Realne funkcije

Funkcija f definirana na simetričnem intervalu $D=(-a,a)$ ali $D=[-a,a]$

(i) je ***soda***, če velja $f(x)=f(-x)$, $\forall x\in D$;

(ii) je ***liha***, če velja $f(x)=-f(-x)$, $\forall x\in D$.

Naj bo f definirana na D_f in $x_1,x_2\in D_f$. Tedaj je f

(i) ***naraščajoča***, ko velja $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

(ii) ***padajoča***, ko velja $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$.

Podobno za strogo naraščajoče in strogo padajoča.

Če obstaja tako število $P\in\mathbb{R}$, da je $f(x+P)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, potem je f ***periodična funkcija*** s periodo P.

Naj bosta $f:D_f\to\mathbb{R}$ in $g:D_g\to\mathbb{R}$. Tedaj je naravno definicijsko območje kompozituma $f\circ g$ definirano takole $D_{f\circ g}=\{x\in D_g;\ g(x)\in D_f\}$.

Elementarne funkcije

Polinomi in racionalne funkcije

Polinomi so funkcije oblike

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,,$$

kjer je $a_i\in\mathbb{R}$, $\forall i=1,2,...,n$. Če je $a_n\neq 0$ pravimo, da je polinom p ***stopnje*** n. V posebnem primeru, ko je $p(x)=ax^2+bx+c$, imamo naslednjo formulo za iskanje ničel $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Racionalna funkcija f je kvocient dveh polinomov p in q:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}\,.$$

Ničle ima v točkah, kjer je $p(x)=0$. Definirana je povsod, kjer je $q(x)\neq 0$. V točkah, kjer je $q(x)=0$, funkcija f ni definirana. Pravimo, da ima v taki točki funkcija *pol* ali *vertikalno asimptoto*.

Trigonometrične funkcije

Funkcije sinus (sin), kosinus (cos), tangens (tan) in kotangens (cot) definiramo na enotski krožnici. Velja

(i) $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$

(ii) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

(iii) $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$

(iv) Adicijska izreka: $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$.

(v) Dvojni koti: $\sin(2x)=2\sin x\cos y$, $\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$.

(vi) $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin x$.

(vii) $\tan(\frac{\pi}{2}-x)=\cot x$, $\cot(\frac{\pi}{2}-x)=\tan x$.

Funkciji kosinus in sinus sta definirana na celem $\mathbb{R}$, medtem ko funkcija tangens ni definiran v ničlah kosinusa ($x=k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$), kotangens pa ni definiran v ničlah sinusa ($x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$).

Ciklometrične funkcije (krožne funkcije) so obratne funkcije od trigonometričnih. Ciklometrične funkcije so arkus sinus, arkus kosinus, arkus tangens in arkus kotangens. asin : $[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. acos : $[-1,1]\to[0,\pi]$. atan : $\mathbb{R}\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Eksponentna funkcija $a^x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$.

(ii) Za $a > 1$ je $f(x) = a^x$ strogo naraščajoča funkcija, $a < 1$ pa je $f(x) = a^x$ strogo padajoča funkcija.

(iii) Poseben primer e^x.

Logaritemska funkcija $\log_a x \,:\, \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

Eksponentna in logaritemska funkcija sta si med seboj obratni. Velja

(i) $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$,

(ii) $0 = \log_a x \Leftrightarrow a^0 = 1 = x$, (logaritemska funkcija ima ničlo v točki 1)

(iii) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $x, y > 0$,

(iv) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, $x, y > 0$,

(v) $\log_a x^y = y \log_a x$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$,

(vi) $\log_e x = \ln x$

Hiperbolične funkcije

$$\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Funkcija ch$x$ je soda, sh$c$ pa liha. Velja

(i) $\text{sh}(x + y) = \text{sh}x\,\text{ch}y + \text{sh}y\,\text{ch}x$

(ii) $\text{ch}(x + y) = \text{ch}x\,\text{ch}y - \text{sh}x\,\text{sh}y$

(iii) $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Zaporedja

Zaporedje (a_n) v množici M je preslikava $a : \mathbb{N} \to M$. Posebna primera

(i) $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$, kjer sta $a_1, d \in \mathbb{R}$ ... aritmetično zaporedje

(ii) $a_n = a_{n-1}q = a_1 q^{n-1}$, kjer sta $a_1, q \in \mathbb{R}$ ... geometrijsko zaporedje

Definicije

(i) Število $a \in M$ je *limita* zaporedja (a_n), $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, če

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\,.$$

Če obstaja limita zaporedja pravimo, da je zaporedje *konvergentno*, sicer je zaporedje *divergentno*.

(ii) Število s je *stekališče* zaporedja (a_n), če vsebuje vsaka poljubno majhna okolica števila s neskončno členov zaporedja (a_n).

(iii) Zaporedje (a_n) je *naraščajoče*, če velja $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) Zaporedje (a_n) je *strogo naraščajoče*, če velja $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(v) Zaporedje (a_n) je *padajoče*, če velja $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(vi) Zaporedje (a_n) je *strogo padajoče*, če velja $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(vii) Zaporedje je *monotono*, ko je (strogo) naračajoče ali (strogo) padajoče.

(viii) Zaporedje (a_n) je *navzgor omejeno*, če $\exists M \in \mathbb{R}$ tak, da velja $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ in je *navzdol omejeno*, če $\exists m \in \mathbb{R}$ tak, da velja $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

((ix)) Zaporedje je *omejeno*, ko je navzdol in navzgor omejeno.

((x)) *Supremum* M' zaporedja (a_n) je enak $M' = \sup\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} = \sup(a_n)$.

((xi)) *Infimum* m' zaporedja (a_n) je enak $m' = \inf\{a_n;\, n \in \mathbb{N}\} = \inf(a_n)$.

Izrek *Vsako monotono in omejeno zaporedje je konvergentno.*

Izrek *Naj bosta (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ in $c \in \mathbb{R}$. Tedaj velja*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A + B$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot A$,

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, *če $b_n \neq 0$ in $B \neq 0$.*

Vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$$

imenujemo *številska vrsta* ali na kratko *vrsta*, realnim številom a_1, a_2, ... pa pravimo *členi vrste*. Naj bo $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, kjer $n \in \mathbb{N}$. Če je zaporedje S_n konvergentno, imenujemo njegovo limito S *vsota vrste*.

Vsota členov geometrijskega zaporedja tvori *geometrijsko vrsto*:

$$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}, \text{ če } |q| < 1.$$

Pogoji za konvergenco vrste

(i) *Cauchyjev pogoj*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{konv.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, : |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon,\ \forall p \in \mathbb{N}.$$

(ii) *Potreben pogoj za konvergenco vrste*

Če je vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, tedaj je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Definicija. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je *majoranta* vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, če je za vsako naravno število n izpolnjen pogoj

$$a_n \leq b_n .$$

Pravimo tudi, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *minoranta* vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Konvergenca vrst s pozitivnimi členi

(i) Primerjalni kriterij

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi je konvergentna, če ima kakšno konvergentno majoranto* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *s pozitivnimi členi divergentna, če ima kakšno divergentno minoranto* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) *Kvocientni ali D'Alembertov kriterij*

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. *Tedaj velja, če je*

- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,
- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira,
- $q = 1 \Rightarrow$ kriterij ne da odgovora.

(iii) *Korenski ali Cauchyjev kriterij*

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. *Tedaj velja, če je*

- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,
- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira,
- $q = 1 \Rightarrow$ kriterij ne da odgovora.

(iv) *Raabejev kriterij*

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj bo q limita pridruženega zaporedja* $q = \lim_{n\to\infty} \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right)$. *Tedaj velja, če je*

- $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,
- $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Konvergenca alternirajočih vrst

Alternirajoča vrsta je vrsta s pozitivnimi in negativnimi členi, ki si izmenično sledijo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \,.$$

Leibnizov kriterij

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentna, če je*

- (a_n) alternirajoče,
- $(|a_n|)$ padajoče,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Konvergenca vrst s poljubnimi členi

Definicija. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna*, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Če za konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, potem je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pogojno konvergentna.*

Potenčne vrste

Potenčna vrsta je vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\,,$$

kjer je (a_n) neko zaporedje. Naj bo q takšen kot pri kvocientnem ali korenskem kriteriju za člene a_n. Tedaj potenčna vrsta vrsta konvergira za $|x| < \frac{1}{q}$. $R = \frac{1}{q}$ imenujemo *konvergenčni polmer* potenčne vrste.

Zveznost in limita funkcije

Definicija. *Funkcija f ima v a* desno limito*, L^+, če velja:*

$$L^+ = \lim_{x\to a+0} f(x) \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\, \exists\,\delta > 0,\, \forall\,x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L^+| < \varepsilon\,.$$

Funkcija f ima v a levo limito*, L^-, če velja:*

$$L^- = \lim_{x\to a-0} f(x) \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\, \exists\,\delta > 0,\, \forall\,x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L^-| < \varepsilon\,.$$

Velja

$$L = L^+ = L^- \Leftrightarrow L = \lim_{x\to a} f(x)\,.$$

Izrek. *Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = A$ in $\lim_{x\to a} g(x) = B$. Tedaj velja:*

(i) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,

(ii) $\lim_{x\to a}(f(x)\, g(x)) = A\, B$,

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Definicija. *Funkcija f ima limito L, ko gre x proti neskončno, če*

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\, \exists\,M > 0,\, \forall\,x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Funkcija f ima limito L, ko gre x proti minus neskončno, če

$$L = \lim_{x\to -\infty} f(x) \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\, \exists\,m < 0,\, \forall\,x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\,.$$

Pomembnejše limite:

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

Zveznost funkcije

Definicija. *Funkcija f je zvezna v točki a:*

$$\forall\, \epsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon\,.$$

Definicija. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je* zvezna, *če je zvezna v vsaki točki svoje domene D.*

Iz definicij limite in zveznosti sledi:

$$f \text{ je zvezna v } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Izrek. *Če sta funkciji f in g zvezni v točki a in je $c \neq 0$ neko število, potem so v a zvezne tudi funkcije*

(i) $f \pm g$,

(ii) $c \cdot f$,

(iii) $f \cdot g$,

(iv) $\frac{f}{g}$, *če je* $g \neq 0$.

Izrek. Če sta f in g zvezni funkciji v točki a, tedaj je

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))\,.$$

Definicija. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je* zvezna, *če je zvezna v vsaki točki odprtega intervala (a,b) in v točki a obstaja desna limita, ki je enaka $f(a)$ in v točki b leva limita, ki je enaka $f(b)$:*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0,\, 0 < h < \delta \Rightarrow$$

$$|f(a) - f(a+h)| < \epsilon \,\wedge\, |f(b) - f(b-h)| < \varepsilon\,.$$

Izrek. *Naj bo $f \in [a,b]$ in $f(a)\, f(b) < 0$. Tedaj obstaja $c \in (a,b)$ takšna, da je $f(c) = 0$.*

Definicija. *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je na $[a,b]$* navzgor omejena, *če obstaja $M \in \mathbb{R}$ tak, da je*

$$f(x) \leq M,\, \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Podobno je f navzdol omejena, *če obstaja $m \in \mathbb{R}$ tak, da je*

$$f(x) \geq m,\, \forall\, x \in [a,b]\,.$$

Števili M in m imenujemo zgornja *oz.* spodnja meja *funkcije f na $[a,b]$.*

Definicija. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Najmanjša zgornja meja M' je* natančna zgornja meja *ali* supremum *funkcije f:*

$$M' = \sup_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Največja spodnja meja m' je natančna spodnja meja *ali* infimum *funkcije f:*

$$m' = \inf_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$

Izrek. *Vsaka zvezna funkcija definirana na zaprtem intervalu je omejena.*

Izrek. *Zvezna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ doseže na intervalu $[a,b]$ minimum in maksimum.*

Izrek. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj zavzame vse vrednosti med minimumom in maksimumom.*

Posledica. *Zaloga vrednosti zvezne funkcije definirane na $[a,b]$ je interval $[m', M']$, kjer je*

$$m' = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \textit{in} \quad M' = \max_{x\in[a,b]} f(x)\,.$$