

Vpisna številka

Priimek in ime

3. test pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
5. 6. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta test/izpit.*
 - *Čas reševanja je **75 minut**.*
-

1. [20] Reši diferencialno enačbo

$$xy' - y + 2\sqrt{y^2 - x^2} = 0.$$

Poišči še rešitev pri pogoju $y(1) = -1$.

2. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. S pomočjo uvedbe nove spremenljivke $u = e^{y^2}$ reši diferencialno enačbo

$$2yy' \cos x - \sin x = e^{-y^2} \cos^2 x.$$

3. [20] Naj bo $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ in $x_3 = x_3(t)$. Reši sistem diferencialnih enačb.

$$x_1' = x_1 - x_2 + x_3$$

$$x_2' = -x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_3' = -x_1 + 4x_3$$

Vpisna številka

Priimek, ime

K KI

3. test pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
5. 6. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
 - *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljene listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
 - *Čas reševanja je **75 minut**.*
-

1. [20] Reši sistem diferencialnih enačb.

$$x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2'(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$$

$$x_3'(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + 3x_3(t)$$

2. [20] Razvij funkcijo f , ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) & ; x \in [0, \frac{\pi}{4}) \\ 0 & ; x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \end{cases},$$

v sinusno Fourierovo vrsto.

3. [20] Transformacija v prostoru \mathbb{R}^3 je določena tako, da prostor zavrtimo za kot $\frac{\pi}{2}$ okoli premice z enačbo $2x = -y = 2z$ v pozitivni smeri.

Transformaciji \mathcal{A} poišči predpis, bazo jedra in bazo slike.

Vpisna številka

Priimek, ime

3. test pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
5. 6. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - *Čas reševanja je 40 minut.*
-

1. [5] Kateri dve izmed spodaj naštetih rešitev diferencialne enačbe

$$y''(x) + y(x) = 2e^x$$

sta linearno odvisni?

$$y_1(x) = e^x + \cos x, y_2(x) = e^x, y_3(x) = 3 \cos x + 3 \sin x, y_4(x) = \cos x + \sin x.$$

2. [10]

- (a) [5] Opiši postopek reševanja Bernoullijeve diferencialne enačbe.
- (b) [5] Podaj konkretni primer Bernoullijeve diferencialne enačbe za $\alpha = \frac{1}{2}$.
Enačbe ni potrebno rešiti.

3. [15]

(a) [10] Dokaži izrek:

Če je $y_H = C_1y_1 + C_2y_2$ rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe (LDE) 2. reda in y_P neka partikularna rešitev cele LDE, tedaj je $y = y_H + y_P$ tudi rešitev cele LDE.

(b) [5] Ali je funkcija $y = C_1x + 2C_2x + x^2$ splošna rešitev neke LDE 2. reda? Utemelji odgovor.

4. [10]

- (a) [5] Definiraj lastne vrednosti in lastne vektorje kvadratne matrike A .
- (b) [5] Ali lahko ima kvadratna matrika reda 3 samo eno lastno vrednost? Utemelji odgovor.

Vpisna številka

Priimek, ime

K KI

3. test pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
5. 6. 2023

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
 - *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
 - *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
 - **Čas reševanja je 40 minut.**
-

1. **[10]** Podaj primer preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero velja:

- (a) **[5]** \mathcal{A} je linearna preslikava,
- (b) **[5]** \mathcal{A} ni linearna preslikava.

V obeh primerih utemelji svojo izbiro.

2. [10]

- (a) [5] Definiraj diagonalizabilnost kvadratne matrike A .
- (b) [5] Kaj mora veljati za lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A reda 3, da je le-ta diagonalizabilna?

3. [10] Dokaži trditev:

Vsota defekta in ranga linearne transformacije $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ je enaka dimenziji prostora U .

4. **[10]** Spreminjanje koncentracije raztopine v povezanih posodah s pretokom 20 l/min je opisano s sistemom diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= \frac{1}{4}x_2(t) - \frac{1}{2}x_1(t) \\x_2'(t) &= \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{4}x_2(t).\end{aligned}$$

- (a) **[5]** Nariši pripadajoči sistem povezanih posod in določi njihove prostornine.
(b) **[5]** Izračunaj $x_1(t)$ in $x_2(t)$.