

Vpisna številka

Priimek in ime

2. test pri predmetu MATEMATIKA I
Računski del
12. 12. 2025

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru bo celotna naloga ocenjena z 0 točkami. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta test/izpit.*
 - *Čas reševanja je 75 minut.*
-

1. **[20]** Preuči monotonost, omejenost in konvergenco zaporedja (a_n) , ki je podano s splošnim členom

$$a_n = 2 + (n - 1)^{(-1)^n}.$$

Če ima zaporedje kako stekališče, ga zapiši.

2. **[20]** Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-3}}.$$

(a) [6] Določi naravno definicijsko območje funkcije f .

(b) [7] Izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x$.

(c) [7] Izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f(x) - \sqrt{5})}{x - 2}$.

Nalogo reši brez uporabe odvoda.

3. **[20]** Funkciji f in g sta podani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} 2 - e^{-x} & ; \quad x \geq 0 \\ \sqrt{1-2x} & ; \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad x < 1 \\ x^2 - 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Nariši graf funkcije f . Zapiši predpisa za $f \circ g$ in $g \circ f$. Graf funkcije $g \circ f$ tudi skiciraj.

Vpisna številka

Priimek, ime

K KI

2. test pri predmetu MATEMATIKA A
Računski del
12. 12. 2025

Navodila:

- Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.
- Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru bo celotna naloga ocenjena z 0 točkami. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.
- Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.
- Čas reševanja je **75 minut**.

1. [15] Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\sin(2x)} - 1}{x \ln(x) - x}.$$

Rešitev: Na podlagi naloge iz vaj vemo, da je $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x) - x) = 0$, izpeljemo pa, da je $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin(2x)} = 1$. Posledično

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\sin(2x)} - 1}{x \ln(x) - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x) \ln(x)} - 1}{x \ln(x) - x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(2x) \ln(x)} \left(2 \cos(2x) \ln(x) - \frac{\sin(2x)}{x} \right)}{\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cos(2x) - \frac{1}{2 \ln x} \right) = 2 \end{aligned}$$

2. [15] S pomočjo razvoja funkcije f , ki je podana s predpisom

$$f(x) = (x^2 - 4) \sin(2x),$$

v Taylorjevo vrsto v okolici točke 0 izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + n + 8)}{(2n + 1)!}.$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} (2x)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} 2^{2n+1} x^{2n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} 2^{2n+3} x^{2n+1} \\ &= -8x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n - 1)!} 2^{2n-1} x^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n + 1)!} 2^{2n+3} x^{2n+1} \\ &= -8x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n^2 + n + 8)}{(2n + 1)!} 2^{2n} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Zgornja izpeljava velja za vsak $x \in \mathbb{R}$. Za izračun konkretne vsote opazuj $x = \frac{1}{2}$.

3. [15] Med vsemi pravnimi tristranimi prizmi volumna V poišči tisto, ki ima najmanjšo površino.

Rešitev: Volumen pravilne tristrane prizme je $V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2v$, pri čemer je v višina prizme, a pa dolžina stranice osnovne ploskve. Izpljemo $v = \frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$. Nadalje, površina pravilne tristrane prizme je $P = 3av + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 4\sqrt{3}V\frac{1}{a} + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Dalje glej postopek iz vaj (funkcija, odvodi, stacionarne točke in drugo).

4. [15] Funkciji f , ki je podana s predpisom $f(x) = (x+4) \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$, določi naravno definicijsko območje, ničle, obnašanje na robovih definicijskega območja, ekstreme, intervale naraščanja in padanja ter s pomočjo vsega tega skiciraj graf funkcije f .

Rešitev: Pred rešitvijo glej drugi primer, ki smo ga napravili pri risanju grafov (vsi argumenti so analogni).

$D_f = \mathbb{R}$; ničli sta $-4, 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$; $f'(x) = \frac{5(x+1)}{3\sqrt[3]{x-1}}$; funkcija je naraščajoča na intervalih $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ in padajoča na $[-1, 1]$; v točki -1 ima lokalni maksimum, v 1 pa lokalni minimum. Graf lahko narišeš s pomočjo Wolframalphe oziroma Geogebra.

Vpisna številka

Priimek, ime

1. test pri predmetu MATEMATIKA I
Teoretični del
7. 11. 2025

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - *Čas reševanja je 40 minut.*
-

1. [10]

- (a) [3] Definiraj limito zaporedja.
- (b) [7] Dokaži ali poišči protiprimer za naslednjo izjavo: če ima zaporedje natanko eno stekališče, potem je konvergentno.

2. [10] Funkcija f je podana s predpisom $f(x) = \tan x$.

- (a) [5] Določi naravno definicijsko območje in zalogo vrednosti ter skiciraj graf funkcije.
- (b) [5] Določi funkciji f domeno in kodomeno tako, da bo obstajal inverz funkcije f (inverz funkcije tudi zapiši). Nadalje, ali je funkcija f^{-1} omejena?

3. [10] Naj bo $a > 0$, $a \neq 1$. Najprej določi vse x in y tako, da bo veljala formula

- (a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,
- (b) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$,

nato pa formulo še dokaži.

4. [10]

- (a) [7] Naj bo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ in $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$. Dokaži, da je $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$.
- (b) [3] Poišči predpis funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki ni monotona in velja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Vpisna številka

Priimek, ime

K KI

2. test pri predmetu MATEMATIKA A
Teoretični del
12. 12. 2025

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - *Čas reševanja je 40 minut.*
-

1. **[10]** Po definiciji odvoda izračunaj odvoda funkcij s predpisi:

- (a) **[3]** $f(x) = x^2$,
- (b) **[7]** $f(x) = \log_a x$.

2. **[10]** Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in $a \in D$.

- (a) **[2]** Definiraj lokalni minimum funkcije f v točki a .
- (b) **[2]** Kdaj je a stacionarna točka funkcije f ?
- (c) **[6]** Dokaži trditev:
Če je f naraščajoča na D , tedaj je $f'(x) \geq 0$ za $\forall x \in D$.

3. **[10]** Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija in $a \in D$.

- (a) **[3]** Definiraj konveksnost funkcije f na intervalu $[a, b]$.
- (b) **[3]** Definiraj prevoj funkcije f .
- (c) **[4]** Kaj lahko sklepamo o obnašanju funkcije f v točki a , če je a stacionarna točka in je $f''(a) = 0$?

4. **[10]**

- (a) **[5]** Navedi in dokaži pravilo za odvod produkta n funkcij.
- (b) **[5]** Dokaži trditev:
Če je odvod funkcije f enak 0, tedaj je f konstantna funkcija.