukcijo dokaži pravilo za odvod potenčne funkcije x^n.

2. **[10]** Naj bo p trditev, da je f strogo padajoča funkcija na (a, b), ter q trditev, da je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Dokaži tisto(e) trditev(trditve), ki je(so) resnične:

   a) $p \wedge q$,

   b) $p \Rightarrow q$,

   c) $q \Rightarrow p$.

3. **[10]**

   (a) **[5]** Zapiši definicijo limite zaporedja.

   (b) **[5]** Ali drži trditev, da če ima zaporedje natanko eno stekališče, tedaj je to konvergentno zaporedje. Utemelji odgovor.

4. **[10]** Izpelji Eulerjevo formulo in pokaži, da za kompleksno število z velja

$$z = r\mathrm{e}^{i\varphi}\,.$$

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
16. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Nad množico kompleksneh števil poišči rešitve neenačbe

$$z^3 = \frac{1+3i}{1-2i}.$$

Namig: enačbo preoblikujemo v $z^3 = -1 + i$ in uporabimo formulo za korenjenje kompleksnega števila.

2. **[20]** Izračunaj

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^3-1}-\sqrt{7}}{\ln(5-2x)} =$

(b) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1-2x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin(2x)}} =$

Rešitev: (a) $-\frac{3}{\sqrt{7}}$, (b) $e^{-\frac{3}{2}}$.

3. **[10]** Določi naravno definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcije f,

$$f(x) = \ln(5e^2 - 4ex - x^2),$$

ter skiciraj graf funkcije f.

Rešitev: $D_f = (-5e, e)$, $Z_f = (-\infty, \ln(9e^2)]$.

4. **[15]** Razvij funkcijo f, $f(x) = x \cdot \arctan(1-x)$, v Taylorjev polinom drugega reda v okolici $a = 0$. Dobljeni polinom tudi natančno nariši v koordinatnem sistemu.

Rešitev: $p_2(x) = \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2}x^2$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
16. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dokaži trditev, da je vsako padajoče in navzdol omejeno zaporedje tudi konvergentno.

2. **[10]** Naj bosta a in b izmerjeni količini z napakama δ_a in δ_b. Poišči absolutno napako $|\Delta c|$, če je $c = a + b$.

3. **[15]**

   (a) **[10]** Navedi in dokaži izrek o odvodu inverzne funkcije.

   (b) **[5]** Izpelji odvod funkcije arkus tangens.

4. **[5]** Podaj primer funkcije, ki ma ničlo druge stopnje v točki $x = -1$ in pol v točki $x = 1$. Skiciraj graf te funkcije (ni potrebno upoštevati pomena prvega in drugega odvoda).

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
21. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj
$$\int \sqrt{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$
Namig: $\int \sqrt{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x}}{=} \int 2t\sqrt{t^2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{2t^3+2t^2}{\sqrt{t^2+t}}\mathrm{d}t$, nadaljuj z nastavkom.

2. **[15]** Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da graf funkcije f, $f(x) = \sqrt{x}\ln(5-x^2)$, zavrtimo okoli osi x med ničlama funkcije f.
Rešitev:
$$V = \pi\int_0^2 (x\ln^2(5-x^2))\mathrm{d}x \overset{t=5-x^2}{=} -\pi\int_5^1 \ln^2(t)\mathrm{d}t.$$
To izračunamo s pomočjo per-partesa in posplošenega integrala. $V = \pi(5\ln^2 5 - 10\ln 5 + 10)$.

3. **[15]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$\frac{y}{(y')^2} = x-1.$$
Rešitev: Dva načina. 1.) Lagrangeova DE; $x(t) = \frac{C+t^2-2t}{(t-1)^2}$ $y(t) = (x(t)-1)t^2$. 2.) Prepoznaj DE z ločljivima spremenljivkama.

4. **[15]** V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb
$$\begin{aligned} ax+y-z&=0\\ -x+ay+z&=a\\ x-y+az&=2a. \end{aligned}$$
Rešitev: če $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x=\frac{3a-1}{a^2+3}$, $y=\frac{a^2-2a-1}{a^2+3}$, $z=\frac{2a^2+a+1}{a^2+3}$; če je $a=0$, $y=x$, $z=-x$, $x\in RR$.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
21. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**
   (a) **[5]** Zapiši definicijo integrabilnosti funkcije f na $[a, b]$.
   (b) **[5]** S predpisom podaj primer neintegrabilne funkcije na $[1, 2]$.

2. **[10]** Podaj konkretni primer Eulerjeve diferencialne enačbe tretjega reda in jo prevedi na ustrezno linearno diferencialno enačbo.

3. **[10]** Izpelji formulo za prostornino rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije f okoli osi x.

4. **[10]** Naj bo p trditev, da je $\det(A) = 0$, ter q trditev, da je sistem linearnih enačb $Ax = 0$ netrivialno rešljiv. Dokaži tisto(e) trditev(trditvi), ki je(sta) resnični:

   a) $\neg q \Rightarrow p$,

   b) $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
21. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Izračunaj

   (a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln(1-2x)^2}}{2x-1}\mathrm{d}x$,

   (b) $\displaystyle\int \frac{-2x-11}{(x-1)(x^2+2x+10)}\mathrm{d}x$.

   Namig: a) Vpelji novo spremenljivko $t = \ln(1-2x)$; b) parcialni ulomki.

2. **[20]** Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$2yy' + y^2 - xe^{2x} = 0.$$

   Rešitev: Bernoullijeva DE; $y = \frac{1}{Ce^{-x}+\frac{1}{3}xe^{2x}-\frac{1}{9}e^{2x}}$.

3. **[20]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 3y\\ \dot{y} &= -2x + y\\ \dot{z} &= x - 2y - z.\end{aligned}$$

   Rešitev: $\lambda_1 = 4$, $p_1 = (4,-1,-1)$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $p_2 = (0,0,1)$, $p_3 = (-1,-1,0)$; rešitev: $C_1e^{4t}p_1 + C_2e^{-t}p_2 + C_3e^{-t}(tp_2 + p_3)$.

Vpsina številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
21. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Izpelji formulo za računanje nedoločenega integrala
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}\,.$$
2. **[10]** Pojasni, kje se uporablja metoda variacije konstant ter jo na kratko razloži.
3. **[10]** Izpelji postopek za iskanje rešitve sistema diferencialnih enačb $\vec{x}' = A\vec{x}$.
4. **[10]** Naj bo p trditev, da je $\det(A) = 0$, ter q trditev, da je sistem linearnih enačb $Ax = 0$ netrivialno rešljiv. Dokaži tisto(e) trditev(trditvi), ki je(sta) resnični:

   a) $p \Leftrightarrow q$,

   b) $\neg q \Leftarrow\ p$.

Vpisna številka　　Priimek, ime　　Smer K KT　　WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
16. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Za vektorski prostor $V = \{p \in R_2[x] \mid p'(-1) = 0\}$ poišči ortonormirano bazo glede na skalarni produkt
$$< p, q >= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$
Rešitev: najprej poišči bazo $\mathcal{B}_V = \{1, x^2 + 2x\}$, nato jo ortonormiraj.

2. **[15]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} - (\vec{a}\vec{x})\vec{a}, \text{ kjer je } \vec{a} \in \mathbb{R}^3.$$
(a) Linearni tranformaciji $\mathcal{A}$ priredi matriko.
(b) Določi jedro in sliko transformacije $\mathcal{A}$ za $\vec{a} = (1, 1, 0)$.

Rešitev: a) naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $A = \begin{bmatrix} 1 - a_1^2 & -a_1a_2 - a_3 & a_2 - a_1a_3 \\ a_3 - a_1a_2 & 1 - a_2^2 & -a_1 - a_2a_3 \\ -a_2 - a_1a_3 & a_1 - a_2a_3 & 1 - a_3^2 \end{bmatrix}$. b) jedro je trivialno, slika je $\mathbb{R}^3$.

3. **[20]** Poišči ekstreme funkcije f,
$$f(x, y) = \ln(x^2 + x + 2y^2 + 1),$$
pri pogoju $x^2 + 2y^2 \le 1$.
Namig: nalogo rešimo v dveh korakih. Najprej poiščemo ekstreme f pri pogoju $x^2+2y^2 < 1$; $T(-\frac{1}{2}, 0)$. Nato poiščemo vezani ekstrem ekstreme f pri pogoju $x^2 + 2y^2 = 1$; $T_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ in $T_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$.

4. **[15]** Funkcija $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom
$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad ; & x < \frac{\pi}{4} \\ -\cos(2x) \quad ; & x \ge \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$
Razvij funkcijo f v Fourierovo vrsto po samih sinusih.
Rešitev: $a_0 = 0$ in $a_n = 0$ za vsako naravno število n. Nadalje,
$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2nx)\,\mathrm{d}\,x = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(2nx) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(2(n-1)x)}{2n-2} + \frac{\cos(2(n+1)x)}{2n+2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}.$$
Do konca poračunaj vrednosti in vstavi v vrsto.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
16. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj skalarni produkt v vektorskem prostoru.

   (b) **[5]** Izpelji dve lastnosti skalarnega produkta.

2. **[15]** Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija dveh spremenljivk ter naj bo p trditev, da je f diferenciabilna funkcija in q trditev, da je f zvezno parcialno odvedljiva funkcija. Dokaži tisto(e) trditev(trditve), ki je(so) resnične:

   a) $p \Leftrightarrow q$,

   b) $p \Rightarrow q$,

   c) $q \Rightarrow p$.

3. **[5]** Naj bo $z = r^2$ in $r = r(x, y)$ polmer v polarnem koordinatnem sistemu, pri čemer sta x, y kartezični koordinati. Odvedi funkcijo z.

4. **[10]** Reši parcialno diferencialno enačbo

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + a\, u(x,t) = 0\,,$$

   kjer sta $x, t > 0$, a poljubna pozitivna konstanta in je $u(x, 0) = 0$ ter $u(0, t) = t$ tako, da eksplicitno izraziš (samo) Laplaceovo transformiranko $U(x, z)$ funkcije $u(x, t)$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
16. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}(x, y, z) = (x + y - z, 2x + y + 2z, 2y - 8z).$$
Glede na standardno bazo poišči matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$. Določi tudi bazi jedra in slike preslikave $\mathcal{A}$.

2. **[10]** Krivulja $\mathcal{K}$ je podana parametično
$$\mathbf{r}(t) = (a\,\mathrm{ch}(t), a\,\mathrm{sh}(t), a\,t)\,,\ a > 0,\ t \in \mathbb{R}\,.$$
Poišči enačbo tangente na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki $(\frac{5}{4}a, \frac{3}{4}a, a\ln 2)$.

3. **[15]** Poišči ekstreme funkcije
$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$
pri pogoju $x^2 + y^2 = 4$.

4. **[15]** Razvij funkcijo $f(x) : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$, v Fourierjevo vrsto po samih sinusih.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
16. 6. 2016

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[15]** Izpelji Gramm-Schmidtov ortogonalizacijski postopek.
2. **[20]**

   a) **[15]** Definiraj lokalni ekstrem funkcije f dveh spremenljivk in dokaži potrebni pogoj za obstoj lokalnega maksimuma (odvedljive) funkcije f v točki (a, b).

   b) **[5]** Podaj primer funkcije, ki zadošča pogoju iz točke a), a vseeno nima lokalnega ekstrema

3. **[15]** Definiraj Laplaceovo transformiranko funkcije f in izpelji dve lastnosti Laplaceove transformacije, pri čemer naj to ne bo linearnost.