Diferencialni račun

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *odvedljiva*, če je odvedljiva v vsaki točki definicijskega obmoja D. Funkciji, ki x priredi $f'(x)$ pravimo *odvod* funkcije f.

Izrek. Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.

Geometrijski pomen odvoda

Tangenta na graf funkcije f v točki a je premica, ki gre skozi točko $(a, f(a))$ in je njen smerni koeficient enak $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Veljajo naslednje zveze:

1. $\tan\varphi = k$.
2. Smerni koeficient normale: $k_N = -\dfrac{1}{k_T}$, kjer je k_T smerni koeficient tangente.
3. Kot med premicama v presečišču: $\tan\varphi = \left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Pravila za odvajanje

Izrek. Naj bosta funkciji f in g odvedljivi funkciji v točki x in c poljubna konstanta iz $\mathbb{R}$ različna od 0. Potem so v x odvedljive tudi funkcije $f+g$, $c\cdot f$, $f\cdot g$ in za vsak $g \neq 0$ tudi funkcija $\frac{f}{g}$. Pri tem velja:

(i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

(ii) $(c\,f)'(x) = c\,f'(x)$,

(iii) $(f\,g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$,

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$.

Izrek. (Verižno pravilo) Naj bo funkcija g odvedljiva v točki x in naj bo f odvedljiva v točki $g(x)$. Tedaj je tudi $f\circ g$ odvedljiva v x in velja

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)\,.$$

Izreki o srednji vrednosti

Definicija. Funkcija f ima v c *lokalni maksimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(c-\delta, c+\delta)$ velja

$$f(x) \le f(c)\,.$$

Funkcija ima v točki c *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(c-\delta, c+\delta)$ velja

$$f(x) \ge f(c)\,.$$

Lokalni minimum in lokalni maksimum imenujemo tudi *lokalna ekstrema*.

Izrek. Naj bo f odvedljiva v točki c in naj ima v c lokalni maksimum ali lokalni minimium. Tedaj je $f'(c) = 0$.

Definicija. Točko c v kateri je $f'(c) = 0$, imenujemo *stacionarna točka*.

Izrek. (Rolleov izrek) Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Če je $f(a) = f(b)$, tedaj obstaja takšna točka $c \in (a, b)$, da je $f'(c) = 0$.

Izrek. (Cauchyjev izrek) Naj bosta funkciji $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni na $[a, b]$, odvedljivi na (a, b) in je $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Tedaj obstaja vsaj ena takšna točka $c \in (a, b)$, da je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Izrek. (Lagrangeov izrek) Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Tedaj obstaja vsaj ena takšna točka $c \in (a, b)$, da je

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)\,.$$

L'Hospitalovo pravilo

Izrek. Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na neki okolici točke a (razen morda v točki a sami). Denimo da sta funkciji g in g' na tej okolici različni od 0 (razen morda v točki a sami) in da je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Če obstaja $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, tedaj obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ in sta enaki.

Nedoločenosti tipa: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ lahko prevedemo na situacijo $\frac{0}{0}$.

Nedoločenosti tipa: ∞^0 1^∞ in 0^0 rešujemo s pomočjo ln in L'Hospitalovega pravila.

$$\ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)$$

Taylorjeva vrsta

Naj bo f poljubna, n-krat odvedljiva funkcija, $n \in \mathbb{N}$. Tedaj je

$$Q_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

n-ti Taylorjev polinom za funkcijo f.

Izrek. (Taylorjeva formula) Naj bo funkcija f $n + 1$-krat odvedljiva na odprtem intervalu I in naj bo $a \in I$. Za vsak $x \in I$ obstaja tak $\xi \in I$, ki leži med a in x, da je

$$f(x) = Q_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}\,.$$

Za Taylorjevo vrsto mora veljati

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1} = 0\,.$$

Znane Taylorjeve vrste za $a = 0$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,\ \forall x \in (-1, 1]$$
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ \forall x \in (-1, 1)$$

Odvod in graf funkcije

Naj bo funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva.

1. Naraščanje in padanje
   - (i) $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ strogo naraščajča,
   - (ii) $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ naraščajča,
   - (iii) $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ strogo padajoča,
   - (iv) $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ padajoča.
2. Ekstremi
   - (i) $f'(a) = 0$. Če je $f''(a) < 0$, tedaj ima f v točki a lokalni maksimum,
   - (ii) $f'(a) = 0$. Če je $f''(a) > 0$, tedaj ima f v točki a lokalni minimum.
3. Konveksnost in konkavnost funkcij
   - (i) Če je $f''(x_0) > 0$ za vsak $x_0 \in (a, b)$, je funkcija f na intervalu $[a, b]$ konveksna.
   - (ii) Če je $f''(x_0) < 0$ za vsak $x_0 \in (a, b)$, je funkcija f na intervalu $[a, b]$ konkavna.
4. Prevoj: $f''(0) = 0$
5. Vertikalna asimptota (pol) v točki a
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty \quad \text{ali} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty\,.$$
6. Poševna asimptota v točki a
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{in} \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = n\,.$$

Tabela odvodov elementarnih funkcij:

$(x^r)' = r\,x^{r-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{asin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{acos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{atan} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{acot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(a^x)' = a^x\ \ln a$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ \ln a}$
$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$