Poglavje 1

Navadne diferencialne enačbe

V nadaljevanju bomo vprivzeli, da je y funkcija, ki je odvisna od x. Posledično je $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ oziroma $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$. Če bo y odivsen od druge spremenljivke, bomo na to opozorjeno. Za nadaljevanju tudi privzamimo, da so f, g, h in ostalo zvezne funkcije, ki so odvisne od spremenljivke, zapisane v formulah.

1.1 Navadne diferencialne enačbe prvega reda

1. *Diferencialna enačba z ločljivima spremeljivkama* je oblike

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

   in jo rešujemo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

2. *Homogena diferencialna enačba* je oblike

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

   in jo rešujemo tako, da vpeljemo novo spremeljivko $z = \frac{y}{x}$. Posledično je $y = z \cdot x$ in $y' = z'x + z$.

3. *Linearna diferencialna enačba prvega reda* je oblike

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

   kjer sta f in g poljubni zvezni funkciji. Rešitev diferencialne enačbe poiščemo v dveh korakih.

   (i) Poiščemo rešitev *homogenega dela* $y'(x) + f(x)y(x) = 0$. Rešitev označimo s y_H.

   (ii) *Partikularno rešitev* lahko uganemo ali pa si pomogamo s pomočjo variacije konstante $y_P(x) = C(x)y_H(x)$.

   Spošna rešitev diferencialne enačbe je $y_S = y_H + y_P$.

4. *Bernoullijeva diferencialna enačba* je oblike

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x)y^{\alpha}(x),$$

   kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$. Za $\alpha = 0$ dobimo linearno diferencialno enačbo, za $\alpha = 1$ pa diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama, zato naj bo $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Zgornjo enačbo delimo z $y^{\alpha}(x)$ in nato vpeljemo novo spremeljivko $z = y^{1-\alpha}$ in posledično $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Vstavimo to dvoje v diferencialno enačbo in dobimo

$$z'(x) + (1-\alpha)f(x)z(x) = (1-\alpha)g(x).$$

5. *Riccatijeva diferencialna enačba* je oblike

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y = h(x).$$

Privzamimo, da sta funkciji f in h različni od ničelne funkcije, saj sicer dobimo eno od zgornjih diferencialnih enačb. V splošnem te enačbe ne znamo dobro reševati, zato običajno uganemo eno partikularno rešitev y_1 (partikularno rešitev lahko poiščemo tudi z nastavki, ki so specifični glede na dano diferencialno enačbo). Nato nadaljujemo z nastavkom

$$y = y_1 + z.$$

6. *Clairautova diferencialna enačba* je oblike

$$y = xy' + \psi(y').$$

Potem je ena rešitev $y = Cx + \psi(C)$, ki geometrijsko predstavlja šop premic, za drugo rešitev pa je potrebno rešiti enačbo $x + \psi'(C) = 0$.

7. *Lagrangeova diferencialna enačba* je oblike

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

Ko je $\varphi(y') = y'$ dobimo Clairotovo diferencialno enačbo, zato naj bo $\varphi(y') \neq y'$. Rešujemo tako, da vpeljemo $y'(x) = t$ in vstavimo v diferencialno enačbo. To diferencalno enačbo odvajamo po spremenljivki t (med drugim še izpeljemo $y'(t) = x'(t)t$). Posledično dobimo diferencialno enačbo

$$x'(t)t = x'(t)\varphi(t) + x(t)\varphi'(t) + \psi'(t).$$

Navedimo še nekaj zakonovo, ki so opisljivi z diferencalnimi enačbami.

1. *Zakon o radioaktivnem razpadu* pravi, da je količina snovi, ki razpade v časovni enoti, sorazmerna količini snovi, ki je še na voljo.

2. *Zakon naravne rasti* pravi, da je hitrost spreminjanja količine sorazmerna s količino samo.

3. *Newtonov zakon segrevanja oziroma ohlajanja:* telo se ohlaja oziroma segreva tako, da je hitrost spreminjanja temperature sorazmernarazliki temperature med telesom in okolico.

1.2 Linearne diferencalne enačbe višjega reda

Linearna diferencalna enačba višjega reda je diferencialna enačba oblike

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x),$$

kjer so $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ in f (zvezne) funkcije. V nadaljevanju bomo opisali dva poseba tipa teh diferencalnih enačb.

Linearne diferencialne enačbe višjih redov s konstantnimi koeficienti

Linearna diferencialna enačba višjega reda s konstantnimi koeficienti je oblike

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x),$$

kjer so $a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ realna števila, f pa je funkcija. Splošno rešitev te diferencialne enačbe poiščemo v dveh korakih.

1. *Homogeni del* te diferencialne enačbe je

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_2y''(x) + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0.$$

Rešitev tega dela poiščemo tako, da vpeljemo $y(x) = e^{\lambda x}$, kjer je λ skalar, in skupaj ta y s pripadajočimi odvodi vstavimo v difrencialno enačbo. Na podalig tega dobimo *karakteristični polinom* karakteristični polinom

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Na podlagi ničel zapišemo rešitev homogenega dela difrencialne enačbe.

(a) Rešitive karakterističnega polinoma $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ so realne in različne. Tedaj

$$y_H(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x}.$$

(b) Rešitev karakterističnega polinima λ je n-kratna in realna.

$$y_H(x) = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} + \ldots + C_nx^{n-1}e^{\lambda x}.$$

(c) Omejimo se za $n = 2$. Rešitvi karakterističnega polinoma sta kompleksni (torej λ_1, λ_2 sta konjugirani kompleksni par). Recimo, da $\lambda_1 = a + bi$ in $\lambda_2 = a - bi$. Tedaj

$$y_H = e^{ax}\left(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx)\right).$$

Poleg opisanega se uporabi še kombinacija zgornjega. Opisano je v naslednjem izreku.

Izrek 1.1 *Če so funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linearno neodvisne rešitve homogenega dela linearne diferencialne enačbe n-tega reda ter $C_1, C_2, \ldots C_n$ poljubne konstante, tedaj je*

$$y_H = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$$

splošna rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe.

2. *Partikularno rešitev*, oznaka y_P, lahko poiščemo na več različnih načinov.

(a) Uganemo.

(b) Pri *variaciji konstant* si najprej na podlagi rešitve homogenega dela zapišemo nastavek

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

kjer so $C_1, C_2, \ldots, C_n$ iskane funkcije, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pa so že izračunane funkcije iz homogenega dela. Iskane funkcije poiščemo s pomočjo sistema

$$\begin{aligned}
C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) &= 0\\
C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0\\
&\vdots\\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0\\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x)
\end{aligned}$$

(c) *Nastavki za partukularno rešitev* v odvisnosti od f.

(i) Če ima funkcija f predpis $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, kjer je α k-kratna ničla karakterističnega polinoma in P_m polinom stopnje m. Tedaj je nastavek

$$y_P = Q_m(x)e^{\alpha x}x^k,$$

kjer je $Q_m(x)$ polinom z neznanimi koeficienti stopnje največ m.

(ii) Če ima funkcija f predpis $f(x) = e^{\alpha x}(P_C(x)\cos(\beta x) + P_S(x)\sin(\beta x))$, kjer $\alpha + \beta i$ je k-kratna ničla karakterističnega polinoma, P_C, in P_S pa sta polinoma. Tedaj je nastavek za partikularno rešitev

$$y_P = e^{\alpha x}(Q_C(x)\cos(\beta x) + Q_S(x)\sin(\beta x))x^k,$$

kjer sta Q_C, Q_S polinoma z neznanimi koeficienti stopnje, ki sta enaki večji od stopenj polinomov P_C in P_S.

Nastavke odvajamo in vstavimo v enačbo, nato dobimo rešitev y_P.

Eulerjeva diferencialna enačba

Eulerjeva diferencialna enačba je

$$x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = f(x),$$

kjer so $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ realna števila, f pa zvezna funkcija. V tem primeru se omejimo na $x > 0$ in vpeljemo $x = e^t$. Tako Eulerjevo diferencialno enačbo prevedemo na linearno diferencialno enačbo s konstantnimi koeficienti. Velja $y'(x) = y'(t)e^{-t}$, $y''(x) = (y''(t) - y'(t))e^{-2t}$, $y'''(x) = (y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t))e^{-3t}$ in podobno naprej.

Poglavje 2

Linearna algebra

2.1 Matrike

Matrika razsežnosti $n \neq m$, kjer sta $m, n \in \mathbb{N}$, je

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,m} \end{bmatrix},$$

kjer so $a_{i\,j}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, *elementi matrike*, ki so bodisi iz $\mathbb{R}$ bodisi iz $\mathbb{C}$. V nadaljevanju se bomo predvsem omejili na matrike, ki imajo za elemente realna števila. Podobne lastnosti veljajo tudi za matrike, ki imajo elemente iz množice kompleksnih števil.

Realne matrike razsežnosti $n \neq m$ označujemo s $M_{n \neq m}(\mathbb{R})$ oziroma s $M_{n\,m}(\mathbb{R})$.

Če je $n = m$, tedaj matriko imenujemo *kvadratna matrika*. Množico vseh kvadratnih matrik reda n označimo tudi s $M_n(\mathbb{R})$.

Za vsak $i = 1, \ldots, n$ je

$$[a_{i\,1} \;\; a_{i\,2} \;\; \ldots \;\; a_{i\,m}]$$

i-ta vrstica matrike A in za vsak $j = 1, \ldots, m$ je

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

j-ti stolpec matrike A. Za matriko z n vrsticami in m stolpci pravimo tudi, da je *reda* $n \times m$. Element $a_{i\,j}$ matrike A pišemo tudi kot

$$a_{i\,j} = (A)_{i\,j}\,.$$

Matriki A in B sta enaki natanko tedaj, ko sta enakega reda in imata enake istoležne elemente:

$$A = B \Leftrightarrow (A)_{i\,j} = (B)_{i\,j}$$

za vsak $i = 1, \ldots, n$ in $j = 1, \ldots, m$.

Računanje z matrikami

(i) *Seštevanje matrik*
Naj bosta A in B realni matriki reda $n \times m$. Njuna vsota je matrika $A + B$, pri čemer je

$$(A+B)_{i\,j} = (A)_{i\,j} + (B)_{i\,j}, \quad \forall i = 1, \ldots, n, \quad \forall j = 1, \ldots, m\,.$$

(a) Seštevanje matrik je komutativno (za vsaki matriki $A, B \in M_{n\,m}(\mathbb{R})$ velja $A + B = B + A$).

(b) Seštevanje matrik je asociativno (za poljubne matrike $A, B, C \in M_{n\,m}(\mathbb{R})$ velja $A+(B+C) = (A + B) + C$).

(ii) *Množenje matrik*
Naj bo $A \in M_{n\times\ell}(\mathbb{R})$ in $B \in M_{\ell\times m}(\mathbb{R})$. Tedaj so elementi produkta matrik A in B definirani na naslednji način

$$(AB)_{i\,j} = \sum_{k=1}^{\ell} (A)_{i\,k} B_{k\,j}.$$

Produkt je razsežnosti $n \times m$.

(a) Množenje matrik ni komutativna operacija.

(b) Množenje matrik je asociativna operacija (za poljubne $A \in M_{n\times\ell}(\mathbb{R})$, $B \in M_{\ell\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$ velja $A(BC) = (AB)C$).

(iii) *Množenje s skalarjem*
Naj bo $\lambda \in \mathbb{R}$ in $A \in M_{n\,m}(\mathbb{R})$ matrika. Tedaj je λA definirano kot

$$\lambda A \;=\; \lambda \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,m} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,m} \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \lambda a_{1\,1} & \lambda a_{1\,2} & \cdots & \lambda a_{1\,m} \\ \lambda a_{2\,1} & \lambda a_{2\,2} & \cdots & \lambda a_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n\,1} & \lambda a_{n\,2} & \cdots & \lambda a_{n\,m} \end{bmatrix}.$$

Velja naslednje

(a) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall A \in M_{n\,m}(\mathbb{R})$: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A, B \in M_{n\,m}(\mathbb{R})$: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

(c) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A \in M_{n\,\ell}(\mathbb{R})$, $\forall B \in M_{\ell\,m}(\mathbb{R})$: $\lambda(AB) = (\lambda A)B$,

(d) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall A \in M_{n\,m}(\mathbb{R})$: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Poleg navedenih lastnosti veljata še obe distributivnost množenja matrik glede na seštevanje:

(a) $\forall A \in M_{n\,\ell}(\mathbb{R})$, $\forall B, C \in M_{\ell\,m}(\mathbb{R})$: $A(B + C) = AB + AC$,

(b) $\forall A, B \in M_{n\,\ell}(\mathbb{R})$, $\forall C \in M_{\ell\,m}(\mathbb{R})$: $(A + B)C = AC + BC$.

Posebne matrike

(i) *Ničelna matrika* je matrika, ki ima za elemente same ničle.

(ii) *Transponirana matrika* matrike $A \in M_{n\,m}(\mathbb{R})$, označimo A^T, je matrika reda $m \times n$ dobljena na naslednji način

$$(A^T)_{i\,j} = (A)_{j\,i}, \ \forall\, i = 1, \ldots, m \quad \text{in} \quad j = 1, \ldots, n.$$

(iii) *Zgornje in spodnje trikotna matrika*
Kvadratna matrika reda n je *zgornje trikotna*, če je $a_{i\,j} = 0$ za vsaka $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i > j$, in pravimo, da je *spodnje trikotna*, če je $a_{ij} = 0$ za vsaka $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$.

(a) zgornje trikotna matrika

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \cdots & a_{1\,n} \\ 0 & a_{2\,2} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

(b) spodnje trikotna matrika

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \cdots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

(iv) *Diagonalna matrika* je matrika, ki je hkrati zgornje in spodnje trikotna matrika

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(v) *Enotska matrika (identiteta)* je diagonalna matrika, za katero je $a_{ii} = 1$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Velja $IA = AI = A$ za poljubno matriko A (I je enota za množenje).

(vi) *Simetrična in poševno simetrična matrika*

(a) Kvadratna matrika je *simetrična*, če velja $A^T = A$.

(b) Kvadratna matrika je *poševno simetrična*, če velja $A^T = -A$.

(vii) *Obratna matrika ali inverzna matrika*
Matrika B je obratna ali inverzna matrika matrike A, če velja

$$AB = BA = I.$$

Obratno matriko matrike A označimo z A^{-1}.

Matrika je *obrnljiva*, če obstaja njej obratna matrika.

Izrek 2.1 *Če obstaja obratna matrika dane matrike, tedaj je le-ta enolično določena.*

Izrek 2.2 *Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljivi matriki. Tedaj velja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

2.2 Računanje determinante matrike

V tem razdelku bomo opisali samo računanje determinate preko rekurzije (standardna vpeljava pojma determinante je sicer s pomočjo permutacij).

Determinanta matrike $A \in M_2(\mathbb{R})$ je definirana na naslednji način

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{vmatrix} = a_{1\,1}a_{2\,2} - a_{1\,2}a_{2\,1}\,.$$

Do determinante matrike reda n pridemo preko determinant matrik reda dva in sicer tako, da determinanto večje matrike razvijemo po vrstici ali stolpcu. Pri tem determinanto matrike nižjega reda imenujemo *poddeterminanta*. Poddeterminanto $|A_{i\,j}|$ dobimo tako, da v determinanti matrike A zanemarimo i-to vrstico in j-ti stolpec. To, kar ostane, je poddeterminanta $|A_{ij}|$.

$$|A_{i\,j}| = \begin{vmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,j} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,j} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i\,1} & a_{i\,2} & \dots & a_{i\,j} & \dots & a_{i\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \dots & a_{n\,j} & \dots & a_{n\,n} \end{vmatrix}$$

Determinanta matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$ je definirana kot vsota produktov elementov i-te vrstice s pripadajočimi poddeterminantami:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i\,k} |A_{i\,k}|\,.$$

Podobno lahko determinanto $A \in M_n(\mathbb{R})$ izračunamo s pomočjo razvoja po j-tem stolpcu

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k\,j} |A_{k\,j}|\,.$$

Nekatere lastnosti, ki veljajo pri računanju determinante:

(i) Za poljubi $A, B \in M_N(\mathbb{R})$ velja $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ii) Za poljubno $A \in M_n(\mathbb{R})$ velja $\det(A) = \det(A^T)$.

(iii) Če v matriki med seboj zamenjamo dve vrstici (stolpca), se spremeni predznak determinante.

(iv) Če vrstici prištejemo (odštejemo) večkratnik katere druge vrstice (stolpca), se vrednost determinante ne spremeni.

(v) Če imajo v matriki v kakšni vrstici (stolpcu) vsi elementi skupen faktor, lahko le-tega izpostavimo iz determinante.

(vi) Če sta v matriki dve vrstici (stolpca) enaki ali je ena večkratnik druge, je determinanta matrike enaka 0.

(vii) Če ima matrika kakšno ničelno vrstico (stolpec), je determinanta enaka 0.

(viii) Determinanta zgornje trikotne matrike, spodnje trikotne matrike in diagonalne matrike je enaka produktu diagonalnih elementov

2.3 Sistemi linearnih enačb

Sistem m linearnih enačb z n neznankami je

$$\begin{aligned} a_{1\,1}x_1 + a_{1\,2}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n &= b_1 \\ a_{2\,1}x_1 + a_{2\,2}x_2 + \ldots + a_{2\,n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad &\vdots \\ a_{m\,1}x_1 + a_{m\,2}x_2 + \ldots + a_{m\,n}x_n &= b_m\,. \end{aligned}$$

kjer so a_{ij} in b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, znani elementi iz obsega realnih ali kompleksnih števil, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pa iskane neznanke.

Na podlagi zgoraj zapisane sistema vpeljimo naslednje

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \,.$$

V matrični obliki je torej sistem zapisan $Ax = b$.

Pred opisi reševanje navedimo, da imamo za rešitev sistema linearnih enačb naslednje možnosti

(i) enolična rešitev,

(ii) parametrično rešitev,

(iii) ni rešitve.

Reševanje sistemov

(i) *Gaussova eliminacijska metoda*
Naj bo $[A, b]$ razširjena matrika, ki jo dobimo iz matrike A tako, da ji na desni strani dodamo stolpec vrednosti b:

$$[A, b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} & b_1 \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \ldots & a_{m\,n} & b_m \end{array}\right].$$

Za reševanje sistema s pomočjo razširjene matrike uporabljamo t.i. *Gaussovo eliminacijsko metodo.* Osnovne vrstične transformacije pri tej metodi so:

(i) zamenjava dveh vrstic,

(ii) poljubno vrstico pomnožimo z neničelnim realnim številom,

(iii) poljubni vrstici prištejemo ali odštejemo večkratnik druge vrstice.

Z osnovnimi transformacijami naredimo stopničasto obliko razširjene matrike $[A, b]$:

$$[A,b] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,j} & \dots & a_{1\,n} & b_1 \\ 0 & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,j} & \dots & a_{2\,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{k\,j} & \dots & a_{k\,n} & b_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}\right].$$

Če je katera od vrednosti $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_m$ različna od 0, tedaj sistem nima rešitve.

Če $b_{k+1} = b_{k+2} = \dots = b_m = 0$, tedaj lahko spodnje ničelne vrstice enostavno zanemarimo. Rešitev dobimo tako, da vezane neznanke izrazimo s prostimi in pravimo, da smo dobili $m-k$ parametrično rešitev sistema.

Rang matrike A, $\operatorname{rang}(A)$, je število neničelnih vrstic po končani Gaussovi eliminaciji.

Velja, da osnovne vrstične tranformacije ne spremenijo ranga matrike.

Izrek 2.3 *Naj bo $A\,x = b$ sistem m linearnih enačb z n neznankami.*

(i) Če je rang$(A) =$ rang$([A, b]) = n$, tedaj ima sistem enolično rešitev.

(ii) Če je rang$(A) \neq$ rang$([A, b])$, tedaj sistem nima rešitve.

(iii) Če je rang$(A) =$ rang$([A, b]) = k < n$, tedaj ima sistem $n-k$ parametrično rešitev.

V primeru, ko število enačb in neznank sistema linearnih enačb $A\,x = b$ sovpadata ($n = m$) in je rešitev sistema enolična, lahko z Gaussovo eliminacijo dosežemo *normalizirano diagonalno obliko* matrike A.

$$[A,b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b'_n \end{array}\right].$$

(ii) **Cramerjevo pravilo (Cramerjev izrek)**

Izrek 2.4 *Sistem $Ax = b$ je enolično rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A) \neq 0$. Rešitev sistema se izraža kot $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$, kjer je*

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \dots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \dots & a_{n\,n} \end{bmatrix}$$

za vsak $i = 1, 2, \dots, n$.

Poseben primer sistemov so *homogeni sistemi linearnih enačb*: $A\,x = 0$. Velja, da je homogeni sistem linearnih enačb reda n netrivialno rešljiv natanko tedaj, ko je $\det(A) = 0$.

2.4 Računanje obratne (inverzne) matrike

Pred opisom računanja obratne matrike, navedimo naslednji izrek.

Izrek 2.5 *Matrika $AinM_n(\mathbb{R})$ je obrnljiva natanko tedaj, ko je* $\det(A) \neq 0$.

Pred nadaljevanjem predpostavimo, da je matrika $A \in M_n(\mathbb{R})$ obrnljiva.

(i) *Računanje inverzne matrike s pomočjo prirejenke*
Matrika $\widehat{A}$ je *prirejenka* matrike $A \in M_n(\mathbb{R})$, če je za poljubna $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$(\widehat{A})_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ji}|\,.$$

Če je $AinM_n(\mathbb{R})$ obrnljiva, tedaj je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \widehat{A}\,.$$

(ii) *Računanje inverzne matrike s pomočjo linearnega sistema*
Obratno matriko matrike A, A^{-1}, bomo dobili s pomočjo $[A, I] \sim [I, A^{-1}]$. Natančneje, matriki A priredimo razširjeno matriko $[A, I]$ tako, da na desno stran napišemo enotsko matriko enakega reda:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2\,n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & a_{n\,2} & \ldots & a_{n\,n} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right].$$

Sedaj z osnovnimi vrstičnimi transformacami delujemo tako, da dobimo na levi strani enotsko matriko, na desni pa se zgenerira obratna matrika matrike A.

$$[I, A] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & * & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & * & * & \ldots & * \end{array}\right].$$

2.5 Vektorski prostori

V našem primeru se bomo omejili, da $\mathbb{F}$ pomeni bodisi $\mathbb{R}$ bodisi $\mathbb{C}$.
Neprazno množico V skupaj z operacijama

1. $+ : V \times V \to V$,
2. $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$,

imenujemo *vektorski prostor nad obsegom* $\mathbb{F}$, če velja

(i) $\forall x, y \in V \;:\; x + y = y + x$,

(ii) $\forall x, y, z \in V \;:\; (x + y) + z = x + (y + z)$,

(iii) $\exists\, 0 \in V, \forall x \in V \;: x + 0 = 0 + x = x$,

(iv) $\forall x \in V, \exists - x \in V : x + (-x) = (-x) + x = 0$,

(v) $\forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{F} \;:\; \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

(vi) $\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \,:\, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,

(vii) $\forall x \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \,:\, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$,

(viii) $\exists 1 \in \mathbb{F}, \forall x \in V \,:\, 1 \cdot x = x$,

Vektoski prostor bomo označevali $(V, +, \cdot)$ ali na kratko V, če je iz primera jasno kateri sta operaciji seštevanja in množenja s skalarjem. Če je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tedaj $(V, +, \cdot)$ imenujemo *realni vektorski prostor.*

Elemente množice V imenujemo *vektorji*, elementi iz $\mathbb{F}$ pa so skalarji. Nevtralni element 0 vektorskega prostora $(V, +, \cdot)$ imenujemo tudi ničelni vektor.

Neprazna podmnožica W vektorskega prostora V je *vektorski podprostor*, če je zaprta za seštevanje in množenje s skalarjem:

- $\forall x, y \in W \,:\, x + y \in W$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ in $\forall x \in W \,:\, \lambda \cdot x \in W$.

2.6 Linearna neodvisnost

Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, $v_1, \ldots, v_n \in V$. in $\lambda_1 \ldots, a_n \in \mathbb{F}$. Tedaj

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

pravimo *linearna kombinacija* vektorjev $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Vektor $v \in V$ je linearna kombinacija vektorjev $v_1, \ldots, v_n \in V$, če obstajajo skalarji $\lambda_1 \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, da je

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Množico vseh možnih linearnih kombinacij vektorjev $v_1, \ldots, v_n$ imenujemo *linearna ogrinjača* ali *linearna lupina* in označimo $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$.

Izrek 2.6 *Naj bo V vektorski prostor in $v_1, \ldots, v_n \in V$. Tedaj je $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ vektorski podprostor od V. Še več, $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ je najmanjši vektorski podprostor od V.*

Naj bo V vektorski prostor. Vektorji $v_1, \ldots, v_n \in V$ so *linearno neodvisna*, če iz $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ sledi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Vektorji so *linearno odvisni*, če niso linearno neodvisni.

Naj bo V vektorski prostor in $v_1, \ldots, v_n \in V$. Množica vektorjev $\{v_1, \ldots, v_n\}$ je linearno nedovisna, če so vektorji $v_1, \ldots, v_n$ linearno neodvisni.

2.7 Baza

V našem primeru se bomo omejili le na končno razsežne baze (in s tem tudi na končno razsežne vektorske prostore).

Množica vektorjev $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ je *baza* vektorskega prostora V, če

(i) $V = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ in

(ii) $\mathcal{B}$ je linearno neodvisna množica.

Elemente baze imenujemo *bazni vektorji.*

Izrek 2.7 *Naj bo V vektorski prostor in $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ baza vektorskega prostora V. Tedaj veljajo naslednje trditve.*

(i) Vsak vektor iz V lahko na enoličen način zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz $\mathcal{B}$.

(ii) Če neka množica vsebuje več kot n vektorjev iz V, tedaj je linearno odvisna.

(iii) Če neka množica vsebuje strogo manj kot n vektorjev iz V, tedaj njena linearna lupina ni enaka V.

Končnorazsežni vektorski prostor $(V, +, \cdot)$ je *dimenzije* n, če njegova baza moči n.

Izrek 2.8 *Naj bo V vektorski prostor dimenzije n. Tedaj ima vsaka njegova baza natanko n vektorjev.*

Naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ baza vektorskega prostora V in naj bo $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Tedaj

$$v[\mathcal{B}] = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

imenujemo *koordinatni vektor glede na bazo* $\mathcal{B}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pa imenujemo *koordinate vektorja v glede na bazo* $\mathcal{B}$.

Matrika prehoda

Naj bosta $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bazi vektorskega prostora V ter naj bo $v[\mathcal{B}]$ koordinatni vektor vektorja v glede na bazo $\mathcal{B}$. Če želimo posikati $v[\mathcal{C}]$, tedaj to napravimo s pomočjo matrike prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$, ki je dobljena na način, da vektorje iz baze $\mathcal{B}$ razpišemo po bazi $\mathcal{C}$. To je

$$\begin{aligned}
v_1 &= p_{1\,1}u_1 + p_{2\,1}u_2 + \ldots + p_{n\,1}u_n \\
v_2 &= p_{1\,2}u_1 + p_{2\,2}u_2 + \ldots + p_{n\,2}u_n \\
&\vdots \\
v_n &= p_{1\,n}u_1 + p_{2\,n}u_2 + \ldots + p_{n\,n}u_n.
\end{aligned}$$

Matrika prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{C}$ je

$$P = P[\mathcal{C}, \mathcal{B}] = \begin{bmatrix} p_{1\,1} & p_{1\,2} & \cdots & p_{1\,n} \\ p_{2\,1} & p_{2\,2} & \cdots & p_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n\,1} & p_{n\,2} & \cdots & p_{n\,n} \end{bmatrix}.$$

Torej $v[\mathcal{C}] = P[\mathcal{C}, \mathcal{B}]v[\mathcal{B}]$.

2.8 Evklidski prostori

Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F}$. *Skalarni produkt* je preslikava $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$, ki za vsak $u, v, w \in V$ in vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ zadošča naslednjim lastnostim

(i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,

(ii) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

(iii) $\langle \lambda\, u, v \rangle = \lambda\, \langle u, v \rangle$,

(iv) $u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$.

Vektorski prostor skupaj s skalarnim produktom se imenuje *unitarni prostor*. Če je unitarni prostor končno razsežen, se imenuje *evklidski prostor*.

Naj bo V unitarni prostor in $v \in V$. Tedaj je *norma (ali dolžina) vektorja* v, označimo $||v||$, definirana kot $||u|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Za poljubna vektorja $u, v \in V$ je *razdalja* med med vektorjema u in v, označimo $d(u, v)$, definirana kot $d(u, v) = ||u - v||$.

Cauchy-Schwarzova neenakost: Naj bo V unitarni prostor ter u in v poljubna vektorji iz V. Tedaj velja $|\,\langle u, v \rangle\,| \leq ||u|| \cdot ||v||$.

2.9 Ortonormirana baza

Naj bosta u in v vektorja unitarnega prostora V. Vektorja u in v sta *ortogonalna*, ko je

$$\langle u, v\rangle = 0\,.$$

Množica vektorjev S iz unitarnega prostora *ortogonalna*, če so vektorji iz S paroma ortogonalni. Nadalje, pravimo da je S *ortonormirana množica*, če je S ortogonalna množica in je norma vsakega vektorja iz S enaka 1.

Če je baza evklidskega prostora ortogonalna oziroma ortonormirana, potem jo imenujemo *ortogonalna baza* oziroma *ortonormirana baza.*

Izrek 2.9 *Vsaka ortogonalna množica neničelnih vektorjev unitarnega prostora je linearno nedovisna množica.*

Izrek 2.10 *Naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonalna baza vektorskega prostora V. Vsak vektor $v \in V$ lahko zapišemo kot*

$$v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \ldots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} v_n.$$

Še več, če je $\mathcal{B}$ ortonormirana baza, tedaj

$$v = \langle v, v_1\rangle\, v_1 + \ldots + \langle v, v_n\rangle\, v_n.$$

Gram-Schmidtov postopek ortogonalizacije

S tem postopkom si zagotovimo, da iz poljubne baze evklidskega prostora tvorimo ortogonalno bazo. Naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza evklidskega prostora. Tedaj je $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, kjer so

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1\\
e_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1\\
e_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \frac{\langle v_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2\\
&\vdots\\
e_n &= v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, e_k\rangle}{\langle e_k, e_k\rangle} e_k,
\end{aligned}$$

ortogonalna baza evklidskega prostora.

2.10 Fourierova vrsta

Naj bo f periodična zvezna funkcija s periodo $[-\pi, \pi]$. Fourierova vrsta za funkcijo f je

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

kjer so

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, \mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,\\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Izrek 2.11 *Naj bo f realna periodična odsekoma zvezna funkcija s periodo $[-\ell, \ell]$. Nadalje, naj ima funkcija f v vsaki točki intervala $[-\ell, \ell]$ levo in desno limito. Tedaj lahko funkcijo f zapišemo Fourierovo vrsto*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right),$$

kjer so

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.
Če je funkcija f zvezna v točki $x \in \mathbb{R}$, tedaj je vsota vrste enaka funkcijski vrednosti $f(x)$.
Če je funkcija f ni zvezna v točki $x \in \mathbb{R}$, tedaj je vsota vrste enaka aritmetični sredini leve in desne limite funkcije f v tej točki.

Če je f soda funkcija, tedaj $b_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Taki vrsti potem pravimo kosinusna Fourierova vrsta.
Če je f liha funkcija, tedaj $a_n = 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$. Taki vrsti potem pravimo sinusna Fourierova vrsta.

Navedimo še definicijo Fourierove vrste na poljubnem intervalu $[c, c+P]$.
Naj bo f realna periodična odsekoma zvezna funkcija s periodo $[c, c+P]$. Nadalje, naj ima funkcija f v vsaki točki intervala $[c, c+P]$ levo in desno limito. Tedaj lahko funkcijo f zapišemo Fourierovo vrsto

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right),$$

kjer so

$$a_n = \frac{2}{P} \int_{c}^{c+P} f(x) \cos(n\omega x)\, \mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_n = \frac{2}{P} \int_{c}^{c+P} f(x) \sin(n\omega x)\, \mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

kjer je $\omega = \frac{2\pi}{P}$.

Če imamo funkcijo f podana s predpisom na intervalu $[0, \ell]$, tedaj lahko pripadajočo Fourierovo vrsto poiščemo na tri načine

1. direktno,
2. f razširimo na interval $[-\ell, \ell]$ do sode funkcije in poiščemo kosinusno Fourierovo vrsto,
3. f razširimo na interval $[-\ell, \ell]$ do lihe funkcije in poiščemo sinusno Fourierovo vrsto.

2.11 Linearne transformacije (linearne preslikave)

Naj bosta V in U vektorska prostora. Preslikava $\mathcal{A} : V \to U$ je *linearna transformacija* (*linearna preslikava*), če za vsak $u, v \in V$ in vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ velja:

(i) $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v)$ (aditivnost)

(ii) $\mathcal{A}(\lambda\, u) = \lambda\, \mathcal{A}(u)$ (homogenost).

Če vektorska prostora U in V sovpadata, se linearna transformacija imenuje *endomorfizem*: $\mathcal{A} : V \to V$.

Linearna transformacija je običajno podana z eno od naslednjih možnosti

1. z eksplicitnim predpisom,
2. z matriko,
3. s slikami baznih vektorjev.

Seveda lahko prehajamo med zgoraj navedenimi oblikami. Navedimo, kako pridemo do matrike, ki pripadala linearni transformaciji $\mathcal{A} : V \to U$, če je podana s slikami baznih vektorjev.

Naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza vektorskega prostora V in $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ baza vektorskega prostora U. Tedaj lahko za vsak i $\mathcal{A}(v_i)$ razpišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev iz $\mathcal{C}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(v_i) &= a_{1\,1}u_1 + \dots a_{m\,1}u_m \\
&\vdots \\
\mathcal{A}(v_i) &= a_{1\,n}u_1 + \dots a_{m\,n}u_m.
\end{aligned}
$$

Matrika, ki pripada linearni transfomraciji $\mathcal{A}$ je

$$
A = A[\mathcal{C}, \mathcal{B}] = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix}.
$$

Izrek 2.12 *Naj $\mathcal{A} : V \to U$ linearna preslikava, $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_V$ bazi vektorskega prostora V ter $\mathcal{B}_U$ in $\mathcal{C}_U$ bazi vektorskega prostora U. Če je linearni preslikavi $\mathcal{A}$ glede na bazi $\mathcal{B}_V$ in $\mathcal{B}_U$ pripada matrika $A[\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V]$, tedaj glede na bazi $\mathcal{C}_V$ in $\mathcal{C}_U$ pripada matrika*

$$
A[\mathcal{C}_U, \mathcal{C}_V] = P[\mathcal{C}_U, \mathcal{B}_U]A[\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V]Q[\mathcal{B}_V, \mathcal{C}_V],
$$

kjer sta P in Q pripadajoči matriki prehoda med bazama.

Jedro in *slika* linearne transformacije $\mathcal{A} : U \to V$ sta defininirana na naslednji način:

$$
\begin{aligned}
\text{jedro}: \quad & \mathcal{K}er(\mathcal{A}) = \{u \in U \mid \mathcal{A}(u) = 0\} \\
\text{slika}: \quad & \mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \{v \in V \mid \exists u \in U : \mathcal{A}(u) = v\}.
\end{aligned}
$$

Izrek 2.13 *Jedro linearne transformacije $\mathcal{A} : U \to V$ je vektorski podprostor od U, slika pa je podprostor od V.*

Izrek 2.14 *Naj bo $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ baza vektrskega prostora V in $\mathcal{A} : V \to U$ linearna transformacija. Tedaj*

$$
\mathcal{I}m(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}(v_1), \dots, \mathcal{A}(v_n)).
$$

Izrek 2.15 *Naj bo $\mathcal{A} : V \to U$ linearna transformacija. Tedaj*

$$
\dim(\mathcal{K}er(\mathcal{A})) + \dim(\mathcal{I}m(\mathcal{A})) = \dim(V).
$$

2.12 Lastne vrednosti in lastni vektorji

Naj bo U vektorski prostor. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je *lastna vrednost* endomorfizma $\mathcal{A} : V \to V$, če obstaja tak $v \in V \setminus \{0\}$, da velja $\mathcal{A}(v) = \lambda v$. Takšen vektor v imenujemo *lastni vektor* (za pripadajočo lastno vrednosto λ).

Postopek za iskanje lastnih vrednosti

1. Najprej linearnih preslikavi $\mathcal{A} : V \to V$ priredimo matriko A.
2. Izračunamo karaktreristični polinom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ in njegove ničle. Te ničle so ravno lastne vrednosti.
3. Za vsako lastno vrednost λ poiščemo lastne vektorje (lahko s pomočjo homogenega linearnega sistema $(A - \lambda I)v = 0$).

Izrek 2.16 *Lastni vektorji $v_1, \ldots, v_n$ linearne transformacije $\mathcal{A} : V \to V$, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so linearno neodvisni.*

Lastne vrednosti in lastni vektorji matrike A reda n so lastni vektorji endomorfizma $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}(x) = Ax$.

Diagonalizacija matrik
Naj bo A kvadratna matrika reda n in naj obstaja obrnljiva matrika P reda n takšna, da je $P^{-1}AP$ diagonalna matrika. Tedaj pravimo, da je A *diagonalizabilna matrika*, za matriko P pa pravimo, da *diagonalizira* matriko A.

Izrek 2.17 *Naj bo A kvadratna matrika reda n. Tedaj sta naslednji trditvi ekvivalentni.*

(i) A je diagonalizabilna,

(ii) A ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev.

Lastni vektorji so ravno stolpci matrike P.

2.13 Sistemi linearnih diferencialnih enačb

Sistem linearnih diferencialnih enačb je sistem enačb

$$x_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j(t) + f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

kjer so $x_1, \ldots, x_n$ iskane funkcije, $f_1, \ldots, f_n$ pa so v naprej dane funkcije. Vpeljimo Naj bo $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Te sisteme lahko rešujemo na več različnih načinov. Omejimo se na naslednja dva.

(i) *S pomočjo lastnih vrednosti in lastnih vektorjev*

Rešujemo v dveh korakih. Končna rešitev je vsota homogenega dela in partikularne rešitve. Omejili se bomo na sisteme razsežnosti dva.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{1\,1}x_1(t) + a_{1\,2}x_2(t) + f_1(t) \\ x_2'(t) &= a_{2\,1}x_1(t) + a_{2\,2}x_2(t) + f_2(t) \end{aligned}$$

Če je sistem višje razsežnosti, tedaj je stvar podobna kot pri linearnih diferencialnih enačbah višjega reda s konstantnimi koeficienti.

(a) *Homogeni del*

Rešujemo

$$x_1'(t) = a_{1\,1}x_1(t) + a_{1\,2}x_2(t)$$
$$x_2'(t) = a_{2\,1}x_1(t) + a_{2\,2}x_2(t).$$

Izračunamo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike

$$\begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \end{bmatrix}$$

i. Če sta lastni vrednosti različni ($\lambda_1 \neq \lambda_2$, p_i pripada lastni vrednosti λ_i, $i = 1, 2$). Tedaj se rešitev homogenega dela izraža kot

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} p_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} p_2.$$

ii. Če sta lastni vrednosti enaki (tj. $\lambda_1 = \lambda_2$), njej pa pripadata linearno neodvisna lastna vektorja. Tedaj je rešitev analogna i.

iii. Če sta lastni vrednosti enaki (tj. $\lambda_1 = \lambda_2$), njej pa pripada samo en lastni vektor p_1. Drugi vektor dobimo s pomočjo $(A - \lambda_1 I)p_2 = p_1$. Tedaj se rešitev homogenega dela izraža kot

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} p_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}(tp_1 + p_2).$$

iv. Če nimamo realnih vrednosti, tedaj si pomagamo s komplkesnimi koreni. Dovolj je opazovati $\lambda = \alpha + i\beta$. Vektor p, ki zadošča $Ap = \lambda p$ lahko zapišemo v obliki $p = a + ib$. V tem primeru pa se rešitev homogenega dela izraža kot

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\alpha t}(\cos(\beta t)a - \sin(\beta t)b) + C_2 e^{\alpha t}(\sin(\beta t)a + \cos(\beta t)b).$$

(b) *Partikularna rešitev*

Ena ob možnosti je ta, da partikularno rešitev. Sicer si pomagamo z variacijo konstant na naslednji način. Najprej si zapišemo nastavek za partikularno rešitev, ki ga dobimo na podlagi rešitve homogenega dela.

$$\begin{bmatrix} x_1^P(t) \\ x_2^P(t) \end{bmatrix} = C_1(t)X_1(t)p_1 + C_2(t)X_2(t)p_2,$$

kjer sta X_1 in X_2 rešitvi pri ustreznih konstantah iz homogenega dela. Sedaj partikularno rešitev dobimo na podlagi sistema

$$C_1'(t)X_1(t)p_1 + C_2'(t)X_2(t)p_2 = f(t),$$

kjer je $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$.

(ii) *S pomočjo prehoda na linearne diferencialne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti*

V tem primeru ni recepta, ki nas pripelje do rešitve. Glavna ideja je ta, da z odvajanjem in preoblikovanjem enačb, pridemo do linearne diferencialne enačbe višjega reda s konstantnimi koeficienti.

Omenimo, da je ta način predvsem primeren v primeru, če nam nastopajo še višji odvodi.

Tabela osnovnih integralov:

$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$	$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert + C$, $(\lvert x\rvert < a)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\rvert + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{atan}\,\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + C$, $(\lvert x\rvert > a)$

Osnovna pravila

- $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx\,.$
- $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx\,.$
- **Uvedba nove spremenljivke**
  Naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Če ima funkcija $f(x)$ nedoločeni integral, obstaja tudi nedoločeni integral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in velja
$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))x'(t)\,dt\,.$$
- **Integriranje po delih**
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Za poljubni realni števili a in b velja

- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$,
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[(\cos(a-b) - \cos(a+b)]$,
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[(\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.