UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
9. 9. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[15]** Poišči vsa kompleksna števila z, za katera velja

$$z^2 + 2|z+2-i|^2 = \mathcal{I}m\left(\frac{5i}{1-2i}\right).$$

Rešitev: $z = 4i$.

2. **[15]** Določi konvergenčno območje vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{(2x+1)^n}$$

in izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5^n}{(2x+1)^n} = \frac{(-3+2x)(1+2x)}{2(-2+x)(-1+x)}$, za $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$.

3. **[15]** Izračunaj

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+2x)^{\frac{1}{x}}}{e^2+x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Rešitev: $e^(- 2 - e^{-2})$.

4. **[15]** Poišči točko na premici $3x + y = 6$, ki je najbližja točki $(2, 3)$.

Rešitev: pomagaj si z normalo, $T(\frac{11}{10}, \frac{27}{10})$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
9. 9. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Z uporabo matematične indukcije dokaži formulo za potenciranje kompleksnega števila z.
2. **[10]** Dani sta dve trditvi, od katerih je ena pravilna, druga pa ne:

   a) *Vsaka zvezna funkcija je odvedljiva.*

   b) *Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.*

   Pravilno trditev dokaži, za nepravilno pa najdi protiprimer iz katerega je razvidno, zakaj ne velja.
3. **[10]** Podaj konkretni primer uporabe L'Hospitalovega pravila za računanje limite tipa 0^0 in ga reši.
4. **[10]** Podaj primer odvedljive funkcije, ki ima s svojo tangento v točki $a = 2$ več kot eno skupno točko.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
9. 9. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Nad množico realnih števil reši neenačbo

$$|x^2 - 3| + 2x \leq 2|x + 2|.$$

Rešitev: $-2 - \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{7}$.

2. **[20]**

(a) Zaporedje (a_n) je podano s splošnim členom

$$a_n = \frac{3n^2 + n}{1 - 4n^2}.$$

Izračunaj limito zaporedja (a_n) ter preveri, ali je monotono in omejeno.

(b) Izračunaj $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^{\sqrt{2x}}$.

Rešitev: (a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{3}{4}$, je omejeno in monotono.

(b) $e^{\sqrt{2}}$.

3. **[20]** Dana je funkcija $f(x) = \ln(2x^3 - 3x^2)$.

(a) Določi naravno definicijsko območje funkcije f.

(b) Izračunaj in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f, če obstajajo.

Rešitev: (a) $x > \frac{3}{2}$. (b) ni ekstremov, saj $f'(x) = 0$ niso v D_f.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA I
9. 9. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dani sta množici $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x < 8\}$ in $B = (-2, 6)$. Če obstajajao, poišči infimum, minimum, supremum in maksimum množic $A \cap B$ in $A \cup B$.

2. **[10]** Izpelji polarni zapis kompleksnega števila $z = a + ib$ in njegove konjugirane vrednosti $\overline{z}$.

3. **[10]** V katerih primerih lahko za računanje limite uporabimo L'Hospitalovo pravilo? Podaj primer uporabe tega pravila za računanje limite tipa $0 \cdot \infty$ in ga reši.

4. **[10]** Dokaži trditev, da če je prvi odvod funkcije f na intervalu (a, b) nenegativen, tedaj je f padajoča funkcija.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
11. 9. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena. Rešene naloge naloge so strogo prepovedane.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor natančno utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[25]** Naj bo $\mathcal{L}$ lik v prvem kvadrantu ravnine, ki je omejen z grafoma funkcij f_1 in f_2, ki sta podani s predpisoma $f_1(x) = \sqrt{2-x}$ in $f_2(x) = 8-4x$, ter ordninatno osjo.
   (a) Skiciraj lik $\mathcal{L}$ in izračunaj njegov obseg.
   (b) Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da lik $\mathcal{L}$ zavrtimo okoli ordinatne osi.

   Rešitev: (a) na obseg je vsota dolžin treh lokov: $(8-\sqrt{2}) + 2\sqrt{17} + \ell_3$, $\ell_3 = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{8-4x}}\, dx \overset{t^2=\frac{9-4x}{8-4x}}{=} \frac{1}{4}(6\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2})$.
   (b) $V = \pi \left(\int_0^{\sqrt{2}} (\frac{y-8}{-4})^2 - (2-y^2)^2\, dy + \int_{\sqrt{2}}^8 (\frac{y-8}{-4})^2\, dy \right)$.

2. **[15]** S pomočjo potenčnih vrst reši difencialno enačbo
$$x^2y'' + 2y' = 0.$$
   Rešitev: iskana vrsta je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0$, kjer je $a_0 \in \mathbb{R}$.

3. **[20]** Poišči vsa realna števila a, za katere ima sistem
$$\begin{aligned} ax - y &= a \\ x - ay - 2z &= 1 \\ x - y + (a+4)z &= a^2 \end{aligned}$$
   parametrično rešitev. V teh primerih rešitev tudi poišči.

   Rešitev: za $a = 1$; $x = 1 + y, y \in \mathbb{R}, z = 0$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
11. 9. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Naj bo $\mathcal{M}_{mn}$ množica vseh pravokotnih matrik.

   a) Ali je $\mathcal{M}_{mn}$ grupa za seštevanje matrik?

   b) Ali je $\mathcal{M}_{mn}$ grupa za množenje matrik?

   Odgovora utemelji.

2. **[10]** Poišči Clairautovo diferencialno enačbo, katere (ena od) rešitev je premica $y = 3x + 9$.

3. **[10]** Naj bo delitev D' nadaljevanje delitve D intervala $[a, b]$. Zapiši in dokaži odnos med zgornjima Riemannovima vsotama omejene funkcije f glede na obe delitvi.

4. **[10]** Izpelji eksplicitni predpis funkcije f, če je

$$f(x) = \int_0^{\infty} t^n \mathrm{e}^{-x\,t} dt\,,$$

   kjer je n naravno število in x pozitiven parameter.
   (Namig: vpelji novo spremenljivko za $x\,t$.)

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:
WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
11. 9. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena. Rešene naloge naloge so strogo prepovedane.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor natančno utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[20]** Lik v ravnini je omejen s krivuljami $y = 0$, $y = 2x + 4$ in $y = \sqrt[4]{256 - 4x}$

   (a) Izračunaj ploščino lika. Pomagaj si s skico.

   (b) Izračunaj volumen rotacijskega telesa, ki ga dobimo tako, da lik zavrtimo okoli x-osi.

   Rešitev: (a)
$$\int_{-2}^{0} (2x + 4)dx + \int_{0}^{64} \sqrt[4]{256 - 4x}dx = 4 + \frac{1024}{5}.$$

   (b)
$$\pi \int_{-2}^{0} (2x + 4)^2 dx + \pi \int_{0}^{64} \sqrt{256 - 4x}dx = (\frac{32}{3} + \frac{2048}{3})\pi.$$

2. **[20]** Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe
$$y' + \frac{(2x^2 - 1)y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{1 + x^2}.$$

   Rešitev: Linearna DE,
$$y = Cxe^{-x^2} + xe^{-x^2} \ln(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}).$$

3. **[20]** Glede na realni parameter a poišči rešitev sistema
$$\begin{aligned} ax - y &= 1 \\ x - ay - 2z &= 1 \\ x - y + (a + 4)z &= a. \end{aligned}$$

   Rešitev: za $a \in \mathbb{R}\backslash\{1, -2, -3\}$ dobimo $x = \frac{1}{a+3}, y = \frac{-3}{a+3}, z = \frac{a-1}{a+3}$, za $a = -3$ dobimo protisloven sistem, za $a = 1$ oz. $a = -2$ pa parametrično rešitev.

UM FKKT
Kemijska tehnologija
Bolonjski visokošolski program

Vpisna številka:
Ime priimek:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA II
11. 9. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dokaži pravilo za nedoločeno integriranje
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\,.$$
2. **[10]** Podaj primer sistema treh linearnih enačb s tremi neznankami, ki se ne da rešiti z uporabo Cramerjevega pravila. Poišči rešitev tega sistema linearnih enačb.
3. **[10]** Z določenim integralom izpelji formulo za dolžino diagonale pravokotnika s stranicama a in b.
4. **[10]** Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi homogenega dela linearne diferencialne enačbe drugega reda ter y_3 neka partikularna rešitev cele linearne diferencialne enačbe. Dokaži kako se v tem primeru izrazi splošna rešitev cele linearne diferencialne enačbe.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer: KT K
Mathematica, WolframA: DA NE

Računski del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
9. 9. 2014

Čas reševanja je **75 minut**.

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig in zapiskov ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, kalkulator (ki ne izrisuje grafov), matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*

1. **[10]** Izračunaj Laplaceovo transformiranko funkcije f,
$$f(t) = (t+1)\sin(2t) + t(e^t + \mathrm{ch}t).$$
Rešitev: direktno z uporabo formul dobimo
$$\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \frac{1}{(-1+z)^2} + \frac{1+z^2}{(-1+z^2)^2} + \frac{4z}{(4+z^2)^2} + \frac{2}{(4+z^2)}.$$

2. **[15]** Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije f, $f(x,y) = (x-y)(1-xy)$, če obstajajo.

Rešitev: ni ekstremov.

3. **[10]** Potencial električnega polja v točki (x,y) se izraža kot $V = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$. Izračunaj spremembo V v točki $(3,4)$ v smeri točke $(2,6)$.

Rešitev: izračunamo s pomočjo gradienta in dobimo $\frac{1}{5}$.

4. **[25]** Dana je množica $\mathcal{B} = \{x-2, x^2-1, x^2-x\}$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{B}$ baza prostora polinomov stopnje dva $\mathbb{R}_2[x]$.
   (b) Ali je $\mathcal{B}$ ortogonalna glede na standardni skalarni produkt v $\mathbb{R}_2[x]$? Utemelji!
   (c) Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $(\mathcal{A}p)(x) = p(0)(x-1) + p(x)$. Preveri, da je $\mathcal{A}$ linearna, nato pa zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}$ po bazi $\mathcal{B}$.

Rešitev: (a) direktno po definiciji.

(b) ne, saj že $x-2$ in x^2-1 nista ortogonalna.

(c) je linearna; pomagaj si s tem, da na poljuben polinom stopnje dva $p(x) = ax^2+bx+c$ deluješ s preslikavo $\mathcal{A}$. Dobimo $(\mathcal{A}p)(x) = ax^2 + (b+c)x$. Naj bo A matrika, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ glede na standradno bazo. P naj bo matrika prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v standrano bazo. Iskano matriko, označimo z $\bar{A}$, dobimo $\bar{A} = P^{-1}AP$.

UM FKKT
Kemijska tehnologija, Kemija
Bolonjski univerzitetni program

Vpisna številka:
Ime priimek:
Smer:

Teoretični del izpita pri predmetu MATEMATIKA III
9. 9. 2014

Čas reševanja je **40 minut**. **Navodila:**

- *Dovoljeni pripomočki so: pisala.*

1. **[10]** Dokaži trditev, da množica z manj kot n elementi ne more biti baza vektorskega prostora dimenzije n.
2. **[10]** Kaj lahko sklepamo o obstoju lokalnega ekstrema vsaj dvakrat zvezno parcialne odvedljive funkcje f v točki (a, b), če je determinanta Hessejeve matrike v (a, b) enaka nič? Odgovor utemelji oziroma dokaži.
3. **[10]** Izpelji enačbo tangente na krivuljo K, ki je določena s presekom dveh implicitno podanih ploskev v $\mathbb{R}^3$.
4. **[10]** Poišči Laplaceovo transformiranko funkcije t^n, kjer je $n \in \mathbb{N}$.