UM FKKT, Bolonjski univerzitetni program Kemija in Kemijska tehnologija

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer K KT

2. test pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
29. 1. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$ je definiran produkt vektorjev $\vec{x} = (x_1, x_2)$ in $\vec{y} = (y_1, y_2)$ na naslednji način:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Ali je tako definiran produkt skalarni produkt? Utemelji!

2. **[15]** Poišči Fourierovo vrsto za periodično razširitev funkcije $f : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$, in s pomočjo le-te izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}.$$

3. **[20]** Linearna transformacija $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ je glede na bazi $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,-1), (0,-1,0)\}$ in $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1-x^2\}$ podana z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi eksplicitni predpis preslikave $\mathcal{A}$ glede na standardni bazi prostorov $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}_2[x]$ ter za njo določi bazo jedra in bazo slike.

4. **[15]** Naj bo $x = x(t)$ in $y = y(t)$. Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$
\begin{aligned}
x'' &= 4x + y \\
y' &= 5x' + 1.
\end{aligned}
$$

Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT

2. test pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
29. 1. 2019

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dokaži trditev:
   Če je množica vektorjev $\mathcal{B} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ baza vektorskega prostora $\mathcal{V}$, tedaj lahko vsak vektor $x \in \mathcal{V}$ na enoličen način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$.

2. **[15]** Naj bo $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linearna preslikava, λ njena lastna vrednost in S množica vektorjev, ki zadoščajo pogoju $f(\mathbf{p}) = \lambda \mathbf{p}$.

   (a) **[10]** Pokaži da je S vektorski podprostor v $\mathcal{V}$.

   (b) **[5]** Ali je za poljubna vektorja $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in S$ tudi njuna vsota $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ element množice S? Odgovor utemelji.

3. **[15]** Naj bo $\mathcal{V}$ vektorski prostor zveznih funkcij na intervalu $[-\pi, \pi]$ opremljen s standardnim skalarnim produktom.

   (a) **[10]** Pokaži, da je množica vektorjev $S = \{\mathbf{1}, \sin(\mathbf{nx}), \cos(\mathbf{nx}) | n \in \mathbb{N}\}$ ortogonalna.

   (b) **[5]** Ortonormiraj množico S.