Vpisna številka Priimek in ime

Test pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
16. 3. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodatni list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka in pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Reši matrično enačbo

$$A^T X + BX = C,$$

kjer so

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \ \text{ in } \ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. **[20]** V odvisnosti od realnega parametra a reši sistem enačb

$$\begin{aligned} ax - 2y + z &= a \\ x + ay - 2z &= 0 \\ x - 2y + az &= 1 \end{aligned}$$

3. **[20]** Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vpisna številka Priimek, ime

Test pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
16. 3. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]**

   (a) *[5]* Definiraj obrnljivo matriko.

   (b) *[5]* Podaj primer neničelne matrike reda 5, ki ni obrnljiva. Utemelji svojo izbiro.

2. **[10]** Dopolni in dokaži zvezo:

$$(AB)^T =$$

3. **[10]** Navedi 4 lastnosti determinante in vsako pokaži na konkretnem primeru.

4. **[10]** Navedi in dokaži izrek o rešljivosti homogenega sistema linearnih enačb.

Vpisna številka Priimek, ime K KI

Test pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
19. 3. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami za Matematiko B in formule za integrale, ki jih je pripravil asistent.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Naj spremenljivka t predstavlja čas, $P(t)$ naj bo populacija v času t, N naj predstavlja največjo dopustno populacijo in k naj bo koeficient rodnosti/smrtnosti. Nadalje, populacija se v odvisnosti od časa spreminja po zakonu
$$P'(t) = k \cdot (N - P(t)) \cdot P(t).$$
   (a) Poišči kako se populacija $P(t)$ izraža v odvisnosti od časa t.
   (b) Po brodolomu se je na nenaseljen otok naselilo 250 žensk in 250 moških. Prostorske in prehrambene omejitve otoka dopuščajo, da je največje število prebivalcev otoka 750 ljudi. 20 let po brodolomu je število prebivalcev otoka narastlo na 550 ljudi. Koliko ljudi bo čez 100 let? Predpostavimo, da se število prebivalcev spreminja po zgornjem zakonu.

2. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo
$$y' + x^4 = \frac{2y}{x} + y^2.$$

3. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo
$$x^2\, y''' - 2x\, y'' + 2y' = \ln(x^2) + 1.$$

Vpisna številka Priimek, ime K KI

Test pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
19. 3. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dokaži trditev:
Če je y_1 neka partikularna rešitev Riccatijeve diferencialne enačbe, tedaj lahko poiščemo splošno rešitev v obliki $y_1 + z$, pri čemer je z neznana funkcija.

2. **[10]** V splošni obliki podaj Lagrangeovo diferencialno enačbo in izpelji postopek prevedbe na linearno diferencialno enačbo.

3. **[10]**

(a) *[5]* Kateri dve izmed naštetih funkcij sta linearno odvisni:
$y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^3$, $y_3(x) = 3x$, $y_4(x) = 3x + 3$. Utemelji odgovor.

(b) *[5]* Dokaži trditev:
Če je y_P neka rešitev linearne diferencialne enačbe n-tega reda in y_H splošna rešitev njenega homogenega dela, tedaj je $y_H + y_P$ splošna rešitev linearne diferencialne enačbe n-tega reda.

4. **[10]** Naj bo $y(x) = \mathrm{e}^x x \sin x$ ena izmed rešitev diferencialne enačbe

$$y^{(4)}(x) + a_3 y'''(x) + a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,\ a_i \in \mathbb{R}\,.$$

(a) *[5]* Navedi preostale 3 linearno neodvisne rešitve te diferencialne enačbe.

(b) *[5]* Določi koeficiente a_i za $i = 0, 1, 2, 3$.