Logika in množice

1. *Presek* $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$.
2. *Unija* $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$.
3. *Razlika* $A \setminus B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$.
4. *Komplement glede na univezalno množico* U, $A^C = \{x \in U; x \notin A\}$.
5. *Kartezični produkt množic* A *in* B, $A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}$.
6. *Potenčna množica množice* A, $\mathcal{P}(A)$ je množica vseh podmnožic množice A.

Nekatere lastnosti operacij z množicami:
$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$, $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

Preslikave

Definicija. *Preslikava* f iz množice A v množico B, $f : A \to B$, je predpis, ki vsakemu elementu $a\ inA$ priredi natanko en element $b \in B$, kar označimo $f(a) = b$.

Naj bo $f : A \to B$. Potem je A *definicijsko območje* D_f ali *domena* preslikave f, B pa njena *kodomena.*

Definicija. Preslikava $f : A \to B$ je *surjektivna*, če $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$.

Zaloga vrednosti preslikave $f : A \to B$, Z_f,

$$Z_f = \{b \in B; \exists a \in A : f(a) = b\} = \{f(a); a \in A\}.$$

Definicija. Preslikava $f : A \to B$ je *injektivna*, če s $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Definicija. Preslikava $f : A \to B$ je *bijektivna*, ko $\forall a \in A, \exists!\, b \in B : f(a) = b$. (injektivna in surjektivna).

Definicija. *Kompozitum preslikav* $f : A \to B$ in $g : B \to C$ je preslikava $g \circ f : A \to C$, definirana s predpisom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Številski obsegi

Matematična indukcija

(i) $P(1)$,

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definicija. Najmanjšo zgornjo mejo M' (navzgor) omejene množice A imenujemo *natančna zgornja meja* in jo imenujemo supremum množice A: $M' = \sup A$. Za M' velja:

(i) M' je zgornja meja množice A ($x \leq M', \forall x \in A$),

(ii) če je M^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $M' \leq M^*$.

Definicija. Največjo spodnjo mejo m' (navzdol) omejene množice A imenujemo *natančna spodnja meja* in jo imenujemo infimum množice A: $M' = \inf A$. Za m' velja:

(i) m' je spodnja meja množice A ($m' \leq x, \forall x \in A$),

(ii) če je m^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $m^* \leq m'$.

Definicija.

1. Če supremum M' množice A obenem pripada množici A, ga imenujemo *maksimum* množice A, $M' = \max A$.

2. Če infimum m' množice A obenem pripada množici A, ga imenujemo *minimum* množice A $m' = \min A$.

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost realnega števila x, $|x|$, je definirana kot $|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$

Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ veljajo naslednje lastnosti:

(i) $|xy| = |x||y|$,

(ii) $|x+y| \leq |x| + |y|$,

iii) $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Kompleksna števila

Za $z = a + ib \in \mathbb{C}$

1. $Re(z) = a$, $Im(z) = b$, $\overline{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$, $i^2 = -1$, $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
2. *Polarni zapis* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $\overline{z} = i = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, kjer je $r = |z|$ in $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

Izrek *(Moivre-ova formula) Naj bo* $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Tedaj je*

$$z_1 z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 \ldots r_n (\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)) .$$

Posledica Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Tedaj je

$$z^n = r^n \left(\cos\left(n\varphi\right) + i\sin\left(n\varphi\right)\right), \; n \in \mathbb{N} .$$

Korenjenje Naj bo $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $u^n = z$.

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \; k \in \mathbb{Z} .$$