

Vpisna številka

Priimek in ime

3. test pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
6. 6. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
 - *Čas reševanja je 75 minut.*
-

1. [10] Reši diferencialno enačbo

$$xyy' = x\sqrt{x^2 + y^2} + y^2.$$

Poišči še rešitev diferencialne enačbe pri pogoju $y(1) = -\sqrt{3}$.

2. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$y' - 4xe^{-x^3}\sqrt{y} + 6x^2y = 0.$$

3. [20] Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$y''' - 2y'' + 16y = 24xe^{-2x}.$$

Vpisna številka

Priimek, ime

K KI

3. test pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
6. 6. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
 - *Čas reševanja je **75 minut**.*
-

1. [20] Reši sistem diferencialnih enačb

$$x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - 4x_3(t)$$

$$x_2'(t) = x_1(t) - x_3(t)$$

$$x_3'(t) = x_1(t) - 2x_3(t)$$

2. [20] Razvij funkcijo f , ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x + \frac{\pi}{2}) & ; x \in [-\frac{3}{2}\pi, -\pi) \\ 0 & ; x \in [-\pi, \pi] \\ \sin(x) & ; x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi] \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto.

3. **[20]** Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ je glede na bazi $\mathcal{B} = \{1 - x, 1 + x, x^2\}$ in $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \right\}$ podana z matriko A ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}_2[x]$ in $M_2(\mathbb{R})$ poišči eksplicitni predpis preslikave \mathcal{A} ter ji poišči bazo jedra in bazo slike (glede na standardni bazi).

Vpisna številka

Priimek, ime

3. test pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
6. 6. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - *Čas reševanja je 40 minut.*
-

1. **[10]** V splošni obliki navedi 4 različne tipe diferencialnih enačb prvega reda in jih poimenuj.

2. **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki pove kako se izraža splošna rešitev linearne diferencialne prvega reda, če poznamo splošno rešitev njenega homogenega dela in neko partikularno rešitev.

3. **[10]** Dana je linearna diferencialna enačba drugega reda $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$.

- (a) *[5]* Kdaj velja, da je za poljubni konstanti C_1, C_2 funkcija $y = C_1y_1 + C_2y_2$ splošna rešitev te diferencialne enačbe?
- (b) *[5]* Ali je lahko za poljubne konstante C_1, C_2, C_3 funkcija $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3x$ rešitev dane diferencialne enačbe. Utemelji odgovor.

4. **[10]** Podaj primer nehomogenega sistema diferencialnih enačb in opiši na kratko način njegovega reševanja.
(*Opomba:* Ničesar ni potrebno izpeljati.)

Vpisna številka

Priimek, ime

K KI

3. test pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
6. 6. 2022

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. [10]

- [5] Definiraj linearno transformacijo, ki deluje iz vektorskega prostora U v V .
- [5] Podaj primer endomorfizma v vektorskem prostoru \mathbb{R}^2 .

2. **[10]** Dokaži izrek:

Za linearno transformacijo $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ naj bosta B_u in B_v bazi vektorskih prostorov U oz. V . Tedaj za poljuben $\mathbf{x} \in U$ in $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ velja

$$\mathbf{y}[B_v] = A[B_v, B_u]\mathbf{x}[B_u],$$

kjer je $A[B_v, B_u]$ matrika linearne transformacije v danih bazah.

3. [5] Naj bo $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ linearna transformacija. Dokaži, da je jedro $\mathcal{Ker}(\mathcal{A})$ vektorski podprostor od U .

4. [15]

- (a) [10] Izpelji postopek reševanja sistemov diferencialnih enačb $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ z uporabo diagonalizacije matrike A .
- (b) [5] Podaj primer sistema diferencialnih enačb, ki se ga **ne** da rešiti z uporabo diagonalizacije. Utemelji odgovor.