Navadne diferencialne enačbe

V celotnem poglavju bo
$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Navadne diferencialne enačbe prvega reda

1. **Diferencialne enačbe z ločljivima spremeljivkama** je oblike
$$y'g(y) = f(x)$$
in jo rešujemo
$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

2. **Homogena diferencialna enačba** je oblike
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$
in jo rešujemo tako, da vpeljemo novo spremeljivko
$$z = \frac{y}{x}.$$
Tedaj
$$y = z \cdot x \quad \text{in} \quad y' = z'x + z.$$

3. **Linearna diferencialna enačba prvega reda** je oblike
$$y' + f(x)y = g(x),$$
kjer sta f in g poljubni zvezni funkciji. To diferencialno enačbo rešujemo tako, da najprej rešimo
$$y' + f(x)y = 0$$
in dobimo homogoeno rešitev y_H. Po izreku, da je rešitev linearne diferencialne enačbe
$$y = y_H + y_P,$$
kjer je y_P partikularno rešitev, je potrebno poiskati samo še partikularno rešitev. To lahko ali uganemo, ali pa jo poiščemo z variacijo konstante
$$y_P = C(x)y_H.$$

4. **Bernoullijeva diferencialna enačba** je oblike
$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha},$$
kjer sta f in g zvezni funkciji (za $\alpha = 0$ dobimo linearno diferencialno enačbo, za $\alpha = 1$ pa homogeno diferencialno enačbo). Recimo $\alpha \notin \{0, 1\}$. Zgornjo enačbo delimo z y^{α}
$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x).$$
Sedaj vpeljemo novo spremeljivko $z = y^{1-\alpha}$. Tako je $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ in
$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = g(x)$$
oziroma
$$z' + (1-\alpha)f(x)z = (1-\alpha)g(x).$$

5. **Riccatijeva diferencialna enačba** je oblike

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y = h(x).$$

V primeru, ko je $h(x) = 0$ imamo Bernoullijevo diferencialno enačbo. V splošnem te enačbe ne znamo dobor reševati, zato običajno uganemo partikularno rešitev. Nadaljujemo pa z nastavkom

$$y = y_1 + z.$$

6. **Clairautova diferencialna enačba** je oblike

$$y = xy' + \psi(y').$$

Potem je vedno ena rešitev

$$y = Cx + \psi(C),$$

ki geometrijsko predstavlja šop premic, za drugo rešitev pa je potrebno rešiti

$$x + \psi'(C) = 0.$$

7. **Lagrangeova diferencialna enačba** je oblike

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Ko je $\psi(y') = y'$ dobimo Clairotovo diferencialno enačbo, zato naj bo $\psi(y') \neq y'$. Rešujemo parametrično tako, da je

$$y' = t.$$

Tako dobimo

$$y = x\varphi(t) + \psi(t)$$

in to obliko odvajamo po t. Med drugim upoštevamo, da je $y' = x't$ in rešujemo enačbo

$$x't = x'\varphi(t) + x\varphi'(t) + \psi'(t).$$

Linearne diferencialne enačbe višjih redov s konstantnimi koeficienti

Linearna diferencialna enačba višjega reda s konstantnimi koeficienti je oblike

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x),$$

kjer so $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ realna števila. Homogeni del te diferencialne enačbe je

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

in rešitve iščemo s pomočjo $y = e^{\lambda x}$, kjer je λ neznani koeficient

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_2\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0.$$

Iz tega dobimo polinom t.i. karakteristični polinom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Ničle karakterističnega polinoma nam bodo dale rešitve diferencialne enačbe. Poglejmo si za $n = 2$. V tem primeru imamo dve ničli.

1. Ničli λ_1, λ_2 sta realni in različni.

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. λ je dvojna realna ničla.
$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$
3. Ničli λ_1, λ_2 sta konjugirani kompleksni par. Recimo, da $\lambda_1 = a + bi$ in $\lambda_2 = a - bi$. Potem
$$y_H = e^{ax}\left(C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx}\right)$$
Med drugim se izkaže, da je
$$C_1 e^{ibx} + C_2 e^{-ibx} = D_1 \cos(bx) + D_2 \sin(bx)$$
in tako
$$y_H = e^{ax}\left(D_1 \cos(bx) + D_2 \sin(bx)\right).$$
Tako sta $e^{ax}\cos(bx)$ in $e^{ax}\sin(bx)$ partikularni rešitvi.

Podobno lahko razmišljamo za višji red. Kompleksne rešitve bodo vedno nastopale v konjugiranih parih. Za partikularno rešitev imamo naslednje možnosti

(a) Uganemo.

(b) Variacija konstant. Če imamo diferencialno enačbo drugega reda rešujemo sistem
$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

(c) Nastavki za partukularno rešitev v odvisnosti od f:

(i) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α ni ničla karakterističnega polinoma.
$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x},$$
kjer je $Q_m(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje največ m.

(ii) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α k-kratna ničla karakterističnega polinoma.
$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x}x^k,$$
kjer je $Q_m(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje največ m.

(iii) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m1}\cos(\beta x) + P_{m2}\sin(\beta x))$, $\alpha + \beta i$ ni ničla karakterističnega polinoma.
$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x)),$$
kjer sta $Q_m(x), R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje največ $m = \max\{m1, m2\}$.

(iv) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m1}\cos(\beta x) + P_{m2}\sin(\beta x))$, $\alpha + \beta i$ je k-kratna ničla karakterističnega polinoma.
$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x))x^k,$$
kjer sta $Q_m(x), R_m(x)$ polinoma z neznanimi koeficienti stopnje največ $m = \max\{m1, m2\}$.

Vse te nastavke lahko še kombiniramo (npr. s funkcijami cos, sin, ipd.).

Eulerjeva diferencialna enačba

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$
kjer so $a_i \in \mathbb{R}$. Z vpeljavo nove spremenljivke $x = e^t$ Eulerjevo diferencialno enačbo prevedemo na linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Omenimo, da smo se z vpeljavo take nove spremenljivke omejili na $x > 0$. Povejmo še, da lahko izpeljemo $y'(x) = y'(t)e^{-t}$, $y''(x) = (y''(t) - y'(t))e^{-2t}$, $y'''(x) = (y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t))e^{-3t}$ in podobno naprej.

Reševanje linearnih diferencialnih enačb s potenčnimi vrstami

Za reševanje uporabljamo nastavek $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.