Vpisna številka Priimek, ime Smer K KT

2. test pri predmetu MATEMATIKA III
Računski del
27. 1. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in kalkulatorja ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, radirka, matematični priročnik in dva ročno napisana A4 lista s formulami (brez rešenih nalog).*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[10]** Poišči ortogonalno bazo vektorskega prostora $\mathbb{R}_2[x]$, če je skalarni produkt v $\mathbb{R}_2[x]$ definiran takole: za vsaka $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ velja

$$< p, q >= \int_0^1 x^2 p(x) q(x) \, \mathrm{d}x.$$

2. **[15]** Poišči Fourierovo vrsto za periodično razširitev funkcije $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ -\sin 4x & ; \quad -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & ; \quad x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3. **[20]** Linearna preslikava $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je glede na bazo

$$\mathcal{B} = \left\{ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

podana takole

$$\mathcal{A}(B_1) = 2B_2,\ \mathcal{A}(B_2) = 2B_1,\ \mathcal{A}(B_3) = B_4,\ \mathcal{A}(B_4) = B_3.$$

Poišči matriko, ki pripada linearni preslikavi glede na standardno bazo prostora. Poišči tudi lastne vrednosti linearne preslikave $\mathcal{A}$.

4. **[15]** Naj bo $x = x(t)$ in $y = y(t)$. Poišči rešitev sistema diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} 4x'' &= y + 1 \\ y'' &= -x + y. \end{aligned}$$

Vpisna številka | Priimek, ime | Smer K KT

2. test pri predmetu MATEMATIKA III
Teoretični del
27. 1. 2020

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**

   (a) **[5]** Definiraj bazo vektorskega prostora $\mathcal{V}$.

   (b) **[5]** Podaj primer nestandardne baze prostora polinomov stopnje ena $\mathbb{R}_1[x]$.

2. **[15]** Naj bo $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linearna preslikava.

   (a) **[5]** Definiraj lastne vrednosti in lastne vektorje endomorfizma f.

   (b) **[10]** Dokaži trditev:
   Če so $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ lastni vektorji, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, tedaj so vektorji $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ linearno neodvisni.
   (Opomba: Pri uporabi matematične indukcije dokaži tudi indukcijski korak.)

3. **[15]**

(a) **[5]** Definiraj kdaj je kvadratna matrika A diagonalizabilna.

(b) **[5]** Dokaži trditev:
Če ima matrika A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev, tedaj je A diagonalizabilna.

(c) **[5]** Podaj primer matrike reda reda 2, ki ni diagonalizabilna. Odgovor utemelji.