Logika in množice

1. *Presek* $A \cap B = \{x;\, x \in A \wedge x \in B\}$.
2. *Unija* $A \cup B = \{x;\, x \in A \vee x \in B\}$.
3. *Razlika* $A \setminus B = \{x;\, x \in A \wedge x \notin B\}$.
4. *Komplement glede na univezalno množico* U, $A^C = \{x \in U; x \notin A\}$.
5. *Kartezični produkt množic* A *in* B, $A \times B = \{(a,b); a \in A \wedge b \in B\}$.
6. *Potenčna množica množice* A, $\mathcal{P}(A)$ je množica vseh podmnožic množice A.

Nekatere lastnosti operacij z množicami:
$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$, $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

Preslikave

Definicija. *Preslikava* f iz množice A v množico B, $f : A \to B$, je predpis, ki elementu a iz množice A priredi natanko en element b iz množice B, kar označimo $f(a) = b$.

Naj bo $f : A \to B$. Potem je A *definicijsko območje* D_f ali *domena* preslikave f, B pa njena *kodomena*.

Definicija. Preslikava $f : A \to B$ je *surjektivna*, če $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$.

Zaloga vrednosti preslikave $f : A \to B$, Z_f,

$$Z_f = \{b \in B; \exists a \in A : f(a) = b\} = \{f(a); a \in A\}.$$

Definicija. Preslikava $f : A \to B$ je *injektivna*, če s $\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Definicija. Preslikava $f : A \to B$ je *bijektivna*, ko $\forall a \in A, \exists!\, b \in B : f(a) = b$. (injektivna in surjektivna).

Definicija. *Kompozitum preslikav* $f : A \to B$ in $g : B \to C$ je preslikava $g \circ f : A \to C$, definirana s predpisom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Številski obsegi

Matematična indukcija

(i) $P(1)$,

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definicija. Najmanjšo zgornjo mejo M' (navzgor) omejene množice A imenujemo *natančna zgornja meja* in jo imenujemo supremum množice A: $M' = \sup A$.

To pomeni, da za M' velja:

(i) M' je zgornja meja množice A ($x \leq M', \forall x \in A$),

(ii) če je M^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $M' \leq M^*$.

Definicija. Največjo spodnjo mejo m' (navzdol) omejene množice A imenujemo *natančna spodnja meja* in jo imenujemo infimum množice A: $M' = \inf A$.

To pomeni, da za m' velja:

(i) m' je spodnja meja množice A ($m' \leq x, \forall x \in A$),

(ii) če je m^* poljubna zgornja meja množice A, tedaj je $m^* \leq m'$.

Definicija.

1. Če supremum M' množice A obenem pripada množici A, ga imenujemo *maksimum* množice A, $M' = \max A$.
2. Če infimum m' množice A obenem pripada množici A, ga imenujemo *minimum* množice A $m' = \min A$.

Absolutna vrednost

Absolutna vrednost realnega števila x, $|x|$, je definirana kot $|x| = \begin{cases} x & ; \quad x \geq 0 \\ -x & ; \quad x < 0 \end{cases}$

Lastnosti:

(i) $|xy| = |x||y|$,

(ii) $|x+y| \leq |x| + |y|$,

iii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Kompleksna števila

$z = a + ib \in \mathbb{C}$

1. $Re(z) = a$, $Im(z) = b$, $\overline{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $i^2 = -1$ $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.
2. *Polarni zapis* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $\overline{z} = i = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$, kjer je $r = |z|$ in $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

Izrek *(Moivre-ova formula) Naj bo $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Tedaj je*

$$z_1 z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)).$$

Posledica Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Tedaj je

$$z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right), \, n \in \mathbb{N}.$$

Korenjenje Naj bo $\sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $u^n = z$.

$$u_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \, k \in \mathbb{Z}.$$

Realne funkcije

Funkcija f definirana na simetričnem intervalu $D = (-a, a)$ ali $D = [-a, a]$

(i) je *soda*, če velja $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in D$;

(ii) je *liha*, če velja $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in D$.

Naj bo f definirana na D_f in $x_1, x_2 \in D_f$. Tedaj je f

(i) *naraščajoča*, ko velja $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(ii) *padajoča*, ko velja $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Podobno za strogo naraščajoče in strogo padajoča.

Če obstaja tako število $P \in \mathbb{R}$, da je $f(x + P) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, potem je f *periodična funkcija* s periodo P.

Naj bosta $f : D_f \to \mathbb{R}$ in $g : D_g \to \mathbb{R}$. Tedaj je naravno definicijsko območje kompozituma $f \circ g$ definirano takole $D_{f\circ g} = \{x \in D_g;\, g(x) \in D_f\}$.

Elementarne funkcije

Polinomi in racionalne funkcije

Polinomi so funkcije oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kjer je $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, ..., n$. Če je $a_n \neq 0$ pravimo, da je polinom p *stopnje* n. V posebnem primeru, ko je $p(x) = ax^2 + bx + c$, imamo naslednjo formulo za iskanje ničel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Racionalna funkcija f je kvocient dveh polinomov p in q:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,.$$

Ničle ima v točkah, kjer je $p(x) = 0$. Definirana je povsod, kjer je $q(x) \neq 0$. V točkah, kjer je $q(x) = 0$, funkcija f ni definirana. Pravimo, da ima v taki točki funkcija *pol* ali *vertikalno asimptoto.*

Trigonometrične funkcije

Funkcije sinus (sin), kosinus (cos), tangens (tan) in kotangens (cot) definiramo na enotski krožnici. Velja

(i) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

(ii) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

(iii) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

(iv) Adicijska izreka: $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,,\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,.$

(v) Dvojni koti: $\sin(2x) = 2 \sin x \cos y\,,\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x\,.$

(vi) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x\,,\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x\,.$

(vii) $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot\, x\,,\ \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan\, x\,.$

Funkciji kosinus in sinus sta definirana na celem $\mathbb{R}$, medtem ko funkcija tangens ni definiran v ničlah kosinusa ($x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), kotangens pa ni definiran v ničlah sinusa ($x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Ciklometrične funkcije (krožne funkcije) so obratne funkcije od trigonometričnih. Ciklometrične funkcije so arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens. $\text{asin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $\text{acos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$. $\text{atan} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Eksponentna funkcija $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(ii) Za $a > 1$ je $f(x) = a^x$ strogo naraščajoča funkcija, $a < 1$ pa je $f(x) = a^x$ strogo padajoča funkcija.

(iii) Poseben primer e^x.

Logaritemska funkcija $\log_a x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Eksponentna in logaritemska funkcija sta si med seboj obratni. Velja

(i) $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$,

(ii) $0 = \log_a x \Leftrightarrow a^0 = 1 = x$, (logaritemska funkcija ima ničlo v točki 1)

(iii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $x, y > 0$,

(iv) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $x, y > 0$,

(v) $\log_a x^y = y \log_a x$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$,

(vi) $\log_e x = \ln x$

Hiperbolične funkcije

$$\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Funkcija ch$x$ je soda, sh$c$ pa liha. Velja

(i) $\text{sh}(x + y) = \text{sh}x\,\text{ch}y + \text{sh}y\,\text{ch}x$

(ii) $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y - \mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y$

(iii) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$

Zaporedja

Zaporedje (a_n) v množici M je preslikava $a: \mathbb{N} \to M$. Posebna primera

(i) $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$, kjer sta $a_1, d \in \mathbb{R}$ ... aritmetično zaporedje

(ii) $a_n = a_{n-1}q = a_1 q^{n-1}$, kjer sta $a_1, q \in \mathbb{R}$ ... geometrijsko zaporedje

Definicije

(i) Število $a \in M$ je *limita* zaporedja (a_n), $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, če

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Če obstaja limita zaporedja pravimo, da je zaporedje *konvergentno*, sicer je zaporedje *divergentno*.

(ii) Število s je *stekališče* zaporedja (a_n), če vsebuje vsaka poljubno majhna okolica števila s neskončno členov zaporedja (a_n).

(iii) Zaporedje (a_n) je *naraščajoče*, če velja $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) Zaporedje (a_n) je *strogo naraščajoče*, če velja $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(v) Zaporedje (a_n) je *padajoče*, če velja $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(vi) Zaporedje (a_n) je *strogo padajoče*, če velja $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(vii) Zaporedje je *monotono*, ko je (strogo) naračajoče ali (strogo) padajoče.

(viii) Zaporedje (a_n) je *navzgor omejeno*, če $\exists M \in \mathbb{R}$ tak, da velja $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ in je *navzdol omejeno*, če $\exists m \in \mathbb{R}$ tak, da velja $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

((ix)) Zaporedje je *omejeno*, ko je navzdol in navzgor omejeno.

((x)) *Supremum* M' zaporedja (a_n) je enak $M' = \sup\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} = \sup(a_n)$.

((xi)) *Infimum* m' zaporedja (a_n) je enak $m' = \inf\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} = \inf(a_n)$.

Izrek *Vsako monotono in omejeno zaporedje je konvergentno.*

Izrek *Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ in $c \in \mathbb{R}$. Tedaj velja*

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A + B$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot A$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, *če* $b_n \neq 0$ *in* $B \neq 0$.

Vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$$

imenujemo *številska vrsta* ali na kratko *vrsta*, realnim številom a_1, a_2, ... pa pravimo *členi vrste*. Naj bo $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, kjer $n \in \mathbb{N}$. Če je zaporedje S_n konvergentno, imenujemo njegovo limito S *vsota vrste*.

Vsota členov geometrijskega zaporedja tvori *geometrijsko vrsto*:

$$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}, \text{ če } |q| < 1.$$

Pogoji za konvergenco vrste

(i) *Cauchyjev pogoj*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon, \, \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

(ii) *Potreben pogoj za konvergenco vrste*

Če je vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, tedaj je $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0\,.$

Definicija. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je *majoranta* vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, če je za vsako naravno število n izpolnjen pogoj

$$a_n \leq b_n\,.$$

Pravimo tudi, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *minoranta* vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Konvergenca vrst s pozitivnimi členi

(i) Primerjalni kriterij

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi je konvergentna, če ima kakšno konvergentno majoranto* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi divergentna, če ima kakšno divergentno minoranto* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) *Kvocientni ali D'Alembertov kriterij*

Naj bo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,.$ *Tedaj velja, če je*

- $q < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,
- $q > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira,
- $q = 1 \Rightarrow$ kriterij ne da odgovora.

(iii) *Korenski ali Cauchyjev kriterij*

Naj bo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q\,.$ *Tedaj velja, če je*

- $q < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,
- $q > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira,
- $q = 1 \Rightarrow$ kriterij ne da odgovora.

(iv) *Raabejev kriterij*

Naj bo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo* q *limita pridruženega zaporedja* $\displaystyle q = \lim_{n\to\infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right)\,.$ *Tedaj velja, če je*

- $q > 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,
- $q < 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Konvergenca alternirajočih vrst

Alternirajoča vrsta je vrsta s pozitivnimi in negativnimi členi, ki si izmenično sledijo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \,.$$

Leibnizov kriterij

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna, če je

- (a_n) alternirajoče,
- $(|a_n|)$ padajoče,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\,.$

Konvergenca vrst s poljubnimi členi

Definicija. Vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če konvergira vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Če za konvergentno vrsto $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, potem je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *pogojno konvergentna.*

Potenčne vrste

Potenčna vrsta je vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, x^n \,,$$

kjer je (a_n) neko zaporedje. Naj bo q takšen kot pri kvocientnem ali korenskem kriteriju za člene a_n. Tedaj potenčna vrsta vrsta konvergira za $|x| < \frac{1}{q}$. $R = \frac{1}{q}$ imenujemo *konvergenčni polmer* potenčne vrste.

Zveznost in limita funkcije

Definicija. *Funkcija f ima v a* desno limito*, L^+, če velja:*

$$L^+ = \lim_{x\to a+0} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, \forall\, x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L^+| < \varepsilon \,.$$

Funkcija f ima v a levo limito*, L^-, če velja:*

$$L^- = \lim_{x\to a-0} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, \forall\, x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L^-| < \varepsilon \,.$$

Velja

$$L = L^+ = L^- \Leftrightarrow L = \lim_{x\to a} f(x) \,.$$

Izrek. *Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Tedaj velja:*

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = A\, B$,

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Definicija. *Funkcija f ima limito L, ko gre x proti neskončno, če*

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, M > 0,\, \forall\, x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \,.$$

Funkcija f ima limito L, ko gre x proti minus neskončno, če

$$L = \lim_{x\to-\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, m < 0,\, \forall\, x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \,.$$

Pomembnejše limite:

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

(iii) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$

(vi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

Zveznost funkcije

Definicija. *Funkcija f je zvezna v točki a:*

$$\forall \epsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \epsilon\,.$$

Definicija. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je* zvezna, *če je zvezna v vsaki točki svoje domene D.*
Iz definicij limite in zveznosti sledi:

$$f \text{ je zvezna v } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Izrek. *Če sta funkciji f in g zvezni v točki a in je $c \neq 0$ neko število, potem so v a zvezne tudi funkcije*

(i) $f \pm g$,

(ii) $c \cdot f$,

(iii) $f \cdot g$,

(iv) $\frac{f}{g}$, *če je* $g \neq 0$.

Izrek. Če sta f in g zvezni funkciji v točki a, tedaj je

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))\,.$$

Definicija. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je* zvezna, *če je zvezna v vsaki točki odprtega intervala (a,b) in v točki a obstaja desna limita, ki je enaka $f(a)$ in v točki b leva limita, ki je enaka $f(b)$:*

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists \delta > 0,\, 0 < h < \delta \Rightarrow$$

$$|f(a) - f(a+h)| < \epsilon \,\wedge\, |f(b) - f(b-h)| < \varepsilon\,.$$

Izrek. *Naj bo $f \in [a,b]$ in $f(a)\,f(b) < 0$. Tedaj obstaja $c \in (a,b)$ takšna, da je $f(c) = 0$.*

Definicija. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$* navzgor omejena, *če obstaja $M \in \mathbb{R}$ tak, da je*

$$f(x) \leq M,\, \forall x \in [a,b]\,.$$

Podobno je f navzdol omejena, *če obstaja $m \in \mathbb{R}$ tak, da je*

$$f(x) \geq m,\, \forall x \in [a,b]\,.$$

Števili M in m imenujemo zgornja *oz.* spodnja meja *funkcije f na $[a,b]$.*

Definicija. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Najmanjša zgornja meja M' je* natančna zgornja meja *ali* supremum *funkcije f:*

$$M' = \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Največja spodnja meja m' je natančna spodnja meja *ali* infimum *funkcije f:*

$$m' = \inf_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Izrek. *Vsaka zvezna funkcija definirana na zaprtem intervalu je omejena.*

Izrek. *Zvezna funkcija $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ doseže na intervalu $[a,b]$ minimum in maksimum.*

Izrek. *Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom.*

Posledica. *Zaloga vrednosti zvezne funkcije definirane na $[a,b]$ je interval $[m', M']$, kjer je*

$$m' = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{in} \quad M' = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$