Vpisna številka Priimek in ime

3. test pri predmetu MATEMATIKA II
Računski del
7. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana. Na vsak dodatni list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka in pripravljeni listi s formulami, ki jih je pripravil asistent.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Reši diferencialno enačbo

$$x^2y' + 2xy = y^2 + 2x^2.$$

Poišči še rešitev zgornje diferencialne enačbe pri pogoju $y(1) = 0$.

2. **[20]** Reši diferencialno enačbo

$$y' = 2y \tan x + 2\sqrt{y^3} \sin^3 x.$$

3. **[20]** Naj bo $y = y(x)$. Reši diferencialno enačbo

$$2y''' + 8y' = y'' + 4y + 8e^{\frac{x}{2}}.$$

Vpisna številka Priimek, ime

3. test pri predmetu MATEMATIKA II
Teoretični del
7. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Dana je diferencialna enačba $y'(x) = x$. Poišči obe koordinati točke $(1, y(1))$ na tisti partikularni rešitvi y dane diferencialne enačbe, ki seka ordinatno os pri $\frac{1}{2}$.

2. **[10]** Dokaži trditev:
Če je y_H rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe (LDE) 1. reda in y_P neka partikularna rešitev cele LDE 1. reda, tedaj je tudi $y_H + y_P$ rešitev cele LDE 1. reda.

3. **[15]**

(a) *[10]* Izpelji metodo variacije konstant za linearno diferencialno enačbo 2. reda s konstantnimi koeficienti.

(b) *[5]* Podaj konkretni primer linearne diferencialne enačbe 2. reda s konstantnimi koeficienti, ki se jo lahko reši samo z metodo variacije konstant.
(Primera ni potrebno rešiti.)

4. **[5]** Kateri dve izmed naštetih rešitev diferencialne enačbe

$$y''(x) + y(x) = 2\mathrm{e}^x$$

sta linearno odvisni:

$y_1(x) = \mathrm{e}^x + \cos x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^x,\ y_3(x) = 3\cos x + 3\sin x,\ y_4(x) = \cos x + \sin x\,.$

Vpisna številka Priimek, ime K KI

3. test pri predmetu MATEMATIKA B
Računski del
7. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument. Ugasni in odstrani mobilni telefon. Uporaba knjig, zapiskov in rešenih nalog ni dovoljena.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji ter ga jasno in nedvoumno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Na vsak dodaten list, ki je priložen k testni/izpitni poli, označi ime in priimek oz. vpisno številko, ter jasno označi katera naloga je reševana.*
- *Dovoljeni pripomočki so: kemični svinčnik, svinčnik, nalivno pero, ravnilo, radirka, matematični priročnik in pripravljeni listi s formulami za Matematiko B in formule za integrale, ki jih je pripravil asistent.*
- *Čas reševanja je* **75 minut**.

1. **[20]** Poišči sinusno Fourierovo vrsto za periodično razširitev funkcije $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, ki je podana s predpisom

$$f(x) = x(\pi - x),$$

in izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

2. **[20]** Linearna preslikava $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ je podana takole

$\mathcal{A}(X_1) = (0, -1, 1)$, $\mathcal{A}(X_2) = (0, 2, 0)$, $\mathcal{A}(X_3) = (0, 0, 0)$, $\mathcal{A}(X_4) = (1, -1, 0)$,

kjer je

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Glede na urejeni standardni bazi poišči matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$, ter nato poišči še bazo jedra in bazo slike.

3. **[20]** Naj bo $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ in $x_3 = x_3(t)$. Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}
x_1' &= 2x_1 + x_2 + 2e^{2t} \\
x_2' &= -x_1 + x_3 \\
x_3' &= x_2 + 2x_3
\end{aligned}$$

Vpisna številka Priimek, ime K KI

3. test pri predmetu MATEMATIKA B
Teoretični del
7. 6. 2021

Navodila:

- *Pripravi osebni dokument.*
- *Ugasni in odstrani mobilni telefon. Dovoljeni pripomočki so samo pisala.*
- *Piši čitljivo, vsak odgovor utemelji in ga jasno podaj. V nasprotnem primeru celotna naloga ne bo točkovana.*
- *Čas reševanja je* **40 minut**.

1. **[10]** Naj bosta U in V vektorska prostora.

   (a) *[5]* Definiraj linearno transformacijo $\mathcal{A} : U \to V$.

   (b) *[5]* Podaj konkretni primer nelinearnega endomorfizma v $\mathbb{R}^2$. Utemelji odgovor oz. pokaži nelinarnost.

2. **[10]** Pokaži, da je množica vektorjev $\{\mathbf{1}, \mathbf{cos}(\mathbf{nx}), \mathbf{sin}(\mathbf{nx}) | \, \mathbf{n} \in \mathbb{N}\}$ iz vektorskega prostora $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ ortogonalna množica glede na standardni skalarni produkt v tem vektorskem prostoru.

3. **[10]** Navedi in dokaži izrek, ki pove, kako se matrika linearne transformacije $\mathcal{A} : U \to V$ izraža za v novih bazah C_u in C_v, če je znana matrika v bazah B_u in B_v (pri tem velja $B_u, C_u \subset U$ in $B_v, C_v \subset V$).

4. **[10]** Izpelji postopek reševanja nehomogenih sistemov diferencialnih enačb $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ z uporabo diagonalizacije matrike A.