Navadne diferencialne enačbe prvega reda

1. **Linearna diferencialna enačba prvega reda**
   Če je rešitev homogenega dela $y_H = CF(x), C \in \mathbb{R}$, potem je nastavek za iskanje partikularne rešitve enak $y_P = C(x)F(x)$.

2. **Bernoullijeva diferencialna enačba** je oblike $y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$. Zgornjo enačbo delimo z y^α, $y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} = g(x)$ in vpeljemo novo spremeljivko $z = y^{1-\alpha}$.

3. **Riccatijeva diferencialna enačba** je oblike $y' + f(x)y^2 + g(x)y = h(x)$. Uganemo partikularno rešitev y_1. Nadaljujemo pa z nastavkom $y = y_1 + z$.

Linearne diferencialne enačbe višjih redov s konstantnimi koeficienti

Linearna diferencialna enačba višjega reda s konstantnimi koeficienti je oblike

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x),$$

Homogeni del rešujemo s pomočjo karakterističnega polinoma

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Za $n = 2$:

1. Ničli λ_1, λ_2 sta realni in različni: $y_H = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$
2. λ_1 je dvojna realna ničla: $y_H = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2xe^{\lambda_1 x}$
3. Ničli λ_1, λ_2 sta konjugirani kompleksni par $a \pm i\,b$: $y_H = e^{ax}\left(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx)\right)$.

Za partikularni del uporabimo variacijo konstant: $y_P = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

ali uporabimo nastavek za partukularno rešitev v odvisnosti od f:

(i) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α ni ničla karakterističnega polinoma: $y_P = Q_m(x)e^{\alpha x}$.

(ii) $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, α k-kratna ničla karakterističnega polinoma: $y_P = Q_m(x)e^{\alpha x}x^k$,

(iii) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m1}\cos(\beta x) + P_{m2}\sin(\beta x))$, $\alpha + \beta i$ ni ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x)).$$

(iv) $f(x) = e^{\alpha x}(P_{m1}\cos(\beta x) + P_{m2}\sin(\beta x))$, $\alpha + \beta i$ je k-kratna ničla karakterističnega polinoma.

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x))x^k.$$

Laplaceova transformacija

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(z)$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(z)$
1	$\frac{1}{z}$	e^{at}	$\frac{1}{z-a}$
t	$\frac{1}{z^2}$	$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2}{z^3}$	$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$	$e^{at}\mathrm{ch}(\omega t)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2-\omega^2}$
$t^a,\ a>-1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$	$e^{at}\mathrm{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(z-a)^2-\omega^2}$

$\mathcal{L}(\lambda\, f(t)+\mu\, g(t))(z)=\lambda\,\mathcal{L}(f(t))(z)+\mu\,\mathcal{L}(g(t))(z)$
$\mathcal{L}(e^{at}f(t))(z)=\mathcal{L}(f(t))(z-a)$
$\mathcal{L}(f(at))(z)=\frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))(\frac{z}{a})\,,\ a>0$
$\mathcal{L}(f(t-k))(z)=e^{-kz}\mathcal{L}(f(t))(z)$
$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z)=z^n\mathcal{L}(f(t))(z)-z^{n-1}f(0)-z^{n-2}f'(0)-\cdots-zf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$\mathcal{L}(f'(t))(z)=z\mathcal{L}(f(t))(z)-f(0)$
$\mathcal{L}(t^n\, f(t))(z)=(-1)^n\,\mathcal{L}^{(n)}(f(t))(z)$
$\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)d\tau)(z)=\frac{1}{z}\mathcal{L}(f(t))(z)$