Integralni račun

Nedoločeni integral

Definicija. Naj bo dana funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Funkcija F, za katero v vsaki točki iz $x \in D$ velja

$$F'(x) = f(x)$$

se imenuje *nedoločeni integral* funkcije f.

$$\int f(x)\, dx\,.$$

Izrek. Če je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$, je njen nedoločeni integral tudi funkcija $F(x)+C$, kjer je C poljubna konstanta. Vsak nedoločeni integral funkcije $f(x)$ je oblike $F(x) + C$.

TABELA OSNOVNIH INTEGRALOV:

$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$	$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \tan x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int \cot x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert + C, (\lvert x\rvert < a)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\rvert + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + C, (\lvert x\rvert > a)$

Osnovna pravila za intergriranje

- $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx\,.$
- $\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx\,.$
- **Uvedba nove spremenljivke**
  Naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Če ima funkcija $f(x)$ nedoločeni integral, obstaja tudi nedoločeni integral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in velja
  $$\int f(x)\, dx = \int f(x(t))x'(t)\, dt\,.$$
- **Integriranje po delih**
  $$\int u\, dv = uv - \int v\, du\,.$$

Integracijske metode

1. **Integriranje racionalnih funkcij**

- $\int \frac{P_m(x)}{P_n(x)}\,dx$, P_m in P_n polinoma (stopnja izražena v indeksu).
- Če $m \geq n$, tedaj po osnovnem izreku o deljenju polinomov obstajata polinoma $Q(x)$ stopnje $m-n$ in $R(x)$ stopnje kvečjemu $n-1$ takšna, da velja $P_m(x) = Q(x)P_n(x) + R(x)$.
- Prevedli smo na intergracijo $\int Q(x) + \frac{R(x)}{P_n(x)}dx$.
- Za $\int \frac{R(x)}{P_n(x)}dx$ uporabimo ali zapišemo na parcialne ulomke ali uporabimo metodo Ostrogradskega. Prej poiščemo ničle polinoma $P_n(x) = (x-x_1)^\alpha \cdot (x-x_2)^\beta \cdots (x-x_m)^\mu (x^2 + p_n x + q_n)^A (x^2 + p_s x + q_s)^B \cdots (x^2 + p_y x + q_y)^\Upsilon$.
- Parcialni ulomki:

$$\begin{aligned}
\frac{R(x)}{P_n(x)} \quad = \quad & \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-x_1)^\alpha} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-x_2)^\beta} + \\
& + \cdots + \frac{M_1}{x-x_m} + \frac{M_2}{(x-x_m)^2} + \cdots + \frac{M_\mu}{(x-x_m)^\mu} + \\
& + \frac{N_1 x + O_1}{x^2+p_n x+q_n} + \frac{N_2 x + O_2}{(x^2+p_n x+q_n)^2} + \cdots + \frac{N_A x + O_A}{(x^2+p_n x+q_n)^A} + \\
& + \frac{S_1 x + _1}{x^2+p_s x+q_s} + \frac{S_2 x + O_2}{(x^2+p_s x+q_s)^2} + \cdots + \frac{S_B x + O_B}{(x^2+p_s x+q_s)^B} + \\
& + \cdots + \frac{Y_1 x + Z_1}{x^2+p_y x+q_y} + \frac{Y_2 x + Z_2}{(x^2+p_y x+q_y)^2} + \cdots + \frac{Y_\upsilon x + Z_\upsilon}{(x^2+p_y x+q_y)^\Upsilon}.
\end{aligned}$$

  Pri tem so $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_\beta, \ldots, M_1, M_2, \ldots, M_\mu, \ldots Y_1, Z_1, \ldots Y_\upsilon, Z_\upsilon$ konstante.
- **(i)** *Realna in enkratna ničla*

$$\int \frac{A}{(x-c)}\,dx = A \ln|x-c| + C\,.$$

(ii) *Realna in večkratna ničla*

$$\int \frac{A}{(x-c)^k}\,dx = \frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-c)^{k-1}} + C,\ k > 1\,.$$

(iii) *Kompleksna in enkratna ničla*

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+p\,x+q}\,dx\ D = p^2 - 4q < 0$$

Izpeljemo

$$x^2 + px + q = (x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} = (x + \frac{p}{2})^2 + (\frac{\sqrt{-D}}{2})^2$$

in s pomočjo tega dobimo

$$\int \frac{1}{x^2+p\,x+q}\,dx = \frac{2}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{atan}\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C\,.$$

Velja

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx.$$

(iv) *Kompleksna in večkratna ničla*

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx,\ D = p^2 - 4q < 0,\ k > 1$$

Integral razdelimo na dva integrala:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx \quad &= \quad \int \frac{\frac{A}{2}(2\,x+p) + \frac{2\,B - A\,p}{2}}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx \\
&= \quad \frac{A}{2}\int \frac{2\,x+p}{(x^2+p\,x+q)^k}\,dx + \frac{2\,B-A\,p}{2}\int \frac{dx}{(x^2+p\,x+q)^k}.
\end{aligned}$$

Prvega izračunamo podobno kot prej, za drugega pa uporabimo rekurzivno formulo:

$$\frac{2B-Ap}{2}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{2B-Ap}{2}\left[\frac{x+\frac{p}{2}}{2(k-1)(q-\frac{p^2}{4})(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)(q-\frac{p^2}{4})}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}\right].$$

- Metoda Ostrogradskega
$$\int\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{R_1(x)}{P_1(x)} + \int\frac{R_2(x)}{P_2(x)}dx,$$
kjer je $P_2(x)$ polinom, kjer se vsaka ničla $P(x)$ pojavi natanko enkrat, $R_2(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje za eno manj od $P_2(x)$, $P_1(x) = P(x) : P_2(x)$ in $R_1(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje za eno manj od $P_1(x)$.

2. **Integriranje funkcij s sinusom in kosinusom**

(i) $\int\sin^m x\,dx$, $\int\cos^m x\,dx$

a) Če je m liho število večje od 1, torej $m = 2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, je možno integrand zapisati v obliki
$$\sin^m x = (1-\cos^2 x)^k\sin x\,.$$
Z uvedbo nove spemenljivke $\cos x = t$ prevedemo primer na integral polinoma. V drugem primeru zapišemo
$$\cos^m x = (1-\sin^2 x)^k\cos x$$
in uvedemo $\sin x = t$.

b) Če je m sodo število, torej $m = 2k$, $k\in\mathbb{N}$, uporabimo zvezo
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,.$$
S tem se stopnja eksponenta zniža za polovico. Dokler je eksponent sodo število, postopek ponavljamo, ko pa pridemo do lihega eksponenta uporabimo točko a).
V drugem primeru uporabimo zvezo
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}\,.$$

(ii) $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ Če je vsaj en eksponent lih, postopamo tako kot v (i.a), sicer pa uporabimo postopek iz (i.b).

(iii)
- $\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[\sin((a-b)x) + \sin((a+b)x)]$,
- $\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}[(\cos((a-b)x) - \cos((a+b)x)]$,
- $\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}[(\cos((a-b)x) + \cos((a+b)x)]$.

(iv) *Univerzalna subsitucija* za $\int R(\cos x,\sin x)\,dx$, kjer je $R(u,v)$ racionalna funkcija
- Vpeljemo novo spremenljivko $t = \tan\frac{x}{2}$.
- $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

3. **Integriranje funkcij pod korenskim znakom (iracionalnih funkcij)**

(i) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$
Preoblikujeno izraz pod korenom
$$x^2+px+q = (x+\frac{p}{2})^2 + \frac{4q-p^2}{4}$$
in uvedemo novo spremenljivko $t = x+\frac{p}{2}$.

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$
Podobno kot prej preoblikujemo izraz pod korenom:

$$-x^2+px+q=-(x-\frac{p}{2})^2+\frac{4q+p^2}{4}$$

in uvedemo novo spremenljivko $t=x-\frac{p}{2}$.

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
Izpostavimo $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$, s čimer prevedemo primer na enega od prejšnjih dveh primerov.

(iv) $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, $P_n(x)$ poljuben polinom stopnje n
Nastavek

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+D\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,,$$

kjer je $Q(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje kvečjemu $n-1$ in D neznana konstanta.

Določeni integral

Definicija. Če obstaja limita

$$I=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)d_i\,,$$

potem število I imenujemo določeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$ in označimo

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Izrek. Če je funkcija f na intervalu $[a,b]$ zvezna, je na njem tudi integrabilna.
Velja tudi naslednje:

- $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx=0$
- $\left|\int_a^b f(x)\right|\leq\int_a^b |f(x)|$
- $g(x)\geq f(x)$ za vsak $x\in[a,b]$, tedaj $\int_a^b g(x)\,dx\geq\int_a^b f(x)\,dx$

Izrek. (O srednji vrednosti) Naj bo m natančna spodnja meja in M natančna zgornja meja na intervalu $[a,b]$ integrabilne funkcije f. Tedaj obstaja taka vrednost c med m in M, da je

$$\int_a^b f(x)=c(b-a)\,.$$

Če pa je funkcija f tudi zvezna, je $c=f(\xi)$ za neki $\xi\in[a,b]$.

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Izrek. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je njen določeni integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$, odvedljiva funkcija in velja $F' = f$.

Posledica. (Newton-Leibnizova formula) Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Če je F nedoločeni integral funkcije f, potem je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Trditev. Naj bo f zvezna funkcija in $x = x(t)$ zvezno odvedljiva funkcija. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(x(t))x'(t)\,dt\,,$$

kjer je $x(t)$ zvezno odvedljiva funkcija ter velja $a = x(c)$ in $b = x(d)$.

Glede na sodost oziroma lihost funkcije na simetričnem intervalu $[-a,a]$ velja naslednje

- f soda, tedaj $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- f liha, tedaj $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$

Uporaba določenega integrala v geometriji

1. **Ploščina lika med krivuljama**
$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx\,.$$

2. **Dolžina loka**
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

3. **Prostornina rotacijskega telesa**
$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx\,.$$

4. **Površina rotacijske ploskve**
$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,.$$

Posplošeni integral

Definicija.

(i) Če je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ za vsak $b \in \mathbb{R}$, $b > a$, tedaj je

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

(ii) Če je funkcija f integrabilna na $[a,b]$ za vsak $a \in \mathbb{R}$, $a < b$, tedaj je

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

(iii) Če je funkcija f integrabilna na $[a, b]$ za vsak $a, b\mathbb{R}$, $a < b$, tedaj je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} f(x)dx.$$

Vsi trije integrali so posplošeni integrali funkcije f, če le obstajajo ustrezne limite.

Funkcija Γ

- $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt$,
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,
- $\Gamma(n+1) = n!$,
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.