Osnove linearne algebre

Matrike

Matrika razsežnosti $n \neq m$ je

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,m} \end{bmatrix}.$$

Če je $n = m$, tedaj matriko imenujemo kvadratna matrika. Elementi matrike so lahko realna ali kompleksna števila.

Za vsak $i = 1, \ldots, n$ je

$$[a_{i1} \;\; a_{i2} \;\; \ldots \;\; a_{im}]$$

i-ta vrstica matrike A in za vsak $j = 1, \ldots, m$ je

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

j-ti stolpec matrike A. Za matriko z n vrsticami in m stolpci pravimo, da je *reda* $n \times m$. Element a_{ij} matrike A pišemo tudi kot

$$a_{ij} = (A)_{ij}\,.$$

Matriki A in B sta enaki natanko tedaj, ko sta enakega reda in imata enake istoležne elemente:

$$A = B \Leftrightarrow (A)_{ij} = (B)_{ij}$$

za vsak $i = 1, \ldots, n$ in $j = 1, \ldots, m$.

Računanje z matrikami

(i) **Seštevanje matrik**
Naj bosta A in B matriki reda $n \times m$. Njuna vsota je matrika $A + B$, pri čemer je

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

(a) Seštevanje matrik je komutativno $A + B = B + A$.

(b) Seštevanje matrik je asociativno $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(ii) **Množenje matrik**
Naj bo A matrika reda $n \times o$, B pa matrika reda $o \times m$. Za $i\,j$-ti element v matriki „pomnožimo i-to vrstico matrike A z j-tim stolpcem matrike B“. Natančne

$$(AB)_{i\,j} = \sum_{k=1}^{o} (A)_{i\,k} B_{k\,j}.$$

Produktje razsežnosti $n \times m$.

(a) Množenje matrik v splošnem ni komutativna operacija.

(b) Množenje je asociativna operacija A(BC)=(AB)C.

(iii) **Množenje s skalarjem**
Naj bo λ skalar in A matrika. Tedaj je λA definirano kot

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}.$$

(a) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,
(b) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,
(c) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$
(d) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Poleg navedenih lastnosti veljata še obe distributivnost množenja matrik glede na seštevanje

(a) $A(B + C) = AB + AC$
(b) $(B + C)A = BA + CA$.

Posebne matrike

(i) **Ničelna matrika** je matrika, ki ima za elemente same ničle.

(ii) **Transponirana matrika**
Naj bo A matrika reda $n \times m$. Tedaj je njena transponirana matrika A^T matrika reda $m \times n$, ki jo dobimo iz A tako, da zamenjamo vrstice in stolpce:

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji},\ \forall\, i = 1, \ldots, m \quad \text{in} \quad j = 1, \ldots, n.$$

(iii) **Zgornje in spodnje trikotna matrika**
Kvadratna matrika je zgornje trikotna, če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i > j$ in pravimo, da je spodnje trikotna, če je $a_{ij} = 0$ za vsak $i < j$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{zgornje trikotna matrika}\,,$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{spodnje trikotna matrika}\,.$$

(iv) **Diagonalna matrika** je matrika, ki je zgornje in obenem tudi spodnje trikotna matrika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(v) **Enotska matrika (identiteta)** je diagonalna matrika, za katero je $a_{ii} = 1$ za vsak i

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{enotska matrika} . \; .$$

Velja $IA = AI = A$ za poljubno matriko A (I je enota za množenje).

(vi) **Simetrična in poševno simetrična matrika**

(a) Kvadratna matrika je simetrična, če velja $A^T = A$.

(b) Kvadratna matrika je poševno simetrična, če velja $A^T = -A$.

(vii) **Obratna ali inverzna matrika**

(a) Matrika B je obratna ali inverzna matrika matrike A, če velja

$$AB = BA = I .$$

(b) Obratno matriko matrike A označimo z A^{-1}.

(c) **Izrek:** Če obstaja obratna matrika matrike A, je le-ta enolično določena.

(d) **Definicija:** Matrika je **obrnljiva**, če obstaja njej obratna matrika.

(e) Za množenje obrnljivih matrik velja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Računanje determinante matrike

Determinanta matrike A reda dva je definirana kot produkt elementov glavne diagonale, od katerih odštejemo produkt preostalih elementov:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Do determinante matrike reda N pridemo preko determinant matrik reda dva in sicer tako, da determinanto večje matrike razvijemo po vrstici ali stolpcu. Pri tem determinanto matrike nižjega reda imenujemo *poddeterminanta*. Poddeterminanto $|A_{ij}|$ dobimo tako, da v determinanti matrike A prečrtamo in zanemarimo celotno i-to vrstico in j-ti stolpec. To, kar ostane, je poddeterminanta $|A_{ij}|$. Determinanta matrike A je definirana kot vsota produktov elementov i-te vrstice s pripadajočimi poddeterminantami:

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{i+r} a_{ir} |A_{ir}| .$$

Podobno lahko determinanto matrike A izračunamo s pomočjo razvoja po j-tem stolpcu

$$\det(A) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+j} a_{rj} |A_{rj}| .$$

Determinanta trikotnih in diagonalnih matrik enaka produktu diagonalnih elementov.

Lastnosti determinante:

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ii) $\det(A) = \det(A^T)$.

(iii) Če v matriki med seboj zamenjamo dve vrstici (stolpca), se spremeni predznak determinante.

(iv) Če vrstici prištejemo (odštejemo) večkratnik katere druge vrstice (stolpca), se vrednost determinante ne spremeni.

(v) Če imajo v matriki v kakšni vrstici (stolpcu) vsi elementi skupen faktor, lahko le-tega izpostavimo iz determinante.

(vi) Če sta v matriki dve vrstici (stolpca) enaki ali je ena večkratnik druge, je determinanta matrike enaka 0.

(vii) Če ima matrika kakšno ničelno vrstice (stolpec), je determinanta enaka 0.

Računanje inverzne matrike

1. **Definicija:** Matrika $\widehat{A}$ je **prirejenka** matrike A, če je
$$(\widehat{A})_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|\,.$$

2. **Lema:** Za $j \neq i$ je
$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{j+r}a_{ir}|A_{jr}| = 0\,.$$

3. Matrika A je *obrnljiva* natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$.

4. Če je A obrnljiva, tedaj je
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A}\,.$$

Sistemi linearnih enačb

Pri sistemih linearnih enačb pričakujemo tri različne izide:

1. enolična rešitev,

2. neskončno rešitev,

3. ni rešitve.

V splošnem bomo reševali sistem m linearnih enačb z n neznankami:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,. \end{array},$$

kjer so a_{ij} in b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, znani elementi iz obsega realnih ali kompleksnih števil, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pa iskane neznanke.

Če vpeljemo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

lahko sistem m linearnih enačb z n neznankami v matrični obliki zapišemo kot

$$Ax = b\,.$$

Reševanje sistemov

(i) **Gaussova eliminacijska metoda**

Naj bo $[A,b]$ razširjena matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da ji na desni strani dodamo stolpec vrednosti b:

$$[A,b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Za reševanje sistema s pomočjo razširjene matrike uporabljamo t.i. **Gaussova eliminacijska metoda**. **Osnovne vrstične transformacije** so:

(i) zamenjava dveh vrstic,

(ii) poljubno vrstico pomnožimo z neničelnim realnim številom,

(iii) poljubni vrstici prištejemo ali odštejemo večkratnik druge vrstice.

Poleg osnovnih vrstičnih transformacij poznamo še **osnovne stolpčne transformacije**, ki so analogne vrstičnim, le da jih izvajamo na stolpcih. Medtem ko osnovne vrstične transformacije ne spremenijo rešitve sistema linearnih enačb, je treba biti pri osnovnih stolpčnih transformacijah previdnejši, saj se v primeru zamenjave stolpcev spremeni vrstni red neznank.

Z osnovnimi transformacijami naredimo stopničasto obliko razširjene matrike $[A,b]$:

$$[A,b] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}\right].$$

Če niso vse vrednosti $b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_m$ enake 0, tedaj sistem nima rešitve. Zanimajo nas samo sistemi, kjer so $b_k = 0$, $k = r+1, \dots, m$. V tem primeru lahko spodnje ničelne vrstice enostavno zanemarimo. Rešitev dobimo tako, da vezane neznanke izrazimo s prostimi in pravimo, da smo dobili $m-r$ parametrično rešitev sistema.

Definicija: *Rang matrika A, rang(A), je število neničelnih vrstic po končani Gaussovi eliminaciji.*

Lastnosti

(a) Osnovne tranformacije ne spremenijo ranga matrike.

(b) **Izrek:** *Naj bo $A\,x = b$ sistem m linearnih enačb z n neznankami.*

i) Če je rang(A) = rang$([A,b]) = n$, tedaj ima sistem enolično rešitev.

ii) Če je rang$(A) \neq$ rang$([A,b])$, tedaj sistem nima rešitve.

iii) Če je rang(A) = rang$([A,b]) = k < n$, tedaj ima sistem $n-k$ parametrično rešitev.

V primeru, ko število enačb in neznank sistema linearnih enačb $A\,x = b$ sovpadata $(n = m)$ in je rešitev sistema enolična, lahko z Gaussovo eliminacijo dosežemo **normalizirano diagonalno**

obliko matrike A.

$$[A,b]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_n' \end{array}\right].$$

Desni stolpec je potemtakem rešitev sistema.

Računanje obratne matrike s pomočjo Gaussove eliminacije

Matriki A priredimo razširjeno matriko $[A,I]$ tako, da na desno stran napišemo enotsko matriko enakega reda:

$$[A,I]=\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Sedaj z osnovnimi vrstičnimi transformacami delujemo tako, da dobimo

$$[A,I]=\left[\begin{array}{cccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & * & * & \cdots & * & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & * & \cdots & * \end{array}\right].$$

Matrika, ki smo jo dobili na desni strani, je obratna matrika A^{-1}, saj velja $[A,I]=[I,A^{-1}]$.

(ii) **Cramerjevo pravilo** Uporabimo ga lahko samo za reševanje enolično rešljivih sistemov n linearnih enačb z n neznankami (sistem reda n). **Izrek (Cramer):** *Sistem $Ax=b$ je enolično rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A)\neq 0$. Rešitev sistema se izraža kot*

$$x_i=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)},\ i=1,2,\dots,n\,.$$

Poseben primer sistemov so **homogeni sistemi linearnih enačb**:

$$A\,x=0\,.$$

Izrek: *Homogeni sistem linearnih enačb reda n je netrivialno rešljiv natanko tedaj, ko je* $\det(A)=0$.

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Naj bo dana kvadratna matrika A reda n. Skalar λ, ki zadoščajo temu pogoju, imenujemo **lastne vrednosti** matrike A, pripadajoči vektor $\overrightarrow{x}$ pa je **lastni vektor** matrike A, če velja

$$A\,\overrightarrow{x}=\lambda\,\overrightarrow{x}\,.$$

Za računanje lastnih vrednosti in lastnih vrednosti si pomagamo s

$$\begin{aligned} A\,\overrightarrow{x} &= \lambda\,\overrightarrow{x} \\ (A-\lambda\,I)\,\overrightarrow{x} &= \overrightarrow{0}\,. \end{aligned}$$

Determinanta karakteristične matrike

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

je polinom $p(\lambda)$, ki ga imenujemo **karakteristični polinom** matrike A:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I)\,.$$

Ničle karakterističnega polinoma so tako lastne vrednosti matrike A. zkaže se, da ima lastna vrednost kratnosti m lahko od 1 do m linerno neodvisnih lastnih vektorjev.

Izrek: *Naj bo A zgornje ali spodnje trikotna matrika. Tedaj so lastne vrednosti matrike A njeni diagonalni elementi.*

Diagonalizacija matrik

Deinicija: *Naj bo A kvadratna matrika reda n in naj obstaja obrnljiva matrika P reda n takšna, da je $P^{-1}AP$ diagonalna matrika. Tedaj pravimo, da je A* **diagonalizabilna matrika***, za matriko P pa pravimo, da* **diagonalizira** *matriko A.*

Izrek: *Naj bo A kvadratna matrika reda n. Tedaj sta naslednji trditvi ekvivalentni:*

(i) A je diagonalizabilna,

(ii) A ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Opazimo, da so diagonalni elementi diagonalizirane matrike A reda n, natanko lastne vrednosti. To drži ob pogoju, da premore matrika A n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.