Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
15. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Naj bosta z in w kompleksni števili ter naj bo $|z| = 1$. Dokaži enakost

$$|z + w| = |1 + z\bar{w}|.$$

Namig: upoštevaj absolutno vrednost kompleksnega števila oziroma $(z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = (1+z\bar{w})(1+\bar{z}w)$.

2. **[15]** Zaporedje (a_n) je podano rekurzivno

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 1} \;\text{ za vsak }\; n \in \mathbb{N}.$$

Preveri, da je (a_n) omejeno ter poišči zgornjo in spodnjo mejo.

Namig: dokaži, da je zaporedje naraščajoče in zato je spodnja meja bo a_1, zgornja pa limita.

3. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \ln(1 - x))^{\frac{1}{x}} & ; \quad x < 0 \\ p(x) & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ \frac{\operatorname{sh}(x)}{\sqrt{2x^2 - 1 - x}} & ; \quad x > 1 \end{cases},$$

kjer je p polinom prve stopnje. Če je mogoče, določi p tako, da bo f zvezna na množici $\mathbb{R}$.

Rešitev: glej, če obstaja druga limita; ne obstaja.

4. **[15]** Razvij funkcijo f, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$, v Taylorjevo vrsto v okolico točke $a = 0$ in določi njeno konvergenčno vrsto.

Rešitev: imamo dva možna načina – direktno z odvajanjem ali geometrijsko vrsto. Izpeljimo na drugi način.

$$\frac{x^2 - 1}{2 + x^2} = 1 - \frac{3}{2 + x^2} = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{1 - (-\frac{x^2}{2})} = 1 - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n.$$

Konvergenčno območje izpelji iz enačbe $|-\frac{x^2}{2}| < 1$ oziroma $x^2 < 2$.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer: K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
15. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Naj bo $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleksno število. Zapiši, kako se r in φ izražata v odvisnosti od a in b.

2. **[15]** Podani sta naslednji izjavi:

$$[I.]\ \forall x_1, x_2 \in D_f:\ x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)\,,$$

$$[II.]\ \forall x_1, x_2 \in D_f:\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\,.$$

   (a) **[5]** Kaj pravi izjava $[I.]$? Utemelji odgovor.

   (b) **[5]** Kaj pravi izjava $[II.]$? Utemelji odgovor.

   (c) **[5]** Negiraj izjavo $[II.]$.

3. **[10]** Dokaži, da za konvergentni zaporedji velja, da je limita produkta zaporedij enaka produktu limit obeh zaporedij.

4. **[10]** Navedi in dokaži Cauchyjev izrek.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
15. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Poišči kompleksne rešitve enačbe

$$z^2 - iz = -\mathcal{I}m(\bar{z}).$$

Rešitev: $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

2. **[15]** Ali je zaporedje (a_n), ki je podano s splošnim členom

$$a_n = \left(\frac{3n^2+3}{3n^2+1}\right)^{n^2},$$

omejeno? Utemelji.

Rešitev: da, saj je zaporedje konvergentno (izračunaj limito) in vsako konvergentno zaporedje je omejeno.

3. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \frac{xe^{x^2}}{|x| - x}.$$

Določi naravno definicjsko območje in zalogo vrednosti funkcije f ter nariši njen graf.

Rešitev: $D_f = (-\infty, 0)$, $Z_f = (-\infty, -\frac{1}{2})$.

4. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \frac{e}{\ln(e+2x^2)}$.

   (a) Poiši enačbo normale na graf funkcije f v točki $T(0, y)$.

   (b) Za funkcijo f izračunaj Taylorjev polinom drugega reda v točki $x = 0$. Taylorjev polinom tudi skiciraj.

Rešitev: (a) $f'(0) = 0$, enačba normale je $x = 0$; (b) $p_2(x) = e - 2x^2$.

Vpisna številka Priimek, ime

Izpit pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
15. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Vpelji polarni zapis kompleksnega števila $z = a + ib$ in v polarni obliki zapiši $\frac{1}{z^2}$.
2. **[10]** Dani sta množici

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 4x - 5 < 0\} \quad \text{in} \quad B = \left(-2, \frac{7}{2}\right).$$

   (a) **[5]** Poišči unijo in presek množic A in B.
   (b) **[5]** Poišči supremum, infimum, minimum, maximum unije obeh množic, $A \cup B$.
3. **[10]** Definiraj stekališče zaporedja in podaj primer zaporedja, ki ima 3 stekališča.
4. **[10]** Navedi in dokaži Rolleov izrek.

Vpisna številka Priimek, ime Smer: K KT WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
20. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj
$$\int_{\ln 4}^{\infty} \frac{1}{e^{2x} - e^{-x}} \mathrm{d}x.$$
Namig: $\int \frac{1}{e^{2x}-e^{-x}} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{e^{-x}(e^{3x}-1)} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3-1} \mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} \mathrm{d}t$. S pomočjo parcialnih ulomkov, integriranja in limite izpelji rešitev.

2. **[15]** Lik $\mathcal{L}$ je v prvem kvadrantu določen s krivuljama $y = \sqrt{x}$ in $x^2 + y^2 = 4x$ ter osjo x. Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki nastane z vrtenjem $\mathcal{L}$ okoli osi y.
Namig: $V = \pi \int_0^{\sqrt{3}} ((2 + \sqrt{4 - y^2})^2 - y^4) \mathrm{d}y$.

3. **[15]** Poišči rešitev diferencialne enačbe
$$y'' - xy' = y.$$
Namig: pomagamo si s potenčnimi vrstami. Dobimo rekurzijo $a_2 = \frac{a_0}{2}$ in $a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}$. Sedaj v odvisnosti od sodosti in lihosti n poišči splošni člen a_n.

4. **[15]** Reši matrično enačbo
$$(-X^T B)^T + AX = I^2,$$
kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Rešitev: imamo parametrično rešitev $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ x & y \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Vpisna številka	Priimek, ime	Smer: K KT	WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
20. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dokaži trditev ali jo ovrzi s protiprimerom:
Ali za poljubno kvadratno matriko velja:
$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}\,.$$

2. **[10]** Podaj primer homogenega sistema linearnih enačb velikosti 5×5, ki bo netrivialno rešljiv.

3. **[10]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo.

4. **[10]** Dana je linearna diferencialna enačba
$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,\ a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2\,.$$
Dokaži, da če je λ_0 trojna ničla karakterističnega polinoma, tedaj je ena od rešitev diferencialne enačbe oblike $y = e^{\lambda_0 x}x^2$.

Vpisna številka Priimek, ime WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
20. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Izračunaj
$$\int \frac{1}{e^{2x}-e^{-x}}\mathrm{d}x.$$
Namig: $\int \frac{1}{e^{2x}-e^{-x}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{e^{-x}(e^{3x}-1}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^3-1}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)}\mathrm{d}t$. V nadaljevanju si pomaga s parcialnimi ulomki.

2. **[15]** Izračunaj ploščino lika pod grafom funkcije f, $f(x) = \sin(x)\cos^2(2x)$, med dvema zaporednima ničlama fukcije f.
Rešitev: $P = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos^2(2x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\frac{1+\cos(4x)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)+\sin x\cos(4x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)+\frac{1}{2}(\sin(-3x)+\sin(5x)\mathrm{d}x$

3. **[15]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$xy' - y = \sqrt{y^2-x^2}$$
pri pogoju $y(0) = 1$.
Rešitev: Homogena DE, $y = \frac{(Cx)^2+1}{2C}$.

4. **[15]** Poišči realna števila λ, da bo veljalo
$$A\vec{x} = \lambda\vec{x},$$
kjer je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \neq 0$. Poišči tudi ustrezne vektorje $\vec{x}$.
Rešitev: $\lambda_{1,2} = 2$, $\vec{x}_1 = (-1,-1,1)$, $\vec{x}_2 = (-3,-2,0)$; $\lambda_3 = 0$, $\vec{x}_3 = (1,-1,1)$.

Vpisna številka | Priimek, ime | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
20. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dokaži, ali s protiprimerom ovrzi trditev:
   Za poljubni kvadratni matriki reda n velja
   $$((AB)^{-1})^T = (A^{-1}B^{-1})^T\,.$$
2. **[10]** Podaj primer homogenega sistema linearnih enačb velikosti 4×4, ki bo netrivialno rešljiv.
3. **[10]** Opiši univerzalno substitucijo za računanje nedoločenega integrala funkcij, ki so sestavljene iz trigonometričnih funkcij sinus in kosinus.
4. **[10]** Navedi in dokaži Newton-Leibnizovo formulo.

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer K KT | WA

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
15. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[15]** Poišči (najkrajšo) razdaljo od ploskve $x^2 + yz = 1$ do točke $T(0,1,0)$.

Rešitev: naj bo $T_1(x,y,z)$ točka na ploskvi. Razdalja med T in T_1 se izračuna kot

$$d(T,T_1) = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

Upoštevamo, da je $x^2 = 1 - yz$ in razlago iz vaj ter dobimo

$$f(y,z) = 1 - yz + (y-1)^2 + z^2.$$

Do konca izračunaj ekstreme te funkcije.

2. **[15]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y-1}{x^2-y^2-1}}.$$

(a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f in ga nariši.

(b) Ali obstaja nivojnica na nivoju -1? Če obstaja, pošči njeno enačbo in pojasni kaj predstavlja.

(c) Skiciraj prerez nad osjo x.

Namig: (a) nariši premico $x - y - 1 = 0$ in hiperbolo $x^2 - y^2 - 1 = 0$ ter označi območje v ravnini (za več si pomgaja z WolframAlpho); (b) ne obstaja; (c) fiksiraj $y = 0$.

3. **[15]** Linearna tranformacija $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ je podana takole

$$\mathcal{A}(M_1) = x^2 - x,\ \mathcal{A}(M_2) = x^2 + x,\ \mathcal{A}(M_3) = x^2 - 1, \mathcal{A}(M_4) = x^2 + 1,$$

kjer so $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Preveri, da je $\mathcal{A}$ dobro definirana ter ji poišči bazo jedra in bazo slike.

(b) Ali je $\mathcal{A}$ injektivna oziroma surjektivna? Utemelji!

Rešitev: najprej poišči eksplicitni predpis preslikave $\mathcal{A}$ s pomočjo postopka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4$$

oziroma z upoštevanjem linearnosti

$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \lambda_1 \mathcal{A}(M_1) + \lambda_2 \mathcal{A}(M_2) + \lambda_3 \mathcal{A}(M_3) + \lambda_4 \mathcal{A}(M_4).$$

Tako dobimo $\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ax^2 - dx + b - c.$

V bazi jedra je matrika $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, v bazi slike sta polinoma x^2 in $-x$; preslikava ni injektivna, je pa surjektivna.

Za več razlage glej vaje.

4. **[15]** Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + e^t\sqrt{t} \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{aligned}$$

pri pogojih $x(0) = 0$ in $y(0) = 1$.

Namig: za reševanje naloge je bistveno naslednje

$$\mathcal{L}(e^t t^a)(z) = \mathcal{L}(t^a)(z-1) = \frac{\Gamma(a+1)}{(z-1)^{a+1}}.$$

Vse ostalo direktno sledi iz zgornje formule.

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT

Izpit pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
15. 6. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Definiraj lokalni minimum zvezne funkcije dveh spremenljivk.
2. **[10]** Izpelji dve lastnosti divergence.
3. **[15]**
   (a) **[5]** Zapiši, kdaj je funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eksponentnega tipa in podaj primer funkcije, ki ni eksponentnega tipa.
   (b) **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki povezuje funkcijo eksponentnega tipa z Laplaceovo transformiranko.
4. **[10]**
   (a) **[5]** Naj bo $\mathcal{B}$ baza razsežnosti n vektorskeg prostora $\mathcal{V}$. Za $x \in \mathcal{V}$ definiraj koordinatnoi vektor glede na $\mathcal{B}$.
   (b) **[5]** Ali je koordinatni vektor enolično določen? Utemelji odgovor.