Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT

2. test pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
23. 1. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Ali je s predpisom

$$< p, q >= \int_0^1 x(p(x) - q(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

kjer sta $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$, definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}_n[x]$? Utemelji!

2. **[20]** Transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ je podana glede na standardni bazi na naslednji način

$$\mathcal{A}(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - 2a_3)x^2 + a_2 x + (2a_3 - a_1).$$

(a) Natančno utemelji, da je transformacija $\mathcal{A}$ linearna in ji priredi matriko.

(b) Poišči bazo jedra in bazo slike transformacije $\mathcal{A}$.

(c) Preveri, da je $\mathcal{C} = \{x^2 - 1, x, x^2 + 1\}$ baza ter poišči matriko, ki pripada transformaciji $\mathcal{A}$, če namesto standardne baze $\mathbb{R}_2[x]$ vzamemo le-to

3. **[15]** Funkcija $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq \pi \\ \pi - x & ; \quad x > \pi \end{cases}.$$

Razvij funkcijo f v Fourierjevo vrsto po samih kosinusih.

4. **[15]** Poišči rešitev sistema linearnih diferencialnih enačb

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 + 4x_2\\
x_2' &= -4x_1 + x_2.
\end{aligned}
$$

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer K KT

2. test pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
23. 1. 2017

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Na množici pravokotnih matrik M_{nm} definiramo operaciji seštevanja in množenja s skalarjem na sledeč način:

   $\forall A, B \in M_{nm} : (A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m,$
   $\forall A \in M_{nm}, \lambda \in \mathcal{O} :$

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

   Ali je množica M_{nm} s tako definiranima operacijama vektorski prostor?
   Utemelji odgovor.

2. **[20]** Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor in S množica vektorjev iz $\mathcal{V}$.

   (a) **[5]** Definiraj linearno lupino $\mathcal{L}(S)$ množice S.

   (b) **[10]** Dokaži, da je $\mathcal{L}(S)$ vektorski podprostor od $\mathcal{V}$, ter da je to najmanjši vektorski podprostor, ki vsebuje vektorje is S.

   (c) **[5]** Naj bo $\mathcal{V} = \mathbb{R}_3[x]$. Podaj primer množice S moči 3 take, da bo $\mathcal{L}(S)$ vsebovala vse polinome iz $\mathbb{R}_3[x]$, ki nimajo splošnega člena.

3. **[10]** Dokaži, da so lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim endomorfizma f, linearno neodvisni.