Vpisna številka Priimek in ime

3. test pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
10. 6. 2024

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta test/izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$x^2y' + y(x + y) = 0$$

pri pogoju $y(1) = 1$.

2. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$xy' - 2x^3\sqrt{y} + 2(x-1)y = 0.$$

3. **[20]** Naj bo $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ in $x_3 = x_3(t)$. Reši sistem diferencialnih enačb.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 \\ x_2' &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_3' &= x_1 \end{aligned}$$

Vpisna številka Priimek, ime K KI

3. test pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
10. 6. 2024

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov, rešenih nalog in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Naloge najprej rešuj na polo, nato na dodatne liste. Na vsak list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent za ta izpit.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Razvij funkcijo f, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & ; \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 0 & ; \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

v kosinusno Fourierovo vrsto.

2. **[20]** Reši sistem diferencialnih enačb.

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= -x_1(t) + 3x_3(t)\\
x_2'(t) &= 2x_2(t) + 2e^{2t}\\
x_3'(t) &= x_1(t) + x_3(t)
\end{aligned}$$

3. **[20]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ je določena takole

$$\mathcal{A}(1,0,0) = 2x^2,\ \mathcal{A}(0,-1,1) = x^2,\ \mathcal{A}(1,0,-2) = 2x^2 - 2x.$$

Linearni transformaciji $\mathcal{A}$ določi glede na standardno bazo obeh prostorov bazo jedra, bazo slike in matriko.

Vpisna številka Priimek, ime

2. test pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
10. 6. 2024

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Zapiši v splošni obliki in podaj po en konkretni primer (ni ga potrebno rešiti) za:
   (a) *[5]* Bernoullijevo diferencialno enačbo,
   (b) *[5]* linearno diferencialno enačbo 3. reda s konstantnimi koeficienti.

2. **[10]** Dokaži trditev:
Če je y_H rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe 1. reda in y_P neka njena partikularna rešitev, da je tedaj $y = y_H + y_P$ splošna rešitev linearne diferencialne enačbe 1. reda.

3. **[10]** Izpelji metodo variacije konstant za linearno diferencialno enačbo 2. reda s konstantnimi koeficienti.

4. **[10]** Za sistem diferencialnih enačb $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$:

   (a) **[5]** utemelji, zakaj rešujemo tak sistem s pomočjo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev matrike A,

   (b) **[5]** kako zapišemo rešitev takega sistema v primeru, da je matrika A reda dva z dvema različnima realnima lastnima vrednostima λ_1 in λ_2?

Vpisna številka Priimek, ime K KI

2. test pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
10. 6. 2024

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[5]** Za linearno transformacijo $\mathcal{A} : U \to V$ definiraj njuni jedro in sliko.

2. **[10]** Dokaži trditev:
Za linearno transformacijo $\mathcal{A} : U \to V$ naj bosta B_u in B_v bazi vektorskih prostorov U oz. V. Tedaj za poljuben $\mathbf{x} \in U$ in $\mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x})$ velja

$$\mathbf{y}[B_v] = A[B_v, B_u]\mathbf{x}[B_u]\,,$$

kjer je $A[B_v, B_u]$ matrika linearne transformacije v danih bazah.

3. **[10]**

   (a) **[4]** Definiraj lastno vrednost in lastni vektor linearne transformacije $\mathcal{A}$.

   (b) **[6]** Dokaži trditev:
   Če sta lastni vrednosti λ_1 in λ_2 linearne transformacije $\mathcal{A}$ različni, tedaj sta njuna lastna vektorja $\mathbf{p}_1$ in $\mathbf{p}_2$ linearno neodvisna.

4. **[15]**

(a) **[4]** Definiraj diagonalizabilno matriko A.

(b) **[6]** Izpelji postopek reševanja sistemov diferencialnih enačb $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$ z uporabo diagonalizacije matrike A.

(c) **[5]** Za matriko A reda 2 podaj primer sistema diferencialnih enačb, ki se ga **ne** da rešiti z uporabo diagonalizacije. Utemelji odgovor.