Poglavje 1

Funkcije več spremenljivk

1.1 Skalarne funkcije

Funkcija n spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkcija, ki vsaki točki $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ priredi realno število.

$$f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Množica D je *definicijsko območje* funkcije f.

Graf funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je množica točk v $\mathbb{R}^{n+1}$, označujemo $\Gamma(f)$, za katero velja

$$\Gamma(f) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D, y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in naj bo $a \in \mathbb{R}$. *Nivojnica* N_a je množica

$$N_a = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a\}.$$

Prerez dobimo tako, da si izberemo neko krivuljo v $\mathcal{D}$ in gledamo, kako se funkcija obnaša nad to krivuljo.

Naj bo $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ in $\delta > 0$. Tedaj je *odprta krogla okoli točke* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ množica

$$K_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + \ldots + (a_n - x_n)^2} < \delta\}.$$

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Število L je limita funkcije f v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, pišemo $L = \lim\limits_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(a_1,a_2,\ldots,a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da iz $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cap D$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, sledi

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L| < \epsilon\,.$$

Funkcija več spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cap D$ velja

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \epsilon\,.$$

Izrek 1.1 *Funkcija več spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(a_1,a_2,\ldots,a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,.$$

V primeru $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je včasih lažje preučevati zveznost funkcije s pomočjo polarnih koordinat, tj. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kjer je $r > 0$ in argument $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $(a, b) \in D$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $r < \delta$ velja

$$|f(a + r\,\cos\varphi, b + r\,\sin\varphi) - f(a, b)| < \epsilon\,.$$

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Če obstaja limita diferenčnega kvocienta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h},$$

tedaj jo imenujemo *parcialni odvod* funkcije f po spremenljivki x_i v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Ta odvod označimo s

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{ali} \quad f_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,.$$

Nadalje, funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *parcialno odvedljiva na* D, če je parcialno odvedljiva v vsaki točki območja D i je *zvezno parcialno odvedljiva*, če so parcialni odvodi zvezne funkcije.

Gradient funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je

$$\operatorname{grad} f = (f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n})\,.$$

Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ *diferenciabilna*, če obstajajo vsi parcialni odvodi $f_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, in je

$$\lim_{(h_1,h_2,\ldots,h_n)\to(0,0,\ldots,0)} \frac{f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) - \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, h_i}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 \cdots + h_n^2}} = 0\,.$$

Izraz

$$df = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n))\, h_i$$

imenujemo *totalni diferencial*.

Izrek 1.2 *Naj bo funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciabilna in naj bo $z = f(x, y)$. Spremenljivki x in y naj bosta odvedljivi funkciji parametra t, torej $x = x(t)$, $y = y(t)$. Tedaj je $z(t) = f(x(t), y(t))$ posredna funkcija parametra t, katere odvod je enak*

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)\,.$$

Posledica 1.3 *(Verižno pravilo) Naj bo funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciabilna in naj bo $z = f(x, y)$. Spremenljivki x in y pa naj bosta diferenciabilni funkciji novih spremenljivk u in v, torej $x = x(u, v)$ in $y = y(u, v)$. Potem je z posredno odvisna od spremenljivk u in v ter velja*

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\,. \end{aligned}$$

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. *Odvod funkcije f v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ v smeri enotskega vektorja $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$*, oznaka $f_{\vec{s}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, je

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + hs_1, a_2 + hs_2, \ldots, a_n + hs_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h}.$$

Ta odvod lahko izračunamo tudi takole

$$f_{\vec{s}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\operatorname{grad} f(a_1, a_2, \ldots, a_n)) \cdot (s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ima parcialne odvode drugega reda, če obstajajo odvodi

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \le i, j \le n\,.$$

Vsi parcialni odvodi drugega reda funkcije f sestavljajo *Hessejevo matriko* H, ki je kvadratna matrika reda n

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}.$$

Izrek 1.4 *Naj bodo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dvakrat parcialno odvedljiva funkciji in naj bosta f_{xy} in f_{xy} zvezni funkciji. Tedaj sta mešana parcialna odvoda enaka*

$$f_{xy} = f_{yx}\,.$$

Zgornji izrek laho reduciramo tudi na konkretno točko $(a,b) \in D$ za funkcijo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to R$. Podobno bi razširili izrek na funkcije več spremenljivk.

Izrek 1.5 *(Taylorjeva formula) Funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ naj bo $n+1$ krat zvezno parcialno odvedljiva na obe spremeljivki v okolici točke $(a,b) \in D$. Tedaj velja*

$$\begin{aligned} f(a+h, b+h) &= f(a,b) + (f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k) + \\ &\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)\,h^2 + 2f_{xy}(a,b)\,hk + f_{yy}(a,b)\,k^2\right) + \\ &\frac{1}{3!}\left(f_{xxx}(a,b)\,h^3 + 3f_{xxy}(a,b)\,h^2k + 3f_{xyy}(a,b)\,hk^2 + f_{yyy}(a,b)\,k^3\right) + \cdots + \\ &\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(a,b)\,h^{n-i}k^i\right) + R_n\,, \end{aligned}$$

kjer je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-i}\partial y^i}(a+\vartheta h, b+\vartheta k)\,h^{n+1-i}k^i,\; 0 < \vartheta < 1\,.$$

Opomba: $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$ je binomski koeficent.

Ostanek R_n je napaka, ki jo naredimo, če vrednost funkcije $f(a+h, b+k)$ ocenimo z vsoto členov reda do n v Taylorjevi formuli. Če je funkcija $f(x,y)$ neskončnokrat parcialno odvedljiva na obe spremenljivki in je

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0\,,$$

tedaj lahko Taylorjevo formulo nadomestimo s *Taylorjevo vrsto*

$$f(a+h, b+k) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(a,b)\,h^{n-i}k^i\right).$$

Zgornje formule lahko razširimo tudi za funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Zvezna funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zavzame v točki (a,b)

1. *lokalni minimum*, če obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$f(x,y) - f(a,b) \geq 0$$

za vsako točko $(x,y) \in K_\delta(a,b)$,

2. *lokalni maksimum*, če obstaja tak δ, da je

$$f(x,y) - f(a,b) \leq 0$$

za vsako točko $(x,y) \in K_\delta(a,b)$.

Lokalni ekstrem je lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Izrek 1.6 (potrebni pogoj)
Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija v točki $(a,b) \in D$. Če je (a,b) lokalni ekstrem funkcije f, tedaj je

$$f_x(a,b) = 0 \quad in \quad f_y(a,b) = 0\,.$$

Izrek 1.7 (zadostni pogoj)
Točka $(a,b) \in D$ naj bo stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Nadalje, naj bo

$$f_{xx}(a,b) = A\,, \quad f_{xy}(a,b) = B\,, \quad f_{yy}(a,b) = C$$

in $H(a,b)$ Hessejeva matrika funkcije f v točki (a,b). Potem velja:

(i) če je $|H(a,b)| = AC - B^2 > 0$, tedaj je v (a,b) lokalni minimum, če je $A > 0$ in lokalni maksimum, kadar je $A < 0$,

(ii) če je $|H(a,b)| = AC - B^2 < 0$, tedaj je v (a,b) sedlo,

(iii) če je $|H(a,b)| = AC - B^2 = 0$, tedaj na podlagi drugih parcialnih odvodov ne morem sklepati o obstoju lokalnega ekstrema v (a,b).

Definicija 1.8 *Naj bo A simetrična matrika reda n. Če za vsak $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0,\ldots,0)\}$ velja*

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$$

pravimo, da je matrika A pozitivno definitna. *Če je*

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$$

rečemo, da je matrika A negativno definitna.

Izkaže se, da na pozitivno oz. negativno definitnost matrike vplivajo njene lastne vrednosti in sicer je matrika pozitivno definitna, če ima same pozitivne lastne vrednosti in negativno definitna, če so le-te negativne.

Izrek 1.9 *Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zvezna in zvezno parcialno odvedljiva do odvodov drugega reda. Nadalje naj bo $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ stacionarna točka funkcije f. Tedaj velja:*

(i) če je $H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pozitivno definitna matrika, tedaj ima funkcija f v točki $\mathbf{a}$ lokalni minimum,

(ii) če je $H(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ negativno definitna matrika, tedaj ima funkcija f v točki $\mathbf{a}$ lokalni maksimum.

Izrek 1.10 *Ekstreme funkcije $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pri pogojih $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ iščemo tako, da na običajen način iščemo ekstreme funkcije*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad - \lambda_1\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda_2\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \ldots \lambda_m\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \end{aligned}$$

S tem dobimo vse kandidate za ekstreme razen tistih, za katere je

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,\; g_{x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0,\; \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

1.2 Večkratni integrali

Naj bosta $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrabilni na območju D in $c \in \mathbb{R}$. Tedaj velja

1. $\iint\limits_D c\, f(x,y)\, dS = c \iint\limits_D f(x,y)\, dS$

2. $\iint\limits_D (f(x,y) + g(x,y))\, dS = \iint\limits_D f(x,y)\, dS + \iint\limits_D g(x,y)\, dS$

3. če je $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dS.$$

Izrek 1.11 *Naj bosta $p, q : [a,b] \to \mathbb{R}$ osekoma zvezni funkciji in naj velja $p(x) \leq q(x)$ za vsak $x \in [a,b]$. Naj bo še $D = \{(x,y) | a \leq x \leq b, p(x) \leq y \leq q(x)\}$ in f omejena, integrabilna funkcija. Tedaj je*

$$\iint\limits_D f(x,y)\, \mathrm{d}S = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{p(x)}^{q(x)} f(x,y)\, \mathrm{d}y\,.$$

V primeru zgornjega izreka bomo rekli, da integriramo po x najprej.

Če je $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pozitivna integrabilna funkcija, tedaj je njen dvojni integral na območju D enak prostornini telesa med grafom funkcije f in ravnino $z = 0$.

Ploščino območja D lahko s pomočjo drugega integrala izračunamo na naslednji način

$$\iint\limits_D 1\, \mathrm{d}S.$$

Uvedba novih spremenljivk

Naj bo D območje v ravnini, ki je opremljeno s spremenljivkama x in y. Recimo, da sedaj vpeljemo $x = x(u,v)$ in $y = y(u,v)$, kjer sta u, v takšna parametra, da je z njuno vpeljavo opisano območje D in za vsako točko (x,y) obstaja natanko ena (u,v), da je $(x,y) = (x(u,v), y(u,v))$. Recimo še, da smo vpeljali tako, da obstajata parcialni odovodi x_u, x_v, y_u, y_v. Tedaj je *Jacobijeva determinanta*

$$J = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Recimo, da območje je Δ tisto območje v ravnini, ki nam ob zvezi $x = x(u,v)$ in $y = y(u,v)$ s spremenljivkama u in v opiše D. Tedaj se dvojni integral v novih spremenljivkah u in v izraža na naslednji način

$$\iint\limits_D f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta f(x(u,v), y(u,v))\, J\, \mathrm{d}u \mathrm{d}v\,.$$

Polarne koordinate: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, kjer sta $r \geq 0$ in $\varphi \in [0, 2\pi]$. V tem primeru je Jacobijeva determinanta $J = r$.

1.3 Eulerjevi funkciji Gama in Beta

Funkcija Γ je za vsak $x > 0$ definirana kot $\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{x-1}\, dt\,.$

Veljajo naslednje lastnosti

1. $\Gamma(1) = 1$,

2. $\Gamma(n+1) = n!$, za poljuben $n \in \mathbb{N}$,
3. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, za poljuben $x > 0$,
4. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,
5. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$, za poljuben $x \in (0,1)$.

Funkcija B, je za poljubna $x, y > 0$ definirana s predpisom $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$. Veljajo naslednje lastnosti

1. $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$,
2. $B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(t+1)^{x+y}}\,dt$, za poljubna $x, y > 0$,
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\mathcal{B}(p,q)$, za poljubna $p, q > 0$.

Trojni integral računamo podobno kot dvojni integral. Povejmo le nekatere standardne nove spremenljivke in Jacobijeve determinante.

Cilindrične koordinate: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, kjer so $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$. Pri tem je $J = r$.

Sferne koordinate: $x = r\cos\varphi \cdot \cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi \cdot \cos\vartheta$, $z = r\sin\theta$, kjer so $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pri tem je $J = r^2\cos\vartheta$.

Volumen območja $G \subseteq \mathbb{R}^3$ se s pomočjo trojnega integrala izračuna kot

$$\iiint\limits_G 1\,dV\,.$$

Masa telesa, katerega gostota je funkcija $\rho : G \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^+$, je enaka

$$m = \iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,dV\,.$$

Težišče telesa (x_T, y_T, z_T) z gostoto $\rho : G \subseteq \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^+$, je enako

$$x_T = \frac{1}{m}\iiint\limits_G x\,\rho(x,y,z)\,dV$$
$$y_T = \frac{1}{m}\iiint\limits_G y\,\rho(x,y,z)\,dV$$
$$z_T = \frac{1}{m}\iiint\limits_G z\,\rho(x,y,z)\,dV,$$

kjer je m masa telesa.

Vztrajnostni moment telesa G pri vrtenu okoli točke/osi se izračuna kot

$$J = \iiint\limits_G \rho(x,y,z)d^2\,dV,$$

kjer je ρ funkcija, ki predstavlja gostoto telesa v dani točki, d pa razdalja od poljubne točke telesa G do točke/osi okoli katere se vrti.

V primeru, da je telo homogeno, tedaj je $\rho = \frac{m}{V}$, kjer je m masa telesa, V pa volumen telesa. V tem primeru se zgornje formule poenostavijo.

Poglavje 2

Diferencialna geometrija v prostoru

2.1 Krivulje

Krivulja $\mathcal{K}$ v prostoru je definirana z zvezno funkcijo $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, kjer je $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Funkciji $\vec{r}$ pravimo tudi parametrizacija krivulje $\mathcal{K}$. Pri tem so x, y, z funkcije, ki slikajo iz $[a,b]$ v $\mathbb{R}$.

Krivulja je lahko podana tudi kot presek ploskev, ki sta podana implicitno, npr. $F(x,y,z) = 0$ in $G(x,y,z) = 0$.

Naj bo krivulja $\mathcal{K}$ dana s parametrizacijo $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, in naj bo $T = \vec{r}(x_0) \in \mathcal{K}$. Če obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(x_0 + h) - \vec{r}(x_0)}{h},$$

je ta limita vektor, ki ga imenujemo *tangentni vektor* na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki x_0. Označimo ga s $\dot{\vec{r}}(a)$.

Opomba: Če so funkcije $x, y, z : [a,b] \to \mathbb{R}$ odvedljive v t, tedaj je

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

Naj bo krivulja $\mathcal{K}$ dana s parametrizacijo $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Premico, ki poteka skozi točko $T = \vec{r}(x_0) \in \mathcal{K}$ v smeri vektorja $\dot{\vec{r}}(x_0)$, imenujemo *tangenta na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki x_0*. Enačba tangente se tako izraža

$$\begin{aligned}
x &= x(x_0) + \dot{x}(x_0)\lambda \\
y &= y(x_0) + \dot{y}(x_0)\lambda \\
z &= z(x_0) + \dot{z}(x_0)\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Opomba: premica je podana v parametrični obliki.

Parametrizacija $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ krivulje $\mathcal{K}$ je *regularna*, če je $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$ za vsak $t \in [a,b]$.

Če je krivulja $\mathcal{K}$ podana kot presek ploskev, ki sta podana implicitno z enačbama $F(x,y,z) = 0$ in $G(x,y,z) = 0$, tedaj se smerni vektor tangente v točki $T(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{K}$ izračuna kot

$$\mathrm{grad}(F(x_0, y_0, z_0)) \times \mathrm{grad}(G(x_0, y_0, z_0)).$$

Opomba: Naj bosta $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

1. *Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$* je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

2. *Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$* je

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Normalna ravnina krivulje $\mathcal{K}$ v točki $T \in \mathcal{K}$ je ravnina, ki poteka skozi točko T in je pravokotna na tangentni vektor. *Normala* krivulje $\mathcal{K}$ v točki $T \in \mathcal{K}$ je vsaka premica, ki leži v normalni ravnini in poteka skozi točko T.

Opomba: splošna enačba ravnine se izraža kot

$$ax + by + cz = d.$$

Pri tem je vektor (a, b, c) vektor, ki je pravokoten na ravnino

$$ax + by + cz = d.$$

Naj bo krivulja $\mathcal{K}$ podana s parametrizacijo $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Tedaj je *dolžina loka krivulje* $\mathcal{K}$, $\ell(\mathcal{K})$, enaka

$$\ell(\mathcal{K}) = \int_a^b \sqrt{\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)}\, \mathrm{d}t\,.$$

2.2 Ploskve

Ploskev $\mathcal{S}$ je lahko podana

1. parametrično $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$,
2. implicitno z enačbo $F(x, y, z) = 0$,
3. eksplicitno z enačbo $z = f(x, y)$.

Naj bo ploskev $\mathcal{S}$ podana s parametrizacijo $\vec{r} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Naj bo $(u_0, v_0) \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ poljubna točka in naj bo parameter $v = v_0$ konstanten. Potem vse točke, za katere je $v = v_0$ ležijo na krivulji $\vec{r}(u, v_0)$. Podobno točke, za katere je u konstanten, leže na krivulji $\vec{r}(u_0, v)$. Ti dve krivulji imenujemo *koordinatni krivulji.* Odvod koordinatnih krivulj je enak

$$\vec{r}(u, v_0) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_u(u, v_0) = (x_u(u, v_0), y_u(u, v_0), z_u(u, v_0))$$

$$\vec{r}(u_0, v) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_v(u_0, v) = (x_v(u_0, v), y_v(u_0, v), z_v(u_0, v))$$

Parcialna odvoda sta tangentna vektorja ustrezne koordinatne krivulje v točki $\vec{r}(u_0, v_0)$.

Pravimo, da je parametrizacija ploskve $\mathcal{S}$ *regularna*, če so funkcije $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ zvezno parcialno odvedljive in v vsaki točki $(u, v) \in \mathcal{D}$ velja

$$\vec{r}_u(u, v) \times \vec{r}_v(u, v) \neq 0\,.$$

Naj bo ploskev $\mathcal{S}$ podana z regularno parametrizacijo $\vec{r} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. *Normalni vektor* ploskve $\mathcal{S}$ v točki $T = \vec{r}(u_0, v_0)$, $\vec{n}(u_0, v_0)$ je enak

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)\,.$$

Ravnino skozi točko T z normalo $\vec{n}$ imenujemo *tangentna ravnina* ploskve $\mathcal{S}$ v točki T.

V primeru, da imamo ploskev $\mathcal{S}$ hkrati podano v implicitni obliki z enačbo $F(x, y, z) = 0$ in s pomočjo parametrizacije $\vec{r}$, tedaj velja

$$\operatorname{grad} F = \lambda(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\,.$$

Premica skozi točko T na ploskvi $\mathcal{S}$ v smeri normalnega vektorja se imenuje *normala na ploskev $\mathcal{S}$ v točki T.*

Naj bo ploskev $\mathcal{S}$ podana z regularno parametrizacijo $\vec{r} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Tedaj je površina ploskve $\mathcal{S}$

$$\operatorname{Pov}(\mathcal{S}) = \iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv\,,$$

kjer je

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u,\ F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v,\ G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v.$$

Poglavje 3

Krivuljni in ploskovni integral

Krivulja je *gladka*, če je $\vec{r}$ v vsaki točki zvezno odvedljiva funkcija in njen odvod $\dot{\vec{r}} \neq 0$. Za nadaljevanje predpostavimo, da so krivulje gladke.

3.1 Krivuljni integral skalarne funkcije

Naj bo $f : \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarna funkcija in $\mathcal{K}$ krivulja parametrizirana z regularno parametrizacijo $\vec{r} : [a, b] \to \mathcal{K}$. Tedaj je *krivuljni integral skalarne funkcije* f na $\mathcal{K}$ enak

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\vec{r}(t))\sqrt{\dot{\vec{r}}(t)\dot{\vec{r}}(t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pri teh predpostavkah veljajo naslednje lastnosti:

1. krivuljni integral je neodvisen od izbire smeri krivulje,
2. če je $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ in $|\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 1$, tedaj
$$\int\limits_{\mathcal{K}} f\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathcal{K}_1} f\mathrm{d}s + \int\limits_{\mathcal{K}_2} f\mathrm{d}s.$$
3. velja linearnost: če $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in če sta $f, g : \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarni funkciji
$$\int\limits_{\mathcal{K}} (\lambda\, f + \mu\, g)\,\mathrm{d}s = \lambda \int\limits_{\mathcal{K}} f\,\mathrm{d}s + \mu \int\limits_{\mathcal{K}} g\,\mathrm{d}s\,.$$

Naj bo krivulja $\mathcal{K}$ podana parametrično $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ in naj bo gostota podana s funkcijo $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Tedaj se masa krivulje $\mathcal{K}$ izračuna kot

$$m = \int\limits_{\mathcal{K}} \rho\mathrm{d}s.$$

3.2 Krivuljni integral vektorske funkcije po usmerjeni poti

Naj bo $\vec{F} : \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorska funkcija in $\mathcal{K}$ krivulja parametrizirana z regularno parametrizacijo $\vec{r} : [a, b] \to \mathcal{K}$. Tedaj je *krivuljni integral vektorske funkcije* f po usmerjeni krivulji $\mathcal{K}$ od točke $\vec{r}(a)$ do točke $\vec{r}(b)$ enak

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}(x, y, z)\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Pri teh predpostavkah veljajo naslednje lastnosti.

1. V primeru sklenjene krivulje podamo orientacijo krivulje s smerjo obhoda in sicer velja, da je krivulja *pozitivno orientirana*, ko se premikamo v smeri nasprotni urinemu kazalcu oziroma pri premikanju mora biti območje na levi strani. V nasprotnem je sklenjena krivulja *negativno orientirana*.

2. Če je $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ in $|\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2| = 1$ ter je orientiracija krivulj $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ usklajena z orientacijo $\mathcal{K}$, tedaj

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{K}_1} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} + \int\limits_{\mathcal{K}_2} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}.$$

3. Če je $\mathcal{K}$ orientirana krivulja in $-\mathcal{K}$ krivulja z nasprotno orientacijo, tedaj je

$$\int\limits_{-\mathcal{K}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = -\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}\,.$$

4. Velja linearnost: če $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in če sta $\vec{F}, \vec{G} : \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vektorski funkciji

$$\int\limits_{\mathcal{K}} (\lambda\, \vec{F} + \mu\, \vec{G})\, \mathrm{d}\vec{r} = \lambda \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} + \mu \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{G}\, \mathrm{d}\vec{r}\,.$$

5. Za $\vec{F}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z))$ lahko krivuljni integral po krivulji $\mathcal{K}$ zapišemo

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{r} = \int_{\mathcal{K}} f_1(x,y,z)\, dx + f_2(x,y,z)\, dy + f_3(x,y,z)\, dz\,.$$

3.3 Orientacija ploskve

Ploskev $\mathcal{S}$ je *gladka*, ko ima v vsaki točki tangentno ravnino in $\mathcal{S}$ je *odsekoma gladka*, če jo lahko razdelimo na končno mnogo gladkih ploskev.

Lokalno gledano lahko za vsako ploskev rečemo, da ima dve strani. Če izberemo eno od teh dveh strani pravimo, da smo ploskev v neki točki *orientirali*. To pomeni, da v točki izberemo eno od dveh normal, ki sta si med seboj nasprotno usmerjeni. Natančneje, če v točki T izberemo normalo $\vec{n}$ in se premikamo po sklenjeni krivlji na ploskvi $\mathcal{S}$, moramo pri vrnitvi v točko T spet dobiti $\vec{n}$ (in ne $-\vec{n}$). Ploskev je *orientabilna*, ko ji je mogoče določiti orientacijo.

Rob ploskve $\mathcal{S}$, $\partial\mathcal{S}$, tvorijo krivulje, ki omejujejo ploskev $\mathcal{S}$. Naj bo $\mathcal{S}$ orientirana ploskev in naj bo $\partial\mathcal{S}$ odsekoma gladka krivulja. Orientacija ploskve $\mathcal{S}$ določa orientacijo roba $\partial\mathcal{S}$ in sicer, če se postavimo na $\mathcal{S}$ tako, da stojimo v smeri izbrane normale, je orientacija oziroma usmerjenost roba $\partial\mathcal{S}$ taka, da je območje na sprehajalčevi levi strani.

3.4 Ploskovni integral skalarne funkcije

Naj bo $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ gladka ploskev, $\vec{r} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ njena regularna parametrizacija in $f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je *ploskovni integral skalarne funkcije* f po ploskvi $\mathcal{S}$ enak

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\, \mathrm{d}P = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(\vec{r}(u,v))\, \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,,$$

kjer je

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u,\; F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v,\; G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v.$$

Pri zgornjih predpostavkah veljajo naslednje lastnosti

1. če je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ ter se ploskvi $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ sekata v neki krivulji, teda

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f \,\mathrm{d}P = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} f \,\mathrm{d}P + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} f \,\mathrm{d}P$$

2. velja linearnost: če $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in če sta $f, g : \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarni funkciji

$$\int\limits_{\mathcal{S}} (\lambda f + \mu g) \,\mathrm{d}P = \lambda \int\limits_{\mathcal{S}} f \,\mathrm{d}P + \mu \int \int\limits_{\mathcal{S}} g \,\mathrm{d}P .$$

3.5 Ploskovni integral vektorske funkcije po orientirani ploskvi

Naj bo $\mathcal{S}$ ploskev, $\vec{r} : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}$ njena regularna parametrizacija, pri čemer je ploskev $\mathcal{S}$ orientirana z normalo $\vec{n} = \vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)$, ter $\vec{F} : \mathcal{S} \to \mathbb{R}^3$ vektorsko polje. Tedaj je *ploskovni integral funkcije* $\vec{F}$ po ploskvi $\mathcal{S}$ oziroma *pretok polja* $\vec{F}$ skozi $\mathcal{S}$ enak

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F}\, d\vec{P} = \iint\limits_{\mathcal{D}} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v .$$

Pri zgornjih predpostavkah veljajo naslednje lastnosti.

1. Če je $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ ter se ploskvi $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$ sekata v neki krivulji, teda

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F} \,\mathrm{d}\vec{P} = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} \vec{F} \,\mathrm{d}\vec{P} + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} \vec{F} \,\mathrm{d}\vec{P}$$

2. Velja linearnost: če $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ in če sta $\vec{F}, \vec{G} : \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vektorski funkciji

$$\int\limits_{\mathcal{S}} (\lambda \vec{F} + \mu \vec{G}) \,\mathrm{d}\vec{P} = \lambda \int\limits_{\mathcal{S}} \vec{F} \,\mathrm{d}\vec{P} + \mu \int \int\limits_{\mathcal{S}} \vec{F} \,\mathrm{d}\vec{P} .$$

3. Za vektorsko polje $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$ lahko ploskovni integral po orientrirani ploskvi $\mathcal{S}$ zapišemo tudi kot

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F}\, d\vec{P} = \iint\limits_{\mathcal{S}} f_1 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + f_2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z + f_3 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y .$$

4. Če spremenimo orientacijo ploskve $\mathcal{S}$, tedaj

$$\iint\limits_{-\mathcal{S}} \vec{F} \,\mathrm{d}\vec{P} = -\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F} \,\mathrm{d}\vec{P} .$$

3.6 Operacije na skalarnih in vektorskih poljih

Vpeljimo diferencialni operator $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Gradient

Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva funkcija. Tedaj je gradient funkcije f, oznaka graf(f), definiran kot

$$\mathrm{graf}(f) = \vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z).$$

Naj bo $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tako vektorsko polje, da obstaja skalarno polje f tako, da je

$$\vec{F} = \operatorname{grad} f\,.$$

Tedaj je vektorsko polje $\vec{F}$ *potencialno polje*, skalarno polje f pa njegov *potencial.*

Naj bo $\vec{F} : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zvezno potencialno polje in $\mathcal{K}$ krivulja, ki se jo da parametrizirati z regularno parametrizacijo z začetno točko v A in končno točko v B, $A, B \in \mathcal{D}$. Če je f potencial polja $\vec{F}$, tedaj je

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = f(B) - f(A)\,.$$

Opomba: pri predpostavkah zgornjega izreka in će $\mathcal{K}$ sklenjena krivulja, tj. $A = B$, tedaj je

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = 0.$$

Divergenca

Naj bo $\vec{F}$ vektorsko polje. Tedaj je *divergenca* vektorskega polja $\vec{F}$ definirana kot

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}\,.$$

Rotor

Rotor vektorskega polja $\vec{F}$ je definiran kot

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}\,.$$

Naj bo $\vec{F} : \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zvezno in odvedljivo vektorsko polje. Tedaj so naslednje trditve ekvivalentne.

(i) $\vec{F}$ je potencialno polje.

(ii) $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$.

(iii) Če sta $A, B \in \mathcal{K}$ in je $\mathcal{K}$ orientirana krivulja z začetkov v A in koncem v B, potem je $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r}$ neodvisen od krivulje $\mathcal{K}$ in odvisen samo od točk A in B.

3.7 Integralski izreki

Gaussov izrek: Naj bo $\mathcal{G}$ omejeno območje v $\mathbb{R}^3$ katerega rob $\partial\mathcal{G}$ je sestavljen iz ene ali več disjunktnih ploskev, ki jh lahko parametriziramo z regularno parametrizacijo in je orientiran z zunanjo normalo. Nadalje naj bo $\vec{F}$ zvezno in odvedljivo vektorsko polje v okolici $\mathcal{G} \cup \partial\mathcal{G}$. Tedaj je ploskovni integral vektorske funkcije $\vec{F}$ po $\partial\mathcal{G}$ enak trojnemu integralu divergence polja $\vec{F}$ po $\mathcal{G}$

$$\iint\limits_{\partial\mathcal{G}} \vec{F}\, d\vec{P} = \iiint\limits_{\mathcal{G}} \operatorname{div}\vec{F}\, dV\,.$$

Stokesov izrek: Naj bo $\mathcal{S}$ orientirana ploskev z normalo $\vec{n}$, katere rob $\partial\mathcal{S}$ je sestavljen iz končno mnogo gladkih krivulj in orientiran skladno s $\mathcal{S}$. Nadalje naj bo $\vec{F}$ zvezno in odvedljivo vektorsko polje v okolici $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$. Tedaj je krivuljni integral polja $\vec{F}$ po robu $\partial\mathcal{S}$ enak ploskovnemu integralu rotorja $\vec{F}$ po $\mathcal{S}$

$$\int\limits_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} d\vec{r} = \iint\limits_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}\vec{F}\, d\vec{P}\,.$$

Greenov izrek: Naj bo $\mathcal{D}$ omejeno območje v ravnini katerega rob $\partial\mathcal{D}$ je sestavljen iz končno mnogo gladkih krivulj in je pozitivno orientiran. Nadalje naj bo $\vec{F} = (f_1, f_2)$ zvezno in odvedljivo vektorsko polje v okolici $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Tedaj je

$$\int\limits_{\partial\mathcal{D}} f_1\, dx + f_2\, dy = \iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\, dy\,.$$

3.8 Uporaba krivuljnega in ploskovnega integrala v fiziki

1. Naj bo ρ funkcija, ki opisuje gostoto v poljubni točki, in naj bo $\mathcal{K}$ žica, ki jo opišemo kot odsekoma gladko krivuljo. Tedaj je *masa žice* $\mathcal{K}$ enaka

$$m = \int_{\mathcal{K}} \rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

   Nadalje, *težišče žice* je $(\frac{x_0}{m}, \frac{y_0}{m}, \frac{z_0}{m})$, kjer je

$$x_0 = \int\limits_{\mathcal{K}} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\ \ y_0 = \int\limits_{\mathcal{K}} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\ \ z_0 = \int\limits_{\mathcal{K}} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

2. *Delo*, ki ga napravimo s silo $\vec{F}$ po premiku po poti $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ opišemo kot odsekoma glahko krivuljo), se izračuna kot

$$W = \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}(x,y,z)\mathrm{d}\vec{r}.$$

3. Naj bo ρ funkcija, ki opisuje gostoto v poljubni točki, in naj bo $\mathcal{S}$ ploskev. Tedaj je *masa ploskve* $\mathcal{S}$ enaka

$$m = \iint_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\mathrm{d}P.$$

   Nadalje, *težišče ploskve* je $(\frac{x_0}{m}, \frac{y_0}{m}, \frac{z_0}{m})$, kjer je

$$x_0 = \iint\limits_{\mathcal{K}} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\ \ y_0 = \iint\limits_{\mathcal{S}} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s,\ \ z_0 = \iint\limits_{\mathcal{S}} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

4. *Pretok* pri hitrosti $\vec{F}$ skozi ploskev $\mathcal{S}$ se izračuna kot

$$\phi = \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{F}(x,y,z)\mathrm{d}\vec{P}.$$

   Nadalje, če ρ opisuje gostoto tekočine, tedaj se *masa pretoka* izračuna na na način

$$\phi = \iint\limits_{\mathcal{S}} \rho(x,y,z)\vec{F}(x,y,z)\mathrm{d}\vec{P}.$$

Poglavje 4

Laplaceova transformacija

Naj bo $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ funkcija. Če obstaja integral

$$F(z)=\int_0^\infty e^{-z\,t}f(t)\,dt\,,\quad z\in\mathbb{C}\,,$$

tedaj je F *Laplaceova transformiranka* funkcije f. Pišemo

$$F(z)=\mathcal{L}(f(t))(z)\,.$$

Predpis $\mathcal{L}:\ f(t)\mapsto F(z)$ imenujemo *Laplaceova transformacija.*

Originalno funkcijo f imenujemo *inverz Laplaceove transformiranke* ali krajše inverz od F in pišemo

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(z))\,.$$

Predpis $\mathcal{L}^{-1}:\ F(z)\mapsto f(t)$ je *inverzna Laplaceova transformacija.*

Opomba: Laplaceova transformiranka F je kompleksna funkcija kompleksne spremenljivke.

Funkcija $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ je *eksponentnega tipa*, če obstajata taki realni števili $M>0$ in c, da je

$$|f(t)|\le M\,e^{c\,t}\,.$$

Naj bo f (vsaj) odsekoma zvezna funkcija eksponentnega tipa. Tedaj Laplaceova transformiranka F funkcije f obstaja za vsa kompleksna števila z, za katera je $\mathbb{R}e(z)>c$.

Veljajo naslednje formule *Tabela 1*: Osnovne Laplaceove transformiranke:

$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(z)$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t))(z)$
1	$\frac{1}{z}$	e^{at}	$\frac{1}{z-a}$
t	$\frac{1}{z^2}$	$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2}{z^3}$	$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(z-a)^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$	$e^{at}\mathrm{ch}(\omega t)$	$\frac{z-a}{(z-a)^2-\omega^2}$
t^a, $a>-1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{z^{a+1}}$	$e^{at}\mathrm{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{(z-a)^2-\omega^2}$

Tabela 2: Lastnosti Laplaceove transformacije:

$\mathcal{L}(\lambda\, f(t) + \mu\, g(t))(z) = \lambda\, \mathcal{L}(f(t))(z) + \mu\, \mathcal{L}(g(t))(z)$
$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z-a)$
$\mathcal{L}(f(at))(z) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f(t))(\frac{z}{a})\,,\ a>0$
$\mathcal{L}(f(t-k))(z) = e^{-kz}\mathcal{L}(f(t))(z)$
$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(z) = z^n\mathcal{L}(f(t))(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - \cdots - zf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$\mathcal{L}(f'(t))(z) = z\mathcal{L}(f(t))(z) - f(0)$
$\mathcal{L}(t^n\, f(t))(z) = (-1)^n\, \mathcal{L}^{(n)}(f(t))(z)$
$\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)d\tau)(z) = \dfrac{1}{z}\mathcal{L}(f(t))(z)$

Naj bosta f, g zvezni funkciji. Tedaj je *konvolucija* funkcij f in g, $f*g$, enaka

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Pri zgornjih predpostavkah velja naslednji izrek

$$\mathcal{L}((f*g)(t))(z) = \mathcal{L}(f(t))(z)\mathcal{L}(g(t))(z)\,.$$

TABELA OSNOVNIH INTEGRALOV:

$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$	$\int \mathrm{sh}\,x\,dx = \mathrm{ch}\,x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \mathrm{ch}x\,dx = \mathrm{sh}\,x + C$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert + C$, $(\lvert x\rvert < a)$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\rvert + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{atan}\,\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + C$, $(\lvert x\rvert > a)$

OSNOVNA PRAVILA

- $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx\,.$
- $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx\,.$
- **Uvedba nove spremenljivke**
  Naj bo $x = x(t)$ odvedljiva funkcija. Če ima funkcija $f(x)$ nedoločeni integral, obstaja tudi nedoločeni integral funkcije $f(x(t))x'(t)$ in velja
  $$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))x'(t)\,dt\,.$$
- **Integriranje po delih**
  $$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Za poljubni realni števili a in b velja

- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$,
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[(\cos(a-b) - \cos(a+b)]$,
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[(\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.

Diferencialne enačbe

Diferencialna enačba z ločljivima spremeljivkama je oblike

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

in jo rešujemo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Homogena diferencialna enačba je oblike

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

in jo rešujemo tako, da vpeljemo novo spremeljivko $z = \frac{y}{x}$. Posledično je $y = z \cdot x$ in $y' = z'x + z$.

Linearna diferencialna enačba prvega reda je oblike

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x),$$

kjer sta f in g poljubni zvezni funkciji. Rešitev diferencialne enačbe poiščemo v dveh korakih.

(i) Poiščemo rešitev *homogenega dela* $y'(x) + f(x)y(x) = 0$. Rešitev označimo s y_H.

(ii) *Partikularno rešitev* lahko uganemo ali pa si pomogamo s pomočjo variacije konstante $y_P(x) = C(x)y_H(x)$.

Spošna rešitev diferencialne enačbe je $y_S = y_H + y_P$.